

评“稳定的和不稳定的斜压行星波”的研究*

朱抱真

(中国科学院大气物理研究所)

谢义炳教授在八十年代初期,发表了关于“稳定的和不稳定的斜压行星波”的论文(以下简称H₁)^[1]。在论文引言中说到 Rossby 波和不稳定斜压波的矛盾,文中提出所谓“空间不稳定”的概念,并在结语讨论中说:这一研究的“所得结果,实质上否定了传统的斜压不稳定理论的基本观点……”。众所周知,自从四十年代,赵九章^[2]、Charney^[3]和 Eady 等开创性地提出斜压行星波理论后,几十年来继续发表的研究是极为可观的,但从未看到否定了传统的斜压不稳定理论基本观点的研究。因此 H₁ 引起人们的兴趣。然而,经过阅读,我认为这篇论文有些问题,需要讨论。

1. 关于“稳定的和不稳定的斜压行星波”的概要

H₁ 采用两层的斜压大气线性化模式,从特征值方法,讨论斜压行星波的不稳定问题。这时,扰动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi_1 + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_1, \quad H_1(3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi_2 + \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{f_0}{\Delta p} \omega_1, \quad H_1(4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_2 = \frac{\sigma \Delta p}{f_0} \omega_1. \quad H_1(5)$$

H₁ 对方程组设了下述的波动解,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A(y) \sin k(x-ct), \\ \psi_2 &= B(y) \sin k(x-ct), \\ \omega_1 &= \omega(y) \sin k(x-ct), \end{aligned} \quad H_1(6)$$

后,得到联立的常微分方程组

$$\frac{d^2 A}{dy^2} + a^2 A = -\lambda^2 B, \quad H_1(7)$$

$$\frac{d^2 B}{dy^2} + b^2 B = -\lambda^2 A, \quad H_1(8)$$

其中

$$a^2 \equiv \frac{\beta}{U_1 - c} - \frac{U_2 - c}{U_1 - c} \lambda^2 - k^2, \quad b^2 \equiv \frac{\beta}{U_2 - c} - \frac{U_1 - c}{U_2 - c} \lambda^2 - k^2. \quad H_1(9)$$

* 本文于 1983 年 12 月 9 日收到,1984 年 8 月 29 日收到修改稿。

由此,讨论了三个问题:

1) H_1 认为“当 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 时方程组 $H_1(7)-(8)$ 有波动解, 因此确定了行星波的存在范围”。又设 $U_1 - c > 0, U_2 - c < 0$ 。然后在这些假设的条件下, 讨论了斜压行星波的存在范围。得到在一般参数下, 出现波长大于 5,000 公里的行波, 又进一步求得驻波存在的条件。得出“在实际的斜压大气中, 不能存在行星驻波”。

2) H_1 为了给出“斜压行星波的表达式和空间稳定性”。将 $H_1(7)-(8)$ 化为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dy^2} + (a^2 + b^2) \frac{d^2 A}{dy^2} + (a^2 b^2 - \lambda^4) A &= 0, \\ \frac{d^2 B}{dy^2} + (a^2 + b^2) \frac{d^2 B}{dy^2} + (a^2 b^2 - \lambda^4) B &= 0. \end{aligned} \quad H_1(26)$$

令

$$A, B \sim e^{\gamma y},$$

得到特征方程

$$\gamma^4 + (a^2 + b^2) \gamma^2 + (a^2 b^2 - \lambda^4) = 0. \quad H_1(27)$$

它的两个根为

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \frac{1}{2} [-(a^2 + b^2) - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 b^2 - \lambda^4)}], \\ \gamma_2^2 &= \frac{1}{2} [-(a^2 + b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 b^2 - \lambda^4)}]. \end{aligned} \quad H_1(28)$$

然后说: “仅在 $a^2 > 0, b^2 > 0$, 即斜压行星波存在的范围内, 讨论 A, B 的解和斜压行星波的表达式。”这时 H_1 对 $a^2 b^2 - \lambda^4 \geq 0$, 给予所谓“空间稳定性”的概念。例如当 $a^2 > 0, b^2 > 0, a^2 b^2 - \lambda^4 < 0$ 时, 得到

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{\gamma_1 y} + A_2 e^{-\gamma_1 y} + A_3 \cos k_1 y + A_4 \sin k_1 y, \\ B &= B_1 e^{\gamma_1 y} + B_2 e^{-\gamma_1 y} + B_3 \cos k_1 y + B_4 \sin k_1 y. \end{aligned} \quad H_1(67)$$

这时 $\pm \gamma_1 = \gamma_1, \pm i k_1 = \gamma_1^2$, 在一端无界的 β 平面, 得到这时“斜压行星波的振幅是随 y 发散的。流场是空间不稳定的”。

3) H_1 进一步将 $H_1(28 a)$ 中的 $a^2 + b^2 - \lambda^4 \geq 0$ 展开, 并在 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 的前提下, 有时又设 $c < U_1, c > U_2$, 再确定 c 成为复数的条件, 讨论斜压行星波的时间不稳定问题。得到一个很复杂的“斜压行星波稳定性表”。认为该表的结果“实质上否定了传统的斜压不稳定讨论的基本观点”。

2. 关于“传统的斜压不稳定理论”的基本观点

为了探讨 H_1 的观点和方法, 有必要对传统的斜压不稳定理论作一简单的回顾, 以作比较。

在三十年代末期, Rossby 建立了第一个成功的大尺度扰动动力学模型以后, 气象学家集中注意研究了扰动的动力不稳定性问题。因为这正是天气预报者最关心天气系统的发展问题。人们采用的基本途径是:

1) 在地球大气中, 加热和摩擦维持的纬圈环流, 可以看作基本气流。在此基本气流上叠加一个小扰动, 而先不讨论扰动是如何产生的;

2) 在第一近似上, 把基本气流看作定常的, 也就是说求解运动方程的线性解。这样得到在给定的基本气流和一些参数下, 初始的扰动增长率。即所谓不稳定性判据;

3) 如果扰动振幅随时间增强, 这时扰动处于动力不稳定状态, 振幅将要增大。但只要在扰动增大的范围内, 还可以略掉非线性作用, 所得的解答仍可用于讨论不稳定行星波的变化。

由于方程组使用的是 β 平面近似, 这意味着模式大气的纬度范围, 是球面的一部分。因此边界条件可以假设在纬度通道宽度为 D 的南北边界上, 取刚体边界条件, 即

$$\text{在 } y=0, D \text{ 处, } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

因此对 $H_3(3)-(5)$ 的方程组设扰动解为

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Psi_1(y) e^{ik(\lambda - ct)}, \\ \psi_2 &= \Psi_2(y) e^{ik(x - ct)}. \end{aligned}$$

然后在上述边界条件下,求解特征函数 $\Psi(y)$ 和特征值 c ,这时求解的难度和基本气流的状态有关。

(1) 当基本气流与 y 无关,即 $U_1 = \text{常数}$, $U_2 = \text{常数}$,则变为解常系数常微分方程组问题。满足边界条件(1)式,对非零 k ,特征函数

$$\Psi = \Phi \cos \mu, y$$

其中

$$\mu_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi, j = 0, 1, 2, \dots$$

而 Φ 是常数。这时特征值

$$c = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) - \frac{\beta(k^2 + \mu^2 + \lambda^2)}{(k^2 + \mu^2)(k^2 + \mu^2 + 2\lambda^2)} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 \lambda^4 - (4\lambda^4 - k^4)U_1^2(k^2 + \mu^2)^2}}{(k^2 + \mu^2)(k^2 + \mu^2 + 2\lambda^2)} \quad (2)$$

这就是 Phillips(1954)的工作^[5]。

(2) 若基本气流是 y 的函数,即 $U = U(y)$,则方程组为变系数常微分方程组,这时很难求得特征函数 $\Psi(y)$ 与特征值 c 的解析解。利用著名的 Rayleigh 所引进的积分方法,可得扰动生长率 c_r 存在的必要条件:

$$\int_0^D dy \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \frac{\partial q_n}{\partial y} \frac{|\varphi_n|^2}{|U_n - c|^2} = 0 \quad (3)$$

即基本气流的位涡梯度必须在有的地方为正,有的地方为负。而扰动移速 c_r 的范围为

$$U_{\min} - \frac{\beta}{2(k^2 + \pi^2/4)} < c_r < U_{\max}. \quad (4)$$

这是 Pedlosky(1964)的研究结果^[6]。

3. 关于行星波存在范围、表达式和稳定性问题

H_3 模式大气的基本气流 U_1 和 U_2 是与 y 无关的,但和传统的斜压不稳定理论模式不同,作了几个关键性假设:

(1) 模式大气的水平范围,是“一端固定,另一端无界”的 β 平面;

(2) 当 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 时,方程组有波解;

(3) 行星波移速在中纬度地区 $c > U_2, c < U_1$; 然后讨论了斜压行星波三个方面。我们认为,前一假设影响了解的有界性;后二假设带来一些根本性的问题:

1) 关于“斜压行星波存在的范围”问题

H_3 第三节,在“斜压行星波存在的范围”的讨论中,首先认为当 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 时, $H_3(7)、(8)$ 有波动解。因此用它来确定行星波存在的范围。我们认为 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 并非 $H_3(7)-(8)$ 具有波动解的必要条件。因为 $H_3(7)、(8)$ 是对 A, B 的一个联立方程,有无波动解,并不是单独地由各自的系数 a^2 和 b^2 的性质决定的。我们可设

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{i\gamma y}, \\ B &= B_1 e^{i\gamma y}, \end{aligned}$$

代入 $H_3(7)、(8)$,可得

$$\gamma^4 - (a^2 + b^2)\gamma^2 + (a^2b^2 - \lambda^4) = 0.$$

因此

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2b^2 - \lambda^4)}].$$

波动解存在的条件应为 $\gamma^2 > 0$, 即

$$(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2b^2 - \lambda^4)} > 0. \quad (5)$$

满足上列不等式的 a^2, b^2 和 λ^2 可有多重条件, $a^2 > 0, b^2 > 0$ 并非必要条件。

H₁ 为了讨论斜压行星波存在的范围, 又进一步假设

$$c_1 < U_1, c > U_3. \quad H_2(11)$$

但在这样的假定下,

(1) 行星波只是以一定速度为范围的东移波, 而不存在任何西退的波, 这样先对行星波存在的范围作了不合观测事实的假设。

(2) 由于已经假设的前提是 $a^2 > 0, b^2 > 0$, 若再设 $c > U_3, c < U_1$, 则必有

$$c > U_3 + \frac{k^2(U_1 - U_3) - \beta}{k^2 + \lambda^2}, \quad c < U_1 - \frac{k^2(U_1 - U_3) - \beta}{k^2 + \lambda^2}$$

在超长波情况下, 上列第一个不等式又有可能和 $c > U_3$ 矛盾。

因此 H₁ 先对行星波的波速作了一些不必要也不够合理的假设。事实上已经对行星波存在的范围作了限制, 然后又企图讨论行星波存在的范围, 显然是不可能得到合理的结果。例如“在干斜压大气中一般出现波长大于 5000 公里的行星波”和“在实际的斜压大气中, 不能存在行星驻波”等等。

实际上由 Phillips 所求得的(2)式, 可得斜压性 Rossby 波移速为

$$c_r = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) - \frac{\beta(k^2 + \mu^2 + \lambda^2)}{(k^2 + \mu^2)(k^2 + \mu^2 + 2\lambda^2)}. \quad (6)$$

因此斜压行星波的移速可以向东前进, 也可以向西倒退。这符合大气观测事实。Pedlosky 所求得的移速范围更为广泛, 如上述的(4)式。

另外, 由(6)式, 我们也可以推导斜压驻波的定常波长。为简单计, 设 $\mu = 0$, 则

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{U_1 + U_3}{2\beta}} \quad (7)$$

斜压定常波可以存在, 并不需要像 H₁ 所要求的不符合实际大气情况的条件, $\lambda^2 = 0$ 。

2) 关于“斜压行星波的表达式和空间稳定性”问题

H₁ 在原文第四节说“本文仅将在 $a^2 > 0, b^2 > 0$, 即斜压行星波存在的范围内, 讨论 A 和 B 的解和斜压行星波表达式”。但如前所述, $a^2 > 0, b^2 > 0$ 并非斜压行星波存在的必要条件。

另外需要指出, H₁ 在这一节中所得出的行星波表达式, 如上列的 H₁(67) 等, 其中的 γ 都包括了未知的特征值 c 。而 H₁ 在该节中没有给出任何决定 c 的式子。因此从表面上看似乎解出了特征函数 A(y) 和 B(y), 实质上还包括未知的 c 。这时还不能说已经得到了行星波表达式, 也无法应用 $a^2b^2 - \lambda^4 \geq 0$, 这个所谓的“空间不稳定”判据, 因为 a^2 和 b^2 都是未知数 c 的函数。

H₁ 在该节最后说“本节的讨论是按理论力学和数学学习惯进行的”, 但在这里的斜压大气稳定性问题中, a^2, b^2 并非已知的参数, 而是待定值 c 的函数。H₁ 又说所得的表达式“应当理解为某时刻天气图上高低层流场, 可以用空间稳定和不稳定的斜压行星波来近似地描述”。但是在 c 未确定的情况下, 如何用这些解来描述某时刻天气图上的天气系统呢?

实际上, H₁(26) 是 4 阶方程, 在确定解的唯一性时, 要求解的有界性, 则 H₁(67) 的 $A_1 = B_1 = 0$ 。所谓“空间不稳定”的物理意义, 的确是值得讨论的。

3) 关于“斜压行星波的时间稳定性”问题

H_3 在 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 的前提下, 将 $a^2 b^2 - \lambda^4 \equiv 0$ 展开, 求得 c 为复数的条件, 讨论斜压行星波的时间不稳定问题。这时完全不管 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 时, c 只是实数的条件, 去求解 $a^2 b^2 - \lambda^4 = 0$ 成为复数的条件; 另外在求解 $a^2 b^2 - \lambda^4 \geq 0$ 中, 又加用 $c > U_1, c < U_3, c$ 只是实数的条件。并在这一节最后解释说: “ c 变为复数后, 不再能满足 $a^2 > 0, b^2 > 0, c > U_3, c < U_1$ 和小扰动假设。正如传统的斜压不稳定理论一样, 只能确定时间不稳定判据, 而不能研究不稳定发生后的变化过程”。

我们认为这样的比拟显然是不妥当的, 斜压不稳定判据正是在某一时刻, 一定的基本状态下, 初始扰动的增长率。即 c 为复数时的基本气流 U 和其它参数的组合条件。 H_3 所求得的不稳定判据, 显然是在同一初始时刻, 并列条件:

$$\begin{cases} a^2 > 0, b^2 > 0, c < U_1, c > U_3, \\ a^2 b^2 - \lambda^4 \equiv 0 \end{cases}$$

下得到的。在同一时刻, 为何能允许这两个矛盾的条件并存, c 即要求为实数, 又要求为复数呢。

因此, H_3 一文, 在 $a^2 > 0, b^2 > 0, c < U_1, c > U_3$ 和 $a^2 b^2 - \lambda^4 \equiv 0$ 共存条件下, 所给出的“斜压行星波稳定性表”(原表漏掉 $c < U_1$ 和 $c > U_3$ 的条件)是否还有意义, 成为问题。

另外, 传统的斜压不稳定理论, 并非“只能确定时间不稳定判据, 而不能确定发生后的过程。”如前所述, 当扰动发展的程度还可以忽略非线性作用时, 仍可研究不稳定发生后的变化过程。例如郭晓岚的研究^[7]。

4. 结 语

总之, 我认为在 H_3 一文中,

1) 在行星波存在的范围问题中, 由于假设了非必要条件 $a^2 > 0, b^2 > 0$, 不够合理条件 $c < U_1, c > U_3$, 已预先规定了行星波存在的范围, 结果不会合理;

2) 在行星波表达式和空间不稳定问题中, 由于假设了非必要条件 $a^2 > 0, b^2 > 0$, 也没有解出特征值 c , 因此并未得出“斜压行星波的表达式和空间稳定性判据”;

3) 在行星波时间稳定性问题中, 由于同时引用 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 和 $c > U_3, c < U_1$, 这些要求 c 只为实数, 而同时又用 $a^2 b^2 - \lambda^4 \equiv 0$, 要求 c 为复数的条件。因此所得的“斜压行星波稳定性表”成为疑问。看来不可能否定“传统的斜压不稳定理论的基本观点”。

正确的途径需要去掉 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 和 $c < U_1, c > U_3$ 这一类的假设。因为它们并非波解存在的必要条件, 并且限制了 c 只为实数。实际上, 满足本文所给出的波解存在的条件(5)式, c 并非实数而是复数。作为复平面的特征值问题, 可以求解斜压行星波的发展、移动和结构。这样在所求的解答中, 斜压行星波的结构和变化必然是统一的。例如 Phillips 求得的扰动解(2)式包括稳定的 Rossby 行波, 同时也包括在一定的基气流条件下, 通过斜压性能释放而发展的不稳定斜压波。因此, Rossby 波和斜压不稳定波共存, 可以通过两层模式的标准波型解得到, 它们并没有什么矛盾。

参 考 文 献

- [1] 谢义炳, 稳定的和不稳定的斜压行星波。气象学报, 39, 44-57, 1981。
- [2] Jaw, J. J. (赵九章), The formation of semipermanent centers of action in relation to the solenoid field, *J. Met.* **3**, 103-114, 1946。
- [3] Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Met.*, **4**, 135-163, 1947。
- [4] Eady, E. T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*, **1**, 33-52, 1949。
- [5] Phillips, N. A., Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasigeostrophic model, *Tellus*, **6**, 273-286, 1954。
- [6] Pedlosky, J., The stability of currents in the atmosphere and the oceans, Part I. *J. A. S.*, **21**, 201-219, 1964。
- [7] Kuo, H. L. (郭晓岚), The stability properties and structure of disturbance in a baroclinic atmosphere, *J. Met.* **4**, 235-243, 1953。