第 43 卷 第 4 期　　气 象 学 报　　Vol. 43, No.4
1985 年 11 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Nov., 1985

超长波尺度运动中的快速过程*

吕 克 利

（南京大学大气科学系）

在[1]中，我们曾经讨论了大尺度运动、中小尺度运动中的快速过程，指出，对大尺度运动，在时间上可以区分出静力适应过程、地转适应过程和水平无辐散适应过程三类快过程。静力适应过程最快，地转适应过程和无辐散适应过程的相对快慢程度与运动的尺度 L 相对于 Rossby 变形半径 L_0 的大小有关。当 $L>L_0$ 时，地转适应过程比无辐散适应过程快；当 $L<L_0$ 时，地转适应过程较无辐散适应过程为慢。对中尺度运动，在时间上可以区分出静力适应过程，不可压缩适应过程和准静力准不可压缩非线性过程三类快过程，地转适应过程已不存在。对浅薄的小尺度运动，在时间上可以区分出静力适应过程和准静力的非线性过程；对深厚的小尺度运动，在时间上可以区分出不可压缩适应过程和准不可压缩的非线性过程，不存在静力适应过程。

在水平尺度与 10000 公里相当的超长波尺度运动中，有哪些快过程？它们的时间尺度如何？这是本文所要讨论的问题。

1. 基 本 方 程

按[1]，描述本问题的无因次方程可写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{\tau_a}(a\vec{v}\cdot\nabla_h u)+\dfrac{1}{\tau_w}a\left(w\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{1}{2}wu\dfrac{\partial \ln\rho_s}{\partial z}\right) \\
\qquad =\dfrac{1}{\tau_i}v+\dfrac{1}{\tau_R}yv-\dfrac{P}{\rho_0VL}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{1}{\tau_a}(a\vec{v}\cdot\nabla_h v)+\dfrac{1}{\tau_w}a\left(w\dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{1}{2}wv\dfrac{\partial \ln\rho_s}{\partial z}\right), \\
\qquad =-\dfrac{1}{\tau_i}u-\dfrac{1}{\tau_R}yu-\dfrac{P}{\rho_0VL}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{\tau_a}(a\vec{v}\cdot\nabla_h w)+\dfrac{1}{\tau_w}a\left(w\dfrac{\partial w}{\partial z}-\dfrac{1}{2}w^2\dfrac{\partial \ln\rho_s}{\partial z}\right) \\
\qquad =-\dfrac{P}{\rho_0HW}\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho+\dfrac{1}{2}p\dfrac{\partial \ln\rho_s}{\partial z}\right)
\end{cases}
\tag{1}
$$

* 本文于 1982 年 7 月 20 日收到，1984 年 10 月 6 日收到最后一次修改稿。

$$
\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{\tau_a}(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h\rho)+\frac{1}{\tau_w}\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{2}w\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right) \\
\qquad +\frac{1}{\tau_a}\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\nabla_h\cdot\vec{v}=0 \\
\frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{\tau_a}(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h p)=\frac{\chi}{\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\chi}{\tau_a}(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h\rho) \\
\qquad -\frac{C_s^2\rho_0}{gP}WN^2w
\end{array}\right.
$$

式中 τ 是时间尺度，V 是水平速度尺度，W 是垂直速度尺度，L 是水平尺度，H 是高度尺度，P 是气压变化尺度，$\bar{\rho}$ 是密度变化尺度，ρ_0 是常值密度，N 是浮力频率，C_s 是绝热声速，$\tau_i=1/f_0$，是惯性振荡特征周期，$\tau_a=L/V$ 是平流特征时间尺度，$\tau_w=H/W$ 是对流特征时间尺度，$\tau_R=1/\beta L$ 是 Rossby 波的特征周期。

对 $L\gtrsim a$ 的超长波运动（a 是地球半径），显然可取[2] $P=f_0\rho_0VL$，$W=\frac{H}{L}V$，因此，$\tau_a=\tau_w$，而且对中纬度有 $\tau_i\simeq\tau_R$。利用这些关系式，方程组(1)化为

$$
\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+R_0\left(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h u-\frac{\alpha}{2}wu\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right)=v+yv-\frac{\partial p}{\partial x} \\
\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}+R_0\left(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h v-\frac{\alpha}{2}wv\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right)=-u-yu-\frac{\partial p}{\partial y} \\
\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t}+R_0(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h\rho)+\frac{\tau_i}{\tau_d}\left(\nabla\cdot\vec{v}-\frac{1}{2}w\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right)=0 \\
\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+R_0\left(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h w-\frac{\alpha}{2}w^2\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right)=-\frac{\tau_i}{\tau_{B0}}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\right. \\
\qquad \left.+\frac{1}{2}p\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right) \\
\varepsilon\frac{\partial p}{\partial t}+R_0(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h p)=\chi\left[\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t}+R_0(\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h\rho)-\frac{\tau_i}{\tau_{g0}}w\right]
\end{array}\right. \tag{2}
$$

式中 $\varepsilon=\tau_i/\tau$，$R_0=V/f_0L$，$\tau_{B0}=\tau_i(H/L)^2$，$\tau_{g0}=\frac{R}{C_P}\frac{C_m^2}{\tau_{B0}N^2C_s^2}$，$\tau_d=\tau_aR_0(L/L_0)^2$，$L_0=\tau_iC_m$，$C_m^2=RT_0$。

方程组(2)是讨论本问题的基本方程组。

2. 超长波尺度运动中的快速过程

取 $V=10^3$ 厘米秒$^{-1}$，$H=10^6$ 厘米，$f_0=10^{-4}$ 秒$^{-1}$，$\beta=10^{-13}$ 厘米$^{-1}$秒$^{-1}$，$N=10^{-2}$ 秒$^{-1}$，则对 $L\sim10000$ 公里的超长波运动，最大特征时间尺度是 τ_{g0}，方程(2)中的 τ 用 τ_{g0} 代替，并令

$$\eta_1=\frac{\tau_i}{\tau_{g0}},\quad \eta_2=\frac{\tau_{B0}}{\tau_{g0}},\quad \eta_3=\frac{\tau_d}{\tau_{g0}},\quad \eta_4=\frac{\tau_a}{\tau_{g0}}.$$

再作变换

$$\xi_1=\frac{t}{\eta_1},\quad \xi_2=\frac{t}{\eta_2},\quad \xi_3=\frac{t}{\eta_3},\quad \xi_4=\frac{t}{\eta_4}$$

代入方程(2)，略去小项，即得描述超长波运动中快过程的方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}=v+yv-\dfrac{\partial p}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \xi_1}=-u-yu-\dfrac{\partial p}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho+\dfrac{1}{2}p\dfrac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_1}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \xi_1}=\chi\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_1}\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \xi_2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \xi_2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial \xi_2}=-\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho+\dfrac{1}{2}p\dfrac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right)\\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \xi_2}=\chi\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_2}\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}v+yv-\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2mm] u+yu+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho+\dfrac{1}{2}p\dfrac{\partial \ln \rho_0}{\partial z}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_3}+\nabla.\vec{v}-\dfrac{1}{2}w\dfrac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \xi_3}=\chi\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_3}\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}v+yv-\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2mm] u+yu+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho+\dfrac{1}{2}p\dfrac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}=0\\[2mm] \nabla\cdot\vec{v}-\dfrac{1}{2}w\dfrac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \xi_4}+\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h p=\chi\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_4}+\alpha\vec{v}\cdot\nabla_h\rho\right)\end{cases} \tag{6}$$

显然，方程组(3)描述的是超长波运动中的地转适应过程，该过程是在准静力平衡下进行的；方程组(4)描述的是静力适应过程；方程组(5)描述的是向不可压缩关系的调整过

程——不可压缩适应过程，该过程是在准静力，准地转下进行的。

3. 超长波运动中快过程的时间尺度

1）静力适应过程

这时，在初始时刻非静力偏差是大的，如此可取

$$O\left(\left|\frac{\partial p}{\partial z}+\rho+\frac{1}{2}p\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right|\right)\simeq 0(1)$$

由方程组(2)的第四式，按量级一致原则[3]，即得

$$\varepsilon\frac{\tau_{B0}}{\tau_i}\sim 1$$

可见，对超长波运动，静力适应过程的时间尺度为

$$\tau=\tau_{B0}=\frac{H^2}{f_0L^2}\sim 10^{-2}\text{秒}$$

显然，这是一种进行得极迅速的快过程。

2）地转适应过程

在这种情况下，初始时刻存在着强烈的非地转，即可取

$$0\left(\left|v+yv-\frac{\partial p}{\partial x}\right|\right)\simeq 0(1)$$

$$0\left(\left|u+yu+\frac{\partial p}{\partial z}\right|\right)\simeq 0(1)$$

对超长波运动，$R_0\simeq 10^{-2}$，因此，由(2)的第一、二两式，对地转适应过程有

$$\varepsilon\sim 1$$

这样，超长波运动中的地转适应过程的时间尺度为

$$\tau=\frac{1}{f_0}\sim 10^4\text{秒}$$

3）不可压缩适应过程

这时可取

$$0\left(\left|\nabla\cdot\vec{v}+\frac{1}{2}w\frac{\partial \ln \rho_s}{\partial z}\right|\right)\simeq 0(1)$$

如此，由(2)的第三个方程可得

$$\varepsilon\frac{\tau_d}{\tau_i}\sim 1$$

因此，超长波运动中向不可压缩关系调整过程的时间尺度为

$$\tau=\tau_d\sim 10^5\text{秒}$$

显见，不可压缩适应过程比地转适应过程为慢，这由方程(5)也不难看出。

对准地转演变过程，由(2)取

$$\varepsilon\sim R_0$$

得超长波运动中的演变过程的时间尺度为

$$\tau\sim 10^6\text{秒}$$

可见，不可压缩适应过程仍比超长波的演变过程为快，因此它是超长波运动中的一种快过

程。

由此可见，对超长波运动，从时间上可以区分出静力适应，地转适应和不可压缩适应三类快过程。静力适应过程最快，地转适应过程次之，不可压适应过程最慢。比较超长波运动和大尺度运动中的快过程可以看出，随着水平运动尺度由千公里向万公里的转变，它们的快过程发生了重大变化。大尺度运动所具有的向水平无辐散关系的调整过程，在超长波运动中不再存在，转变为向不可压缩关系的调整过程，可见，对超长波运动不能用水平无辐散关系，这一点 Burger[2]早就指出过。向水平无辐散关系的调整过程是水平尺度为千公里的大尺度运动所特有的快过程，就是说，大尺度运动的一个重要的动力学特性是它具有水平无辐散适应过程，这一过程是其它尺度的大气运动所没有的，这一点与通常所说的大尺度运动的一个重要动力学特性是散度的量级比涡度的量级小相一致的[4]。

由于超长波运动存在着快速的向不可压关系的调整过程，因此，只讨论超长波演变过程时，可以用不可压近似(其精度远比地转近似为低)，当考察超长波的整个运动过程时，必须考虑大气的可压缩性。浅水波方程不能用来描述超长波运动的快过程，对长波运动，浅水波方程可用来描述其快过程(静力适应过程这时已假设为无限迅速)和演变过程。

参 考 文 献

[1] 吕克利，大气运动中的快速过程，气象学报，42，2，157—167，1984。
[2] Burger, A., Scale considerations of Planetary motions of the atmosphere, *Tellus*, 10, 195—205, 1958.
[3] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，科学出版社，1979。
[4] 小仓義光，最近的気象力学(I)，気象研究，一卜，第17卷，1966。