第44卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 44, No. 2
1986 年 5 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1986

Rossby 波的能量、能量通量与 Lagrange 函数*

伍 荣 生

(南京大学大气科学系)

提 要

利用正压涡度方程计算波动能量通量时，它的形式将不同于直接利用运动方程所求得的通量，这是一个于六十年代初所提出的问题。在本文中，对此问题进行再次分析与研究。结果表明，如果将运动方程进行改写，使其包含了与涡度方程相等的条件，对于波动而言，就整个波动范围求平均且假定波动振幅为常数，则可得到相同的表示式。于文中，还利用此改写的运动方程，导得了波动位能的表示式，这为进一步研究非线性 Rossby 波提供了一个物理基础。

一、引 言

Lonquest-Higgins[1] 提出了这样的问题，即利用运动方程或利用涡度方程可得出二种不同的能量通量。设线性化的运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2}$$

在无辐散条件下，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

可得能量方程为

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_1=0 \tag{4}$$

其中

$$E=\frac{1}{2}(u^2+v^2)=\text{能量} \tag{5}$$

$$\vec{F}_1=\vec{V}\phi=(u\phi,v\phi)=\text{能量通量} \tag{6}$$

在上述各式中，其符号均相同于惯常的意义。

但从另一方面，根据(1)—(3)式，可得涡度方程为

* 本文于 1984 年 1 月 28 日收到，1985 年 1 月 12 日收到修改稿。

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{7}$$

其中 ψ 为流函数，它满足

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8}$$

$$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}=\text{常数} \tag{9}$$

将(7)式乘以 ψ，经过整理后可得

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_2=0 \tag{10}$$

其中

$$\vec{F}_2=-\psi\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}-\beta\left(\frac{1}{2}\psi^2,0\right) \tag{11}$$

比较(11)式与(6)式，可以发现利用涡度方程与运动方程得出了二个不同的能量通量 $\vec{F}_2$ 与 $\vec{F}_1$，而此二个通量之间还具有以下的特点：设 $\vec{G}$ 表示这二个矢量之差，即

$$\vec{G}=\vec{F}_2-\vec{F}_1 \tag{12}$$

如果，$\vec{G}$ 还满足

$$\nabla\cdot\vec{G}=0 \tag{13}$$

则将(13)加到(4)式上去，就可得到

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec{F}_1+\vec{G})=\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_2=0 \tag{14}$$

这时，就得到了相同的能量方程。要满足(13)式，须 G 成立

$$\vec{G}=\vec{n}\wedge\nabla A \tag{15}$$

其中 $\vec{n}$ 为垂直方向单位矢，A 为某一物理量。Buchwald[2]于 1972 年曾求得了 $\vec{G}$ 的表示式及 A：

$$\vec{G}=\left(-\frac{\partial A}{\partial y},\frac{\partial A}{\partial x}\right) \tag{16}$$

$$A=-\psi\phi+\frac{1}{2}f\psi^2$$

为什么会引起 $\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 的差异，$\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 之中，到底那一个较为合理，这些问题虽然曾有过研究[1]，但仍未有一个较为满意的解答。

设 ψ 呈波动解，即

$$\psi=ae^{i(kx+my-\omega t)} \tag{17}$$

则可算得波动的平均能量为

$$\overline{E}=\frac{1}{4}a^2(k^2+m^2) \tag{18}$$

从涡度方程可求得 Rossby 波的频散关系式为

$$\omega=-\frac{\beta k}{k^2+m^2} \tag{19}$$

同时，可求得

$$\vec{F}_2=\bar{E}\vec{C}g \tag{20}$$

其中 $\vec{C}g$ 为群速，它的表示式为

$$\vec{C}g=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k},\ \frac{\partial\omega}{\partial m}\right) \tag{21}$$

这表示，利用涡度方程所得到的能量方程(10)式是符合于物理概念的，因为流体力学中，已证明能量是按群速传播的。Louqust-Higgcus 认为，在波组情况下，波动振幅是可变的，此时，在近似情况下，就可以导得 $\vec{F}_1$，即把 $\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 之差归结于波组与单波的差别，这种分析并不能认为是完善的，这将在下一节中予以分析与讨论。

二、问 题 的 解 答

正压涡度方程(7)式是在无辐散条件(3)式以及 β 平面的条件

$$f=f_0+\beta y \tag{22}$$

下所推得的，(22)式实际上也就是 Rossby 波的主要物理基础之一。

直接利用(1)、(2)两式来推求能量方程，虽然它已引用了无辐散条件(3)式，但是却无法引用 β 平面的条件(22)式。因此能量方程(4)式与(10)式所包含的条件是不同的。

我们可以将方程(1)、(2)两式作一些改写，使其包含了无辐散与 β 平面近似这两个条件，这时，它们的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(\phi-f\psi) \tag{23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-fu-\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(\phi-f\psi)-\beta\psi \tag{24}$$

在(24)式中，较(23)式多了一项由于 β 作用所引起的附加力。而此力将是引起能量变化的主要因子。

将(23)、(24)两式，分别乘以 u，v，则可求得

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_3=0 \tag{25}$$

其中

$$\vec{F}_3=\left(u(\phi-f\psi)+\frac{1}{2}\beta\psi^2,v(\phi-f\psi)\right) \tag{26}$$

如果将(23)、(24)两式，代入 $\vec{F}_2$ 的表示式，则可求得

$$\vec{F}_2=\left(\frac{\partial}{\partial y}(\psi(\phi-f\psi),\ -\frac{\partial}{\partial x}(\psi(\phi-f\psi))\right)+\vec{F}_3 \tag{27}$$

如令 A_2 为

$$A_2=\psi\phi-f\psi^2 \tag{28}$$

则(27)式中的第一项可写成 $\left(\frac{\partial A_2}{\partial y},-\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)$，比较(28)式与(16)式，也可发现 A 与 A_2 是不同的。

利用运动方程与无辐散条件，可得平衡方程

$$\nabla^2(\phi-f\psi)=-\beta\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{29}$$

如取波动形式解(17)式，代入(29)式，则得

$$\phi-f\psi=\beta\frac{im}{k^2+m^2}\psi \tag{30}$$

于上式中，将积分常数 $G(t)$ 略去。用($\bar{}$)表示对整个波动范围内求平均，如此可得

$$\bar{A}_2=\overline{\psi(\phi-f\psi)}=\frac{\beta m}{k^2+m^2}\frac{1}{2}|a|^2 \tag{31}$$

在振幅 a 为常数时，有

$$\frac{\partial\bar{A}_2}{\partial y}=\frac{\partial\bar{A}_2}{\partial x}=0 \tag{32}$$

因此有

$$\overline{\vec{F}_2}=\overline{\vec{F}_3} \tag{33}$$

这就表明，这二种波动的平均能量通量是相同的。反过来说，如果振幅 a 是可变的，则(32)式不成立，因之 $\overline{\vec{F}_2}$ 与 $\overline{\vec{F}_3}$ 就不相同了。这时，相同条件下得出不同的平均通量形式，这种结果当然是不合适的。从以上的分析也可以得出这样的结论，$\overline{\vec{F}_2}$ 的通量形式是合理的。

另一方面，如果直接利用未经改写的(1)、(2)两式代入 $\vec{F}_2$ 的表示式，则可得

$$\vec{F}_2=\left(\frac{\partial A}{\partial y},-\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\vec{F}_1 \tag{34}$$

其中 A 如(16)式所示，可以证明 A 与 A_2 有以下关系，即

$$A=-A_2-\frac{1}{2}f\psi^2 \tag{35}$$

故利用(31)式及(17)式，可知

$$\bar{A}=-\bar{A}_2-\frac{1}{2}\overline{f\psi^2} \tag{36}$$

由于 f 为 y 的函数，故

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial y}\neq 0 \tag{37}$$

如此，当我们对(34)式取平均，便可以知道 $\overline{\vec{F}_2}$ 不等于 $\overline{\vec{F}_1}$，这就说明在不同的条件下，能量通量形式是不同的。

总之，$\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 的差异，是由于推求 $\vec{F}_1$ 时没有考虑到 β 平面这一特点所引起的，并非如 Louquest-Higgeus 所认为那样，是由于波动振幅的可变所造成的。

三、波动的位能与 Lagrauge 函数

为了方便起见，将(23)、(24)式写成矢量形式

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=-\nabla(\phi-f\psi)-(0,\beta\psi), \tag{38}$$

上式右侧第一项为一保守力，设质点从其平衡位置(设为零点)位移 $\vec{r}$ 距离，则克服此力

所作之功为

$$\int \delta \vec{r} \cdot \nabla(\phi - f\psi) = \int \delta(\varphi - f\psi)$$

在一个波动范围内，由于物理量的周期性，往北或往南运动，此物理量的差值总和相互抵消，故就整个波动范围内求积分，其值等于零。这就表示，就平均而言，(38)式中的第一项是不起作用的。而在第二项所表示的力的作用下，质点从其平衡位置向北移动 η 距离，则需对质点作功：

$$W = \int_0^{\eta} \beta\psi \, dy \tag{39}$$

其中(ξ,η)为 $\vec{r}$ 在 x,y 方向的分量。此功就成为质点位在 η 处的能量。

当 ψ 为波动解时，可求得

$$\delta y = v\delta t = ik\psi\delta t$$

或者

$$\eta = -\frac{k}{\omega}\psi \tag{40}$$

于此已假定 $t=0$ 时，$\psi(0)=\eta_0$，即 $\eta_0 = ae^{i(kx+my)}$，将(40)式代入(39)式，则可求得

$$w = \frac{1}{2}\beta\psi\eta \tag{41}$$

从此可见，在 β 作用下，可以使质点得到了上式所示的能量，此表示式与 Buchwald[2] 所得到的相同。

现引入新函数 F，它满足

$$\psi = F_t \tag{42}$$

于上式中用附标表示微分，由于

$$\delta y = v\delta t = \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta t = F_{xt}\delta t$$

如此，可以将 η 表示为

$$\eta = F_x \tag{43}$$

同理，有

$$\xi = -F_y \tag{44}$$

将这些表示式代入(39)式，则得

$$w = \frac{1}{2}\beta F_t F_x \tag{45}$$

按照力学原理，知道动能 E 可以写成

$$E = \frac{1}{2}(F_{xt}^2 + F_{yt}^2) \tag{46}$$

如此，可以求得 Lagrange 函数为

$$L = E - W = \frac{1}{2}\{(F_{xt}^2 + F_{yt}^2) - \beta F_x F_t\} \tag{47}$$

利用变分原理，可求得与此 L 相对应的 Euler 方程为

$$\nabla^2 F_{tt} + \beta F_{xt} = 0 \tag{48}$$

如果将(42)式代入上式，就得到

$$\nabla^2\psi_t+\beta\psi_x=0$$

这就是正压涡度方程。所以只要我们能够写出合适的位能表示式，就能够得出 Lagrange 函数，利用它不仅使问题的物理本质有了深刻理解，即可从分析力学的角度了解涡度方程的机制，且使问题特别是某些非线性问题得到了一种近似解法。而(47)式的 Lagrange 函数与 Whitham[3]等人的结果是相同的。

如果寻求 Lagrange 函数并不是一件容易的事情，有时，与一个微分方程相对应的变分问题并不是唯一的，此时，必须挑取一个具有力学意义的函数才为合适。在下一节中，将利用本节方法分析非线性涡度方程的 Lagrange 函数。

四、非线性Rossby 波的Lagrange 函数

非线性的运动方程，可写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\zeta_a v&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+\zeta_a u&=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\end{aligned}\tag{49}$$

其中

$$\begin{aligned}\zeta_a&=\zeta+f=\text{绝对涡度}\\ \Phi&=\phi+\frac{1}{2}(u^2+v^2)=\text{总能量}\end{aligned}\tag{50}$$

在无辐散以及 β 平面的条件下，(49)式还可改写为：

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=-\nabla(\Phi-\zeta_a\psi)-\psi\nabla\zeta_a\tag{51}$$

相似于上节的讨论，上式第一项，在$(\Phi-\zeta_a\psi)$呈波动情况下，对整个波动范围平均，此力所作之功等于零，而上式第二项是引起能量变化的作用力。在此力场下，所作之功为

$$W=\int\psi\nabla\zeta\cdot\delta\vec{r}+\int\beta\psi\delta y\tag{52}$$

如果近似地以 $\nabla\zeta_0$ 来代替上式中的 $\nabla\zeta$，其中 $\nabla\zeta_0$ 表示在平衡点的相对涡度梯度，则(52)式可写成

$$W\simeq\int_0^x\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|_0\psi dx+\int_0^y\left(\beta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big|_0\right)\psi\delta y\tag{53}$$

相似于上节处理，在 ψ 为波动解时，可得

$$W\simeq\frac{1}{2}\left\{\left(\beta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big|_0\right)\psi\eta+\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\Big|_0\psi\xi\right\}\tag{54}$$

如以 F 来代替，则 w 可表示为

$$w\simeq\frac{1}{2}\left\{\beta F_t F_x+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big|_0 F_t F_x-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big|F_t F_y\right\}\tag{55}$$

这就是位能表示式，利用此式可将 Lagrange 函数写成

$$L=\frac{1}{2}\left\{F_{xt}^2+F_{yt}^2-F_t\left((\beta+\nabla^2F_{ty}\Big|_0)F_x-\nabla^2F_{tx}\Big|_0F_y\right)\right\} \tag{56}$$

这一表示式与 Prigogine[5]所得出的广义熵的制造率在形式上是相似的。在他的工作中，广义熵的制造率 Φ 可写成 $\Phi(T,T_0)$，其中 T_0 为某一平均温度，T 为局地的温度，而在我们的工作中，在 L 之中，含有某一平衡位置处的 $\nabla^2F_{tx}|_0$，$\nabla^2F_{ty}|_0$。相似于Prigogine[5] 及 Finlayson 的处理方法，即作泛函

$$J=\int Ldvdt \tag{57}$$

求此泛函的极值时，令 $\nabla^2F_{tx}|_0$，$\nabla^2F_{ty}|_0$ 为不变，而在求变分之后，再令

$$\nabla^2F_{tx}|_0=\nabla^2F_{tx},\quad \nabla^2F_{ty}|_0=\nabla^2F_{ty} \tag{58}$$

这种处理方法，Finlayson 称之为限制性变分原理，对这种方法的数学讨论，见[6]。利用(56)、(57)式，可求得 Euler-Lagrange 方程为

$$\nabla^2F_{tt}+\beta F_{xt}-F_{yt}\nabla^2F_{xt}+F_{xt}\nabla^2F_{yt}=0 \tag{59}$$

这就是非线性涡度方程。(56)式就是对应于非线性涡度方程的 Lagrange 函数。

Whitham[3] 曾求得线性涡度方程的 Lagrange 函数，而未能求得非线性涡度方程的 Lagrange 函数，最后，他宣称对于非线性涡度方程只能用 Clesh 变换来进行研究。但可以利用上述方法求得与非线性涡度方程相对应的 Lagrange 函数。

五、结 束 语

利用(23)与(24)式，可以将 β 效应反映到运动方程中去，因之，可以得到与正压涡度方程(线性)完全相似的能量通量形式。此外，从(24)式可知，在 β 平面中，存有一个附加的 y 方向的力——$\beta\psi$，克服此力场所作之功可以用 $\beta\psi(y-y_0)$ 来表示，如取 y_0 为平衡点位置，y 为离开平衡点的位移，这样，就可以得出本文的结果。

利用相似的原理，可以求出非线性运动方程中考虑 β 效应后的位能表示式。此时附加力场是由于绝对涡度分布不均匀所引起的，而波动的位能就是克服此力所作的平均的功。利用这种物理推论，很易求得 β 平面中非线性涡度方程的 Lagrange 函数，这就使我们得到了较为深刻的物理基础。至于如何利用此 Lagrange 函数来分析与研究波动的特点，将有待于以后的进一步工作

参 考 文 献

[1] Lonqust-Higgins, M.S., On group velocity and energy in planetary wave motions, *Deep Sea Res.* 11. 35-42,1964.

[2] Buchwald, V. T., Energy and energy flux in planetary waves, *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 328, 37-48,1972.

[3] Seliger, R. L. & G. B. Whitham, Variational principles in continuum mechanics, *Proc. Rox. Soc. A*, 305,1-25,1968.

[4] Gelfand, I. M. & S. V. Fomin, Calculus of variations Prentice-Hall, Inc., 232pp.,1963.

[5] Prigogine, I., Evolution criteria, variation properties and fluctuations. Donnelly, R.J., Herman, R and Prigogine, I. eds., "Non-equilibrium Thermodynamics, variational techniques and stability", 3-16, *The Univ. Chicago Press*, 1966.

[6] Finlayson, E. A., The method of weighted residuals and variational principles. Academic Press.

412pp., 1972.

ENERGY, ENERGY FLUX AND LAGRANGIAN OF ROSSBY WAVE

Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

The energy flux derived from the barotropic vorticity equation differs from that obtained directly from the momentum equation. We re-study this problem raised in early 60's. The results show that if the momentum equation is rewritten in such a form that it contains the same conditions as that for barotropic vorticity equation, then the same energy flux form can be obtained for the waves with the constant amplitude. With this new momentum equation, the potential energy of Rossby wave is derived and the Lagrangian of the non-linear barotropic vorticity equation can be found approximately with this potential energy. This privides the physical basis for studying the dynamics of non-linear Rossby wave with the approach of variation.