

## 旋转大气中有限振幅扰动波包与基本气流的 非线性共振相互作用\*

李 贤 琅

(成都气象学院)

### 提 要

本文应用多重尺度法研究了在旋转球面上正压大气中有限振幅扰动波包与纬向基本气流的非线性共振相互作用。首先,导出了同时包含色散效应和耗散效应的三波共振非线性耦合方程。然后,在零耗散极限和无规相位近似下,求得了不同模态波包的三波共振非线性耦合方程。并着重讨论了有限振幅扰动波包与纬向基本气流之间的能量输运过程。结果表明,在旋转球面上正压大气中的有限振幅扰动波包通过非线性共振相互作用能够激发出纬向基本气流,而且其能量最终都要输运给纬向基本气流,直至大气运动成为完全的带状环流为止。从而阐明了非线性共振相互作用是大气旋转适应过程的重要物理机制。

### 一、引 言

在大气波动相互作用的研究中,大尺度扰动或多或少可以作为波包来考虑<sup>[1]</sup>。尤其在考察波动之间的能量输运过程时,波包表示法更是一个有力的工具<sup>[2]</sup>。需要强调指出的是,由于波矢群的频谱具有有限带宽(finite bandwidth),因此波包的性质和输运特性将与单个波矢有很大的不同;而且由于波包表示了某种统计平均,因而对耗散效应的考虑也是必不可少的。

本文在文献[3]的基础上进一步考察旋转大气中分属不同模态的多个波矢或波矢群之间的非线性相互作用。为了避免数学处理的过分复杂化,我们在引入耗散项以后将取零耗散极限;并在无规相位近似下进行波包平均。

### 二、耗 散 效 应

引入耗散项后,无量纲位涡方程可表为下式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp}^2 \psi + J(\psi, \nabla_{\perp}^2 \psi) + 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla_{\perp}^4 \psi \quad (1)$$

\* 本文于 1985 年 4 月 10 日收到,1985 年 5 月 30 日收到修改稿。

其中  $\Re = \frac{a^2 \Omega}{\mu}$ ,  $\mu$  为水平耗散系数。其余符号同文献[3]。

将流函数用球面谐函数展开后, 利用纬向波数的共振约束条件

$$m_\beta + m_\gamma = m_\alpha \quad (2)$$

可得如下三波组方程:

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_\alpha - \left( i \frac{2m_\alpha}{A_\alpha} - \frac{A_\alpha}{\Re} \right) \bar{\Psi}_\alpha = \frac{i}{2} \frac{A_\beta - A_\gamma}{A_\alpha} S_\alpha \bar{\Psi}_\beta \bar{\Psi}_\gamma \quad (3a)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_\beta - \left( i \frac{2m_\beta}{A_\beta} - \frac{A_\beta}{\Re} \right) \bar{\Psi}_\beta = \frac{i}{2} \frac{A_\gamma - A_\alpha}{A_\beta} S_\beta \bar{\Psi}_\gamma^* \bar{\Psi}_\alpha \quad (3b)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_\gamma - \left( i \frac{2m_\gamma}{A_\gamma} - \frac{A_\gamma}{\Re} \right) \bar{\Psi}_\gamma = \frac{i}{2} \frac{A_\alpha - A_\beta}{A_\gamma} S_\gamma \bar{\Psi}_\alpha \bar{\Psi}_\beta^* \quad (3c)$$

应用多重尺度法

$$t = t, \quad T = \varepsilon t; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}$$

利用  $\varepsilon$  的一阶方程, 得色散关系

$$\sigma_k = -\frac{2m_k}{l_k(l_k+1)} - i \frac{l_k(l_k+1)}{\Re}, \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (4)$$

显然, 考虑耗散效应后, 波频为复数形式。令

$$\sigma_k = \sigma_{rk} + i\sigma_{ik}, \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (5a)$$

则  $\text{Re}$ :

$$\sigma_{rk} = -\frac{2m_k}{l_k(l_k+1)}, \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (5b)$$

即为文献[3]的(无耗散)色散关系。

$$\text{而 } I_m: \quad \sigma_{ik} = -\frac{l_k(l_k+1)}{\Re}, \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (5c)$$

由球面谐函数的性质,  $\sigma_{ik}$  总是负的, 因而将给出波动的指数衰减。这是耗散效应的重要特征之一。

平行于 Pedlosky 在  $\beta$  平面上的讨论<sup>[4]</sup>, 我们可以设衰减的时间尺度与慢时间尺度相当, 即耗散力与非线性相对加速度相比是不可忽略的, 则有:

$$\bar{\Psi}_k(t) = \varepsilon C_k(T) e^{\sigma_{ik} T} e^{-i\sigma_{rk} t}, \quad k = \alpha, \beta, \gamma \quad (6)$$

当三波组各模态波矢的频率满足共振条件

$$\sigma_{r\beta} + \sigma_{r\gamma} = \sigma_{r\alpha} \quad (7a)$$

$$\sigma_{i\beta} + \sigma_{i\gamma} = \sigma_{i\alpha} \quad (7b)$$

时, 利用  $\varepsilon$  的二阶方程, 可得关于振幅的非线性耦合方程。它描述了旋转正压大气中色散效应和耗散效应同非线性共振的耦合作用:

$$\frac{\partial}{\partial T} C_\alpha(T) + \sigma_{i\alpha} C_\alpha(T) = \frac{i}{2} \frac{A_\beta - A_\gamma}{A_\alpha} S_\alpha C_\beta(T) C_\gamma(T) \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} C_\beta(T) + \sigma_{i\beta} C_\beta(T) = \frac{i}{2} \frac{A_\gamma - A_\alpha}{A_\beta} S_\beta C_\gamma^*(\tau) C_\alpha(T) \quad (8b)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} C_\gamma(T) + \sigma_{i\gamma} C_\gamma(T) = \frac{i}{2} \frac{A_\alpha - A_\beta}{A_\gamma} S_\gamma C_\alpha(T) C_\beta^*(\tau) \quad (8c)$$

这个结果与 Pedlosky 在  $\beta$  平面上给出的结果是一致的<sup>[4]</sup>。在此不再作过多的讨论。

### 三 基 本 方 程

当我们进一步考察旋转大气中分属不同模态的多个波矢或波矢群之间的非线性相互作用时,耦合方程必须对多个波矢求和,即:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \bar{\psi}_K - \left( i \frac{2m_K}{A_K} - \frac{A_K}{\mathcal{R}} \right) \bar{\psi}_K \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K'} \sum_{K''} \frac{A_{K'} - A_{K''}}{A_K} \bar{\psi}_{K'} \bar{\psi}_{K''} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_K^* J(Y_{K'}, Y_{K''}) \end{aligned} \quad (1')$$

其中  $K = (l_K, m_K)$

我们用哑变量  $K$  写出约束条件

$$m_{K'} + m_{K''} = m_K \quad (A_{K'} \neq A_{K''} \neq A_K) \quad (2')$$

则方程(3)可表为

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}_K - \left( i \frac{2m_K}{A_K} - \frac{A_K}{\mathcal{R}} \right) \bar{\psi}_K = i \sum_{m_K = m_{K'} + m_{K''}} B_K(K', K'') \bar{\psi}_{K'} \bar{\psi}_{K''} \quad (3')$$

$$\text{其中 } B_K(K', K'') = \frac{1}{i} \frac{A_{K'} - A_{K''}}{2A_K} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_K^* J(Y_{K'}, Y_{K''})$$

前已指出,由于波矢群的频谱具有有限带宽,波矢之间的共振相互作用不再保持相干性。因而必须容许频率失谐,即

$$\Delta\sigma_{rK} \triangleq \sigma_{rK} - (\sigma_{rK'} + \sigma_{rK''}) \neq 0, \quad |\Delta\sigma_{rK}| \ll |\sigma_{rK}| \quad (7a)'$$

$$\Delta\sigma_{iK} \triangleq \sigma_{iK} - (\sigma_{iK'} + \sigma_{iK''}) \neq 0, \quad |\Delta\sigma_{iK}| \ll |\sigma_{iK}| \quad (7b)'$$

非线性耦合方程可表为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} C_K(T) + \sigma_{iK} C_K(T) \\ &= i \sum_{m_K = m_{K'} + m_{K''}} B_K(K', K'') C_{K'}(T) C_{K''}(T) e^{-\Delta\sigma_{iK} T} e^{i\Delta\sigma_{rK} t} \end{aligned} \quad (8')$$

引入归一化复值振幅  $A_K = C_K |B_K(K', K'')|^{-\frac{1}{2}}$

则有

$$\frac{\partial}{\partial T} A_K + \sigma_{iK} A_K = i \sum_{m_K = m_{K'} + m_{K''}} G_K(K', K'') A_{K'} A_{K''} e^{-\Delta\sigma_{iK} T} e^{i\Delta\sigma_{rK} t} \quad (9)$$

其中  $G_K(K', K'') = |B_K(K', K'') B_{K'}(K'', K) B_{K''}(K, K')|^{\frac{1}{2}}$

将哑变量  $K$  作  $K_0, K_1, K_2$  的循环置换,即得关于振幅的耦合方程:

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_0} + \sigma_{iK_0} A_{K_0} = i \sum_{m_{K_0} = m_{K_1} - m_{K_2}} G_{K_0}(K', K'') A_{K_1} A_{K_2} e^{-\Delta\sigma_{iK_0} T} e^{i\Delta\sigma_{rK_0} t} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_1} + \sigma_{iK_1} A_{K_1} = i \sum_{m_{K_1} = m_{K_0} - m_{K_2}} G_{K_1}(K'', K) A_{K_0}^* A_{K_2} e^{\Delta\sigma_{iK_1} T} e^{-i\Delta\sigma_{rK_1} t} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_2} + \sigma_{iK_2} A_{K_2} = i \sum_{m_{K_2} = m_{K_0} - m_{K_1}} G_{K_2}(K, K') A_{K_0}^* A_{K_1} e^{\Delta\sigma_{iK_2} T} e^{-i\Delta\sigma_{rK_2} t} \quad (10c)$$

其中  $K^* = (l_K, -m_K)$ 。由球面谐函数的性质可知

$$A_{K^*} = A_K^* \quad (11)$$

而  $\Delta\sigma_{iK_j}$  和  $\Delta\sigma_{rK_j}$  ( $j=0, 1, 2$ ) 则是频率失谐值, 即

$$\Delta\sigma_{iK_0} = \sigma_{iK_0} - \sigma_{iK'_0} - \sigma_{iK''_0}; \Delta\sigma_{rK_0} = \sigma_{rK_0} - \sigma_{rK'_0} - \sigma_{rK''_0} \quad (12a)$$

$$\Delta\sigma_{iK_1} = \sigma_{iK_1} - \sigma_{iK'_1} - \sigma_{iK''_1}; \Delta\sigma_{rK_1} = \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK'_1} - \sigma_{rK''_1} \quad (12b)$$

$$\Delta\sigma_{iK_2} = \sigma_{iK_2} - \sigma_{iK'_2} - \sigma_{iK''_2}; \Delta\sigma_{rK_2} = \sigma_{rK_2} - \sigma_{rK'_2} - \sigma_{rK''_2} \quad (12c)$$

我们进一步取零耗散极限, 即令  $\mu \rightarrow 0^+$ 。则耗散波频失谐值也趋于零, 波频变化将接近于无耗散时的快时间变化形式。本文将保留波频中的无穷小虚部以使格林函数具有“因果性”<sup>[7]</sup>, 从而有别于无耗散运动。于是可得:

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_0} = i \sum_{m_{K_0} = m_{K'_0} + m_{K''_0}} G_{K_0}(K', K'') A_{K'} A_{K''} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_0} - i0^+)t} \quad (13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_1} = i \sum_{m_{K_1} = m_K - m_{K'_1}} G_{K_1}(K'', K) A_{K''}^* A_K e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i0^+)t} \quad (13b)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} A_{K_2} = i \sum_{m_{K_2} = m_K - m_{K'_2}} G_{K_2}(K, K'^*) A_K A_{K'}^* e^{-i(\Delta\sigma_{rK_2} + i0^+)t} \quad (13c)$$

耦合方程(13)描述了各模态归一化复值振幅  $A_K$  随慢时间  $T$  的变化。由于方程的右端是对满足约束条件(2)'的所有波矢求和, 因而考察单波矢的振幅已经没有价值。我们取无规相位近似(random phase approximation), 即认为波矢的相位随机分布于波包的所有组元, 因而具有各态历经性。于是可记波包的统计平均为:

$$\langle A_K \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |A_K(T)| e^{i\varphi_K(t)} dt$$

上式中  $\varphi_K(t)$  表示  $A_K(T)$  的相位, 而与慢时间尺度  $T$  相比, 相位将是迅速变化的。对统计独立的两振幅乘积的波包平均, 有:

$$\langle A_{K'} A_{K''}^* \rangle = \langle |A_{K'}|^2 \rangle \delta_{K', K''} \quad (14)$$

(14)式称为无规相位近似关系式<sup>[5]</sup>。

由于存在两个相差很大的时间尺度  $t$  和  $T$ , 我们应用投影算子技术将方程(13)约化(reductive perturbation method), 先得到最低阶的  $A_K$ :

$$A_{K_0} \approx \sum_{m_{K_0} = m_{K'_0} + m_{K''_0}} \frac{G_{K_0}(K', K'')}{\Delta\sigma_{rK_0} - i0^+} A_{K'}^{(0)} A_{K''}^{(0)} e^{i(\Delta\sigma_{rK_0} - i0^+)t} \quad (15a)$$

$$A_{K_1} \approx - \sum_{m_{K_1} = m_K - m_{K'_1}} \frac{C_{K_1}(K'', K)}{\Delta\sigma_{rK_1} + i0^+} A_{K''}^{(0)*} A_K^{(0)} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i0^+)t} \quad (15b)$$

$$A_{K_2} \approx - \sum_{m_{K_2} = m_K - m_{K'_2}} \frac{G_{K_2}(K, K'^*)}{\Delta\sigma_{rK_2} + i0^+} A_K^{(0)} A_{K'}^{(0)*} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_2} + i0^+)t} \quad (15c)$$

同时又用  $A_{K_1}^*$  乘以方程(13b), 再加上  $A_{K_1}$  乘以(13b)的复共轭方程, 并取波包平均, 可得:

$$\frac{\partial}{\partial T} \langle |A_{K_1}|^2 \rangle = i \sum_{m_{K_1} = m_{K_0} - m_{K_2}} G_{K_1}(K_2^*, K_0) \langle A_{K_1}^* A_{K_2}^* A_{K_0} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i0^+)t} \rangle + C.C. \quad (16)$$

其中记号 C.C. 表示对应的复共轭项。而且由于取波包平均, 表达式中的哑变量  $K, K''$  已

经直接写为  $K_0$  和  $K_2$ 。

注意到对三重乘积的波包平均有:

$$\langle A_K, A_{K''}, A_K \rangle = \langle A_K, A_{K''}^{(0)*} A_K^{(0)} \rangle + \langle A_{K''}^{(0)*} A_{K''} A_K^{(0)} \rangle + \langle A_K^{(0)*} A_{K''} A_K \rangle \quad (17)$$

代入方程(16)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \langle |A_{K_1}|^2 \rangle = & i \sum_{m_{K_1}=m_{K_0}-m_{K_2}} G_{K_1}(K_2^*, K_0) \{ \langle A_{K_1}^* A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i\sigma^*)t} \rangle \\ & + \langle A_{K_1}^{(0)*} A_{K_2}^* A_{K_0}^{(0)} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i\sigma^*)t} \rangle + \langle A_{K_1}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0} e^{-i(\Delta\sigma_{rK_1} + i\sigma^*)t} \rangle \} \\ & + \text{C.C.} \end{aligned} \quad (18)$$

将(15)式代入(18)式,可消去波包平均中的  $e$  指数部分。我们考察方程(18)中的第一共轭时,即

$$\begin{aligned} a_1 \triangleq & i \sum_{m_{K_1}=m_{K_0}-m_{K_2}} G_{K_1}(K_2^*, K_0) \left[ - \sum_{m_{K_1}=m_{K_0}-m_{K_2}} \frac{G_{K_1}(K_2^*, K_0)}{\Delta\sigma_{rK_1} - i0^+} \times \right. \\ & \left. \times \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle \right] + \text{C.C.} \end{aligned} \quad (19)$$

对四重乘积的波包平均,由于各模态的最低阶次相互统计独立,有

$$\begin{aligned} \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle = & \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)*} \rangle \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle \\ & + \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} \rangle \langle A_{K_0}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle \\ & + \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle \langle A_{K_0}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

注意到(11)式及(14)式,则有:

$$\begin{aligned} \langle A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)*} A_{K_2}^{(0)*} A_{K_0}^{(0)} \rangle = & \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_2, K_0} \langle |A_{K_0}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_0, K_2} \\ & + \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_2, K_2} \langle |A_{K_0}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_0, K_0} \\ & + \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_2, K_0} \langle |A_{K_0}^{(0)}|^2 \rangle \delta_{K_0, K_2}^* \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式右端第一项只有当  $K_2 = K_0$  时才有非零值,这相当于  $m_{K_2} = m_{K_0}$ , 即有  $m_{K_1} = 0$ 。注意到我们已取波包平均,因而模态  $K_1$  正是纬向基本气流。本文将就这一情形进行专题讨论。(21)式右端第二项即为  $\langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle^2$ , 表示纬向波数为  $m_{K_2} (=m_{K_0})$  的有限振幅扰动波包的贡献。(21)式右端第三项在我们的问题中没有贡献。对(19)式中对应的复共轭项中的四重乘积,有完全相同的结果。

对方程(18)中的第二、第三共轭对可以作类似的讨论。在讨论过程中,注意到

$$|G_{K_0}(K_1, K_2)|^2 = |G_{K_1}(K_2^*, K_0)|^2 = |G_{K_2}(K_0, K_1^*)|^2 \equiv G^2$$

$$\Delta\sigma_{rK_0} = \Delta\sigma_{rK_1} = \Delta\sigma_{rK_2} \equiv \sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}$$

再回顾(1)'式,注意到求和号

$$\sum_{m_K = m_{K'} + m_{K''}} (\cdot) \Longleftrightarrow \sum_{K_1, K_2} \delta_{m_K, m_{K'} + m_{K''}} (\cdot)$$

我们可以设纬向波数谱为连续谱,此时求和号演变为积分而同时有 Kronecker  $\delta$ -记号演变为 Dirac  $\delta$ -函数。利用主值积分关系式<sup>[7]</sup>,

$$\frac{1}{\Delta\sigma_r \mp i0^+} = \text{P. v.} \frac{1}{\Delta\sigma_r} \pm i\pi\delta(\Delta\sigma_r), \text{ 其中 P. v. 为主值记号, 从而各共轭对最终表为:}$$

$$a_1 = 4\pi \iint dm_K d\sigma_r \delta(m_{K_0} - m_{K_1} - m_{K_2}) \delta(\sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}) \times \\ \times G^2 \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle^2 \quad (22a)$$

$$a_2 = 2\pi \iint dm_K d\sigma_r \delta(m_{K_0} - m_{K_1} - m_{K_2}) \delta(\sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}) \times \\ \times G^2 \langle |A_{K_1}^{(0)}|^2 \rangle \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle \quad (22b)$$

$$a_3 = -2\pi \iint dm_K d\sigma_r \delta(m_{K_0} - m_{K_1} - m_{K_2}) \delta(\sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}) \times \\ \times G^2 \langle |A_{K_1}^{(0)}|^2 \rangle \langle |A_{K_2}^{(0)}|^2 \rangle \quad (22c)$$

将(22)式代入方程(18), 由于快时间变量  $t$  已被消去, 因而可以去掉上标(0)而考察慢过程, 于是得:

$$\frac{\partial}{\partial T} \langle |A_{K_1}|^2 \rangle = 4\pi \iint dm_K d\sigma_r \delta(m_{K_0} - m_{K_1} - m_{K_2}) \delta(\sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}) \times \\ \times G^2 \langle |A_{K_2}|^2 \rangle^2 \quad (23a)$$

用同样的步骤, 可得

$$\frac{\partial}{\partial T} \langle |A_{K_2}|^2 \rangle = -4\pi \iint dm_K d\sigma_r \delta(m_{K_0} - m_{K_1} - m_{K_2}) \delta(\sigma_{rK_0} - \sigma_{rK_1} - \sigma_{rK_2}) \times \\ \times G^2 \langle |A_{K_1}|^2 \rangle^2 \quad (23b)$$

而有关  $\langle |A_{K_0}|^2 \rangle$  的方程则与(23b)完全等价。

由于方程(23)右端的  $\delta$ -函数关系, 要有非平凡解, 必需满足

$$m_{K_0} = m_{K_1} + m_{K_2} \quad (24a)$$

$$\sigma_{rK_0} = \sigma_{rK_1} + \sigma_{rK_2} \quad (24b)$$

(24)式正是共振约束条件。在共振约束条件下, 利用  $\delta$ -函数的性质, 容易求出方程(23)右方的积分。再注意到  $|A_K|^2$  正比于能量, 且  $\langle |A_K|^2 \rangle$  是能谱密度函数形式, 故  $\langle |A_K|^2 \rangle$  表示某一模态波包所携带的平均功率, 我们记

$$W_K \triangleq \langle |A_K|^2 \rangle$$

注意到无规相位近似下波包中各波矢相位的各态历经性,  $W_K$  也可视为某一模态波包的能量均值。因而最终可得

$$\frac{\partial}{\partial T} W_{K_1} = 4\pi G^2 W_{K_2}^2 \quad (25a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} W_{K_2} = -4\pi G^2 W_{K_1}^2 \quad (25b)$$

方程(25)即为有限振幅扰动波包与纬向基本气流之间的非线性共振耦合方程。

#### 四、讨论与结论

1. 耦合方程(25)描述了非线性共振激发过程中有限振幅扰动波包与纬向基本气流平均功率的时间变化。将(25a)与(25b)相加, 得守恒律

$$\frac{\partial}{\partial T} (W_{K_1} + W_{K_2}) = 0 \quad (26)$$

其物理意义为,在非线形共振激发过程中,共振系统的总的平均功率守恒,记为

$$C_w \triangleq W_{\kappa_1} + W_{\kappa_2} \quad (27)$$

2. 设初始条件为

$$W_{\kappa_1}(0) = C_w - W_{\kappa_2}(0), W_{\kappa_2}(0) = W_{\kappa_1}(0)$$

由于方程(25 b)为 Riccati 方程的特例,容易求得方程(25)的解为

$$\begin{cases} W_{\kappa_1}(T) = C_w - \frac{W_{\kappa_1}(0)}{1 + 4\pi G^2 W_{\kappa_1}(0)T} \\ W_{\kappa_2}(T) = \frac{W_{\kappa_1}(0)}{1 + 4\pi G^2 W_{\kappa_1}(0)T} \end{cases} \quad (28)$$

以下分两种情况进行讨论:

(i)  $W_{\kappa_1}(0) = 0, W_{\kappa_2}(0) = C_w$

即开始时只有有限振幅扰动波包。则有

$$\begin{cases} W_{\kappa_1}(T) = C_w - \frac{C_w}{1 + 4\pi G^2 C_w T} \\ W_{\kappa_2}(T) = \frac{C_w}{1 + 4\pi G^2 C_w T} \end{cases} \quad (29)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,有  $W_{\kappa_1}(\infty) = C_w, W_{\kappa_2}(\infty) = 0$

(ii)  $W_{\kappa_1}(0) = C_w, W_{\kappa_2}(0) = 0$

即开始时只有纬向基本气流。则有

$$\begin{cases} W_{\kappa_1}(T) \equiv C_w \\ W_{\kappa_2}(T) \equiv 0 \end{cases} \quad (30)$$

由(29)式和(30)式可知,有限振幅扰动波包可以通过非线性共振相互作用激发出纬向基本气流,而且其能量最终都要输送给纬向基本气流,直至大气运动成为完全的带状环流为止。当只存在纬向基本气流时,则纬向基本气流将继续维持。这个重要结果是与曾庆存的工作一致的<sup>[2]</sup>。因此可以认为,非线性共振相互作用是大气旋转适应过程的重要物理机制。

3. 需要着重指出的是,上述结论是基于零耗散极限和无规相位近似而推出的。在耗散结构理论中,将不排除波包中某一单波矢的实际功率有可能显著偏离波包均值。这种功率涨落(power fluctuation)可以导致系统在临界区域呈现相干特性(coherency)<sup>[6]</sup>,从而使单波矢甚至返回初态。这种现象的一个最简单的模型我们已在文献[3]中讨论过,进一步的研究将另文给出。

### 参 考 文 献

- [1] Lu Peisheng and Qingcun, Zeng, On the evolution process of disturbances in the barotropic atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 5, 1-8, 1981.
- [2] Zeng Qingcun, On the evolution and interaction of disturbances and zonal flow in rotating barotropic atmosphere, *J. Met. Soc. Jap.* 1, Ser. 11, 24-31, 1982.
- [3] 李贤琅, 旋转球面上行星波的共振相互作用, 大气科学, 第8卷, 第4期, 362-372页, 1984.
- [4] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, (2nd printing), Springer-Verlag, New York, 225-227, 1982.
- [5] Marcuse, D., *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press, 1974.
- [6] Nicolis, G. and I. Prigoging, *Self-organization in nonequilibrium systems*, 1977.

[7] Боголюбов, Н. Н. и Д. В. Ширков, Введение в Теорию Квантованных Лолей, ГИТТЛ. 1957, 中译本, 科学出版社, 83 页, 1966.

## NONLINEAR RESONANCE INTERACTION BETWEEN A FINITE-AMPLITUDE DISTURBANCE WAVE ENSEMBLE AND THE ZONAL MEAN FLOW IN ROTATING BAROTROPIC ATMOSPHERE

Li Xianlang

(Chengdu Institute of Meteorology)

### Abstract

The nonlinear resonance interaction between a finite-amplitude disturbance wave ensemble and the zonal mean flow in rotating barotropic atmosphere is studied by multiple-time-scale analysis. The nonlinear triad coupling equation with dispersion and dissipation is given. The nonlinear coupling equation between wave ensembles with three modes is derived by the random phase approximation and the zero dissipation limit. The energy transfer process between finite-amplitude disturbance wave ensemble and zonal mean flow is described.

The solution of coupling equation reveals that the finite-amplitude disturbance wave ensemble can be completely transferred into the zonal mean flow by nonlinear resonance interaction in rotating barotropic atmosphere. The energy transfer process would continue until the motion become pure zonal flow. It also reveals that the nonlinear resonance interaction is an important mechanism for the rotative adjustment.