

湿总位能达极小值时的大气特征*

吴宝俊 任 华 傅冠湘

(国家气象局气象科学研究院) (湖南气象学校)

总位能达极小值时大气特征的研究, 在有效能量理论和方法中占有重要地位。早在 1956 年, 范·米根 (Van Mieghem, J.) 就利用极值定理得出了干总位能达极小值时的大气特征^[1]; 不久, 他又用变分法得出了相同的结果^[2,3]。但对于潮湿大气的总位能 (湿总位能), 尚无人进行过研究。

本文从湿总位能一阶导数等于零与二阶导数大于零入手, 给出了湿总位能达极小值时大气的特征及其近似确定方法。

1. $\frac{d}{dt}(\text{MTE})_0 = 0$ 的条件

如果把整个大气的内能、位能、潜热能之和称湿总位能, 并用 $(\text{MTE})_0$ 表示^[4,5], 则有:

$$(\text{MTE})_0 = \int_M (C_v T + \phi + Lq) dm \quad (1)$$

$\phi (=gz)$ 表示单位质量气块重力位势, M 表示整个大气质量, 余为惯用符号。若取 M 为常数时, 则 (x, y, z) 坐标中 $(\text{MTE})_0$ 的个别变率为:

$$\frac{d}{dt}(\text{MTE})_0 = \int_M \left\{ C_v \frac{dT}{dt} + L \frac{dq}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \right\} dm \quad (2)$$

当把热力学第一定律用于湿空气时, 有两种处理方法: (i) 把湿空气作为单元单相系统, 系统内凝结潜热作为外热源; (ii) 作为多元复相系统, 把潜热作为内能的一部分^[6]。本文采取后一种方法, 因它似乎更符合大气的实际情况。若引入 $\mathbf{W}$ 表示来自系统以外的热通量密度, 则:

$$\rho \frac{\delta Q}{\delta t} = -\text{div } \mathbf{W} = \rho C_v \frac{dT}{dt} + \rho L \frac{dq}{dt} + p \text{div } \mathbf{V} \quad (3)$$

(3) 代入 (2), 经过适当的变换并利用高斯定理得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{MTE})_0 = & \iiint_V (\rho \nabla \phi + \nabla p) \cdot \mathbf{V} d\tau \\ & - \iint_{\sigma} (W_N + p v_N) d\sigma \end{aligned} \quad (4)$$

* 本文于 1983 年 6 月 23 日收到, 1984 年 5 月 3 日收到修改稿。

τ 表示大气体积; W_N 与 v_N 分别表示 $\mathbf{W}$ 与 $\mathbf{V}$ 在边界处的外法向分量; 右端第二项中 p 表示边界处气压。

(4) 式表明, 若 $\oint_{\sigma} (W_N + p v_N) d\sigma = 0$ 以及 $\nabla p = -\rho \nabla \phi$, 则 $(\text{MTE})_0$ 取极值。前者表示整个大气为力学与热力学上的孤立系统^[1,7], 后者表示等位势面上所有热力学变量皆为常数^[3]。

2. $\frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 > 0$ 的条件

把(4)式各项对 t 求导数, 利用 $\oint_{\sigma} (W_N + p v_N) d\sigma = 0$ 与 $\nabla p = -\rho \nabla \phi$ 以及连续方程得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 = & \int \int \int_{\tau} \{ [(\mathbf{V} \cdot \rho \nabla) \nabla \phi + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p] \cdot \mathbf{V} \} d\tau \\ & + \int \int \int_{\tau} \left\{ \left[\nabla \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p (\text{div } \mathbf{V}) \right] \cdot \mathbf{V} \right\} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式可再进一步变换为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 = & \int \int \int_{\tau} \left[-(\mathbf{V} \cdot \nabla \phi \mathbf{V} \cdot \nabla \rho) + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla p - \frac{\partial p}{\partial t} \right) \text{div } \mathbf{V} \right] d\tau \\ & + \oint_{\sigma} v_N \frac{\partial p}{\partial t} d\sigma \end{aligned} \quad (6)$$

为继续化简(6)式, 必须采取有效能量理论中的传统方法, 即假定 $\nabla p = -\rho \nabla \phi$ 状态是在质量守恒与绝热过程制约下达到的。对于绝热条件, 下面分两种情形讨论。

1) 空气未饱和

这时可认为受干绝热方程制约, 即:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + c^2 \rho \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (7)$$

c 表示拉普拉斯声速。

利用位温 θ 表达式得:

$$\frac{\rho \nabla \theta}{\theta} = -\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \nabla p \quad (8)$$

(7)、(8) 代入(6), 再考虑到大气中(6)式右端最后一项等于零^[1], 得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 = & \int \int \int_{\tau} \left\{ \left[\left(\frac{\mathbf{V} \cdot \nabla \theta}{\theta} \right) (\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) \right] \rho \right\} d\tau \\ & + \int \int \int_{\tau} \left\{ \frac{1}{c^2} (c^2 \text{div } \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \phi)^2 \rho \right\} d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\nabla p = -\rho \nabla \phi$ 时, 位温只可能是高度与时间的函数, 所以(9)式又可化简为:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 = \int \int \int_{\tau} \left\{ \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} w^2 + \frac{1}{c^2} (c^2 \text{div } \mathbf{V} - g w)^2 \right\} \rho d\tau \quad (10)$$

ω 表示 (x, y, z) 坐标中铅直速度。

(10)式表明,在未饱和的情况下,当 $\partial\theta/\partial z > 0$ 时, $(\text{MTE})_0$ 达极小值。

2) 饱和并产生凝结

这时我们取位相当温度 (θ_e^*) 守恒近似描述绝热过程,类似于(7)、(8)式有:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + c^2 \frac{L\rho}{c_p T} \frac{dq}{dt} \simeq 0 \quad (11)$$

$$\rho \frac{\nabla \theta_e^*}{\theta_e^*} \simeq -\nabla \rho + \frac{L\rho}{c_p T} \nabla q + \frac{1}{c^2} \nabla p \quad (12)$$

近年来很多人研究过暴雨区中 $\partial q/\partial t$ 对 dq/dt 的贡献 ($-dq/dt$ 可近似看作比凝结率)。二宫洗三与秋山孝子认为^[8], 在暴雨区中空气已经达到饱和, 不会再有水汽增加, $\partial q/\partial t \simeq 0$ 。如果把该结论用于本文, 则(11)式化简为:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + c^2 \frac{L\rho}{c_p T} \mathbf{V} \cdot \nabla q \simeq 0 \quad (13)$$

(12)、(13)代入(6), 记住大气中(6)式右端最后一项等于零, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 &= \iiint_V \left\{ \left(\mathbf{V} \cdot \frac{\nabla \theta_e^*}{\theta_e^*} \right) (\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) \right\} \rho d\tau \\ &+ \iiint_V \left\{ \frac{1}{c^2} (c^2 \operatorname{div} \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \phi)^2 \right\} \rho d\tau \\ &- \iiint_V \left\{ (\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) (\mathbf{V} \cdot \nabla q) \frac{L\rho}{c_p T} \right\} d\tau \\ &+ \iiint_V \left\{ c^2 (\operatorname{div} \mathbf{V}) \frac{L\rho}{c_p T} (\mathbf{V} \cdot \nabla q) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

考虑到 $\nabla p = -\rho \nabla \phi$ 时等位势面上所有的气热力学变量皆为常数^[3], 所以

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) (\mathbf{V} \cdot \nabla q) \frac{L\rho}{c_p T} = \rho g w^2 \frac{L}{c_p T} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (15)$$

注意到近似地有 $dp/dt = \omega \simeq -\rho g w$ ^[9], $c^2 \simeq \frac{dp}{dt} / \frac{d\rho}{dt}$, 再考虑到连续方程后有:

$$\rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \nabla q) \frac{L}{c_p T} \simeq \rho g w^2 \frac{L}{c_p T} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (16)$$

(15)、(16)代入(14)得:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\text{MTE})_0 &\simeq \iiint_V \left\{ \frac{g}{\theta_e^*} \frac{\partial \theta_e^*}{\partial z} w^2 \right\} \rho d\tau \\ &+ \iiint_V \left\{ \frac{1}{c^2} (c^2 \operatorname{div} \mathbf{V} - g w)^2 \right\} \rho d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式表明, 如果空气饱和并产生凝结, 则当 $\partial \theta_e^* / \partial z > 0$ 时 $(\text{MTE})_0$ 取极小值。

3. $(\text{MTE})_0$ 达极小值时大气的特征

在有效能量研究中^[5], 常把大气视作许多等质量“气块”组成, 把状态变化视作气块的调整或重新排列。如果借助可逆绝热过程, 每一个气块可从它在某一个场中的状态转变

成另一个场中的状态, 则我们称这是两个等价质量场。

给定一个全球质量场, 可以有許多等价场, 其中具有极小(MTE)者称为参考场或参考状态。

全球大气可作为热力学与力学的孤立系统, 它的湿总位能(MTE)与总动能(KE)之和是一常数^[10], 当(MTE)达极小值时就不会再有动能转换出来了。可能正是这个原因, 常把(MTE)达极小值时的状态称为参考状态。

根据上述定义及前面的研究表明, 若不考虑摩擦, 则作为热力学与力学上孤立系统的全球大气, 在质量守恒与绝热过程制约下, 使其达到以下三个条件, 即可作为参考状态:

- 1) 位相当温度与位温(未饱和时)随高度递增;
- 2) 等位势面上所有热力学变量皆为常数;
- 3) 满足静力平衡条件。

类似结果, 洛伦茨(Lorenz, E.N.)曾利用其他方法得出过^[5]。

4. (MTE)达极小值状态的确定

欲将湿有效能量用于天气分析和预报, 必须先解决利用观测资料确定(MTE)达极小值(参考状态)的方法。

(MTE)达极小值的状态是一种理想状态, 确定办法比较复杂, 目前尚不统一。本文认为在 θ_e^* 守恒与质量守恒制约下, 将大气微团按以下顺序调整可近似得到: 1) 第一次调整, 使同气柱 θ_e^* 呈递增排列; 2) 第二次调整, 使 θ_e^* 、 θ 、水分含量水平均一。

1) 第一次调整

若取 $\theta_{e,n}^*$ 表示 θ_e^* 的某一特定数值, $p_{r,1}$ 表示第一次调整后的气压, 则依第一次调整含义知, 对于某时刻(t)某地点(x, y), $p_{r,1}(x, y, t, \theta_{e,n}^*)$ 表示 $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 的空气都在 $p_{r,1}$ 等压面之上, $\theta_e^* < \theta_{e,n}^*$ 者都在 $p_{r,1}$ 之下。

点绘出 θ_e^* 廓线后可发现^[11], $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 的空气往往有几个层次。若令 $\Delta p_k(x, y, t, \theta_{e,n}^*)$ 表示第 k 个 $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 层的厚度, 则 $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 空气的总厚度(以气压差表示)为:

$$\sum_{k=1}^{S_k} \Delta p_k(x, y, t, \theta_{e,n}^*)$$

S_k 表示 $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 的总层数。

考虑到调整前、后 $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 的空气重量应不改变(因要求 θ_e^* 守恒与质量守恒), 故有

$$p_{r,1}(x, y, t, \theta_{e,n}^*) = \sum_{k=1}^{S_k} \Delta p_k(x, y, t, \theta_{e,n}^*) \quad (18)$$

这是第一次调整的数学表达式。图1a, b是第一次调整前、后 θ_e^* 分布实例。在调整之前(图1a), 高纬地区为稳定层结, 低纬中、下层为对流不稳定层结。经调整之后(图1b)高纬地区没有变化, 低纬地区的不稳定层结已调整为稳定层结, 达到了 θ_e^* 递增的要求。

2) 第二次调整

若取 $p_r(\theta_{e,n}^*, t)$ 表示与 $\theta_{e,n}^*$ 对应的第二次调整后的气压——参考气压, 则 $p_r(\theta_{e,n}^*, t)$ 面应是等位势面, $\theta_e^* \geq \theta_{e,n}^*$ 的空气应在 $p_r(\theta_{e,n}^*, t)$ 面之上。但第一次调整之后, $\theta_{e,n}^*$ 等值面尚不

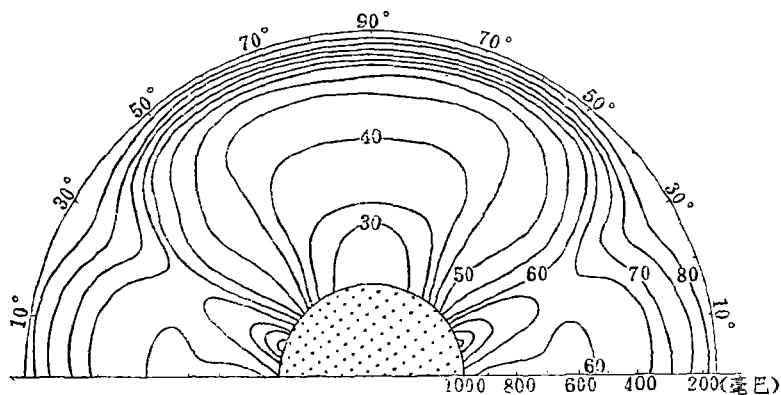


图 1 a 在纬向均一假定下利用 1980 年 8 月 115°E 资料绘出的位相当温度 θ_e^* 分布图

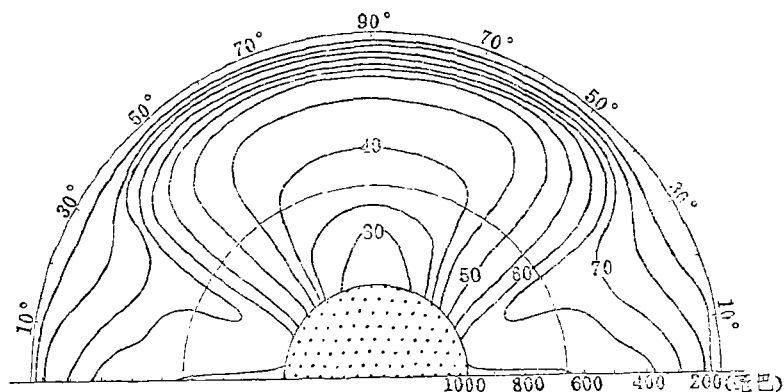


图 1 b 与图 1 a 相对应的第一次调整后位相当温度 θ_e^* 分布图

是等位势面, $\theta_e^* \geq \theta_{e\eta}^*$ 空气的重量为:

$$\iint_{\Omega} p_{r1}(x, y, t, \theta_{e\eta}^*) d\Omega$$

考虑到第二次调整前、后 $\theta_e^* \geq \theta_{e\eta}^*$ 的空气重量应不改变, 故:

$$p_r(\theta_{e\eta}^*, t) \cdot \Omega = \iint_{\Omega} p_{r1}(x, y, t, \theta_{e\eta}^*) d\Omega$$

或

$$p_r(\theta_{e\eta}^*, t) = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} p_{r1}(x, y, t, \theta_{e\eta}^*) d\Omega \quad (19)$$

这是第二次调整的数学表达式, 它表明在第一次调整后的 $\theta_{e\eta}^*$ 等值面上求出的平均气压即参考气压。实践表明, 若严格按照 (19) 式求 $p_r(\theta_{e\eta}^*, t)$, 不仅工作量大, 且难以收集到所需资料。为此, 人们常用某子午面代替全球。它实质上隐含着纬向均一的假定, 这使 (19) 式简化为:

$$p_r(\theta_{e\eta}^*, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_{r1}(\varphi, t, \theta_{e\eta}^*) \cdot \cos \varphi d\varphi / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \quad (20)$$

φ 表示地理纬度。考虑到可近似地用北半球代替全球^[7], 将(20)式化为求和形式后有:

$$p_r(\theta_{en}^*, t) = \sum_i \{ p_{r1}(\varphi, t, \theta_{en}^*) \cos \varphi \}_i / \sum_i \cos \varphi_i \quad (21)$$

用上述近似方法得出的 θ_{en}^* 面形状如图 2。为了表示出第二次调整前、后 θ_{en}^* 面形状的变化, 我们已将图 2 中 $\theta_{en}^* = 60^\circ\text{C}$ 面的形状插入了图 1 b。

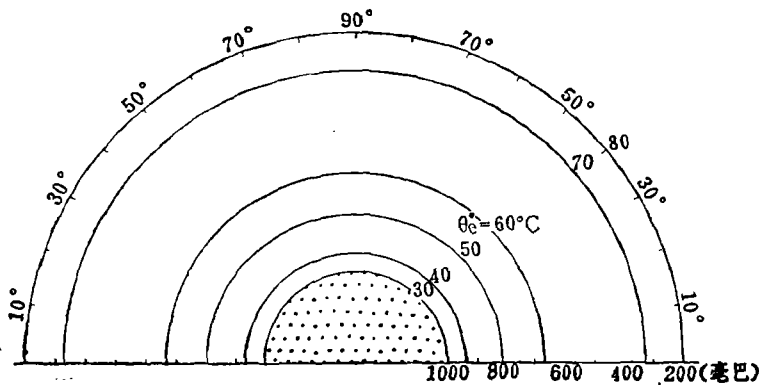


图 2 与图 1 对应的第二次调整后 $\theta_{en}^* = 30, 40, \dots^\circ\text{C}$ 等值面形状

第二次调整的最后一步, 是将等 θ_{en}^* 面上位温、水分含量调整为均一。完成这步调整后温、湿铅直分布如图 3。可以看出, 其中位温也基本上随高度递增。

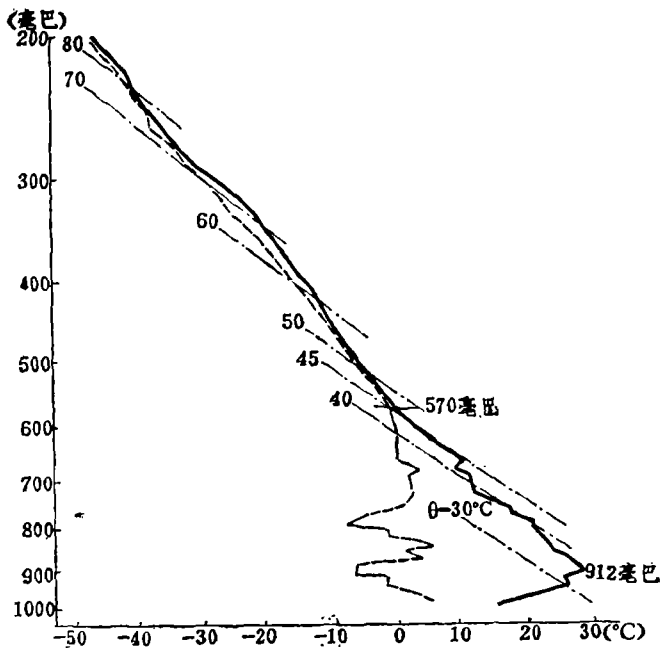


图 3 与图 2 对应的层结曲线
(实线: 温度, 虚线: 露点, 点划线: 干绝热线)

在地球重力场中, 大尺度大气运动系统是准静力平衡的, 用 $\partial p / \partial z = -\rho g$ 取代欧拉铅直运动方程产生的误差通常小于 0.1%^[7]。因此, 作为一种近似, 本文暂不考虑非静力

平衡情况。

至此,我们已说明了(MTE)。达极小值状态的一种近似确定方法。

参 考 文 献

- [1] Van Mieghem, J., The energy available in atmosphere for conversion into kinetic energy, *Beitr. Phys. Atmos.*, 29, 129—142, 1956.
- [2] Van Mieghem, J., Energies potentielle et interne convertibles en e'nergies cine'tique dans l'atmosphere, *Beitr. Phys. Atmos.*, 30, 5—17, 1957.
- [3] Dutton, J. A. and D. R. Johnson, The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics, *Adv. Geophys.* 12, 334—436, 1967.
- [4] 吴宝俊, 蒋凤英, 有限区域湿有效位能收支方程, *气象学报*, 41, 338—342, 1983.
- [5] Lorenz, E. N., Available energy and maintenance of a moist circulation, *Tellus*, 30, 15—31, 1978.
- [6] Lorenz, E. N., The nature and theory of the general circulation of the atmosphere, W. M. O., 1967.
- [7] Van Mieghem, J., Atmospheric energetics, Claredon press. Oxford, 1973.
- [8] 二宫洸三、秋山孝子, 豪雨のスケールと水蒸気収支解析について, *天気*, 23, 221—229, 1976.
- [9] Holton, J. R., An introduction to dynamic meteorology, Academic press, Inc. 1972.
- [10] 杨大升、刘余滨、刘式适, 动力气象学, 气象出版社, 1980.
- [11] 吴宝俊, 湿有效能量应用文集, 1—15, 广西人民出版社, 1985.