第43卷 第2期　　气 象 学 报　　Vol. 43, No. 2
1985年5月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　May, 1985

非绝热加热与行星尺度波动的激发*

吕 克 利

（南京大学气象系）

提　要

文中讨论了非定常流场中加热的影响，研究在非绝热加热作用下，行星尺度波动的建立过程及其定常解。

一、引　言

在前一工作[1]中，我们讨论了大尺度非绝热加热激发的定常行星尺度波动，指出，大尺度加热在西风带可产生定常行星尺度波动，在东风带只能产生衰减型扰动。文中没有讨论静风带中加热的影响，同时，定常问题中也看不出波动的建立过程。本文讨论非定常流场中加热的影响。

二、加热激发的扰动

我们的动力学方程组是考虑摩擦的涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla(\zeta+f)+D\zeta=f_0\frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{1}$$

（式中D是摩擦系数）及非绝热的热流量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)+\cdot\vec{v}\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)+\sigma\omega=-\frac{\bar{\alpha}}{c_p}Q \tag{2}$$

式中 $\sigma=-\bar{\alpha}\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p}$，是静力稳定度参数。本文中为简单起见，取为常数，$Q$是非绝热加热。

设

$$\begin{cases}\vec{v}=A(p)\vec{v}(x,y,t)\\ \phi=A(p)\bar{\phi}(x,y,t)\\ \bar{\alpha}Q=B(p)\bar{Q}(x,y,t)\end{cases} \tag{3}$$

并应用地转近似，经过一些运算，运算中取$\frac{dA}{dp}$，$\frac{dB}{dp}$为常数，再利用符号

* 本文于1981年7月17日收到，1983年12月30日收到修改稿。

$$(\bar{M})=\frac{1}{p_0}\int_0^{p_0} M\,dp$$

及 $\vec{v}^*=\bar{A}^2\vec{v}$, $\zeta^*=\bar{A}^2\bar{\zeta}$, $Q^*=\bar{A}^2\bar{Q}$, 最后得到考虑非绝热加热的涡度方程为[1]:

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t}+\vec{v}^*\cdot\nabla(\zeta^*+f)+D\zeta^*=-s^2Q^* \tag{4}$$

式中 $s^2=\frac{f_0}{c_p\sigma}\left(\frac{dB}{dp}\right)$, 取为常数。

令 $u^*=\bar{u}+u'$, $v^*=v'$, $\zeta^*=\bar{\zeta}+\zeta'$, $Q^*=\bar{Q}+Q'$

为简单起见,取 $\bar{u}$=常数,代入(4)式,略去撇号,得线性方程为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\beta v+D\zeta=-s^2Q \tag{5}$$

再设变量与 y 无关,则(5)式变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+\bar{u}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta v+D\frac{\partial v}{\partial x}=-s^2Q \tag{6}$$

边界条件取为

$$v\to 0,\qquad x\to\pm\infty \tag{7}$$

初始条件取为

$$v=0,\qquad t=0 \tag{8}$$

假定非绝热加热 Q 在时间和空间上是可以分离的,即设

$$Q=Q_1(t)Q_2(x)$$

并设 $Q_2(x)$ 只在有限区域中不为零。代入(b)式,得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+\bar{u}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta v+D\frac{\partial v}{\partial x}=-s^2Q_1(t)Q_2(x) \tag{9}$$

对方程(9) 作双向 Laplace 变换[2]。

$$\bar{v}(p,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-px}v(x,t)\,dx$$

得

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}p\bar{v}+\frac{\beta}{p}\bar{v}+D\bar{v}=-\frac{s^2}{p}Q_1(t)\bar{Q}_2 \tag{10}$$

这里已取 $x\to\pm\infty$ 时, $\frac{\partial v}{\partial x}\to 0$。

初条件(8) 变为

$$\bar{v}=0,\qquad t=0 \tag{11}$$

方程(10)在(11)下的解为

$$\bar{v}(p,t)=-s^2\bar{Q}_2(p)\int_0^t\frac{1}{p}Q_1(t')\exp\left[p\bar{u}(t'-t)+\left(D+\frac{\beta}{p}\right)(t'-t)\right]dt' \tag{12}$$

利用反演公式:

$$v(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\bar{v}(p,t)e^{px}dp$$

对(12)式进行反演, 得

$$v(x,t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{s^2Q_2(x')\int_0^t\left[Q_1(t')e^{-D(t-t')}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{1}{p}\exp\left[p\left((x-x')-\bar{u}(t-t')\right)-\frac{\beta}{p}(t-t')\right]\right)dpdt'\right\}dx' \tag{13}$$

令

$$G(x,x',t)=-s^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{1}{p}\exp\left[p(x-x'\right.$$
$$\left.-\bar{u}(t-t'))-\frac{\beta}{p}(t-t')\right]dpdt' \tag{14}$$

则(13)式可写为

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_2(x')G(x,x',t)dx' \tag{15}$$

由(14) 式确定的 Green 函数 $G(x,x',t)$是加热点源产生的场，如此，知道了 Green 函数 $G(x,x',t)$的性状，也就决定了加热场产生的扰动流场 v 的性质。

令　$p=\tau+is_1$，则(14)式在主值意义下可化为

$$G(x,x',t)=-s^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left\{s_1\left[(x-x')-\bar{u}(t'-t)\right]+\right.$$
$$\left.\frac{\beta}{s_1}(t-t')\right\}\frac{ds_1}{s_1}dt' \tag{16}$$

由[3]知道，当$(x-x')>\bar{u}(t-t')$，$\beta(t-t')>0$ 时，(16)式变为

$$G(x,x',t)=-s^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}\times$$
$$\times J_0\left(2\sqrt{[(x-x')-\bar{u}(t-t')]\beta(t-t')}\right)dt' \tag{17}$$

式中 J_0 是零阶 Bessel 函数。

当$(x-x')<\bar{u}(t-t')$，$t-t'>0$ 时，(16)式为

$$G(x,x',t)\equiv 0 \tag{18}$$

下面分别讨论西风带，东风带和无基流时的情形。

三、加热激发的西风带扰动

这时，$\bar{u}>0$，由于 $t>t'$，所以，$\bar{u}(t-t')>0$，如此，

1) 当 $x-x'<0$，即对于相对于点源为上游的点有$(x-x')<\bar{u}(t-t')$，因此，按(18)式，有

$$G(x,x',t)\equiv 0$$

2) 当 $0\leqslant(x-x')\leqslant\bar{u}t$，即对点源中心$(x')$ 而言为下游的点 x，总存在一个 $t'=t_1=t-\frac{x-x'}{\bar{u}}$，使$(x-x')-\bar{u}(t-t')=0$。当 $t'>t_1$ 时，$G(x,x',t)\neq 0$，当 $t'\leqslant t_1$ 时，由(18)可知，$G(x,x',t)=0$。

3) 当 $x-x'>\bar{u}t$ 时，$x-x'>\bar{u}(t-t')$总是成立，按(17)式有 $G(x,x',t)\neq 0$。

如此，对西风带，(17)，(18)式变为

$$G_w(x,x',t)=\begin{cases}0, & x-x'<0;\\ -s^2\int_{t-\frac{x-x'}{\bar{u}}}^{t}Q_1(t')e^{-D(t-t')}\times \\ \qquad\times J_0(2\sqrt{\beta(t-t')[(x-x')-\bar{u}(t-t')]})dt', & 0\leqslant(x-x')\leqslant\bar{u}t;\\ -s^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}\times \\ \qquad\times J_0(2\sqrt{\beta(t-t')[(x-x')-\bar{u}(t-t')]})dt' & (x-x')>\bar{u}t\end{cases}\tag{19}$$

令 $\tau=t-t'$，(19)式变为

$$G_w(x,x',t)=\begin{cases}0; & x-x'<0;\\ -s^2\int_0^{\frac{x-x'}{\bar{u}}}Q_1(t-\tau)e^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'-\bar{u}\tau)})d\tau, & 0\leqslant(x-x')\leqslant\bar{u}t;\\ -s^2\int_0^t Q_1(t-\tau)e^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'-\bar{u}\tau)})d\tau, & (x-x')>\bar{u}t\end{cases}\tag{20}$$

(20)式第二个积分的积分限可以扩展到0到∞，因为当 $\tau>\frac{x-x'}{\bar{u}}$ 时，$(x-x')-\bar{u}\tau<0$，按(18)式，此时 $G_w(x,x',t)$ 为零。如取 $Q_1(t-\tau)=Q=$常数，且设 $D^2<4\beta\bar{u}$，则由[2]得

$$G_w(x,x',t)=\begin{cases}0, & x-x'<0;\\ -s^2Q_e^{-D\frac{x-x'}{2\bar{u}}}\dfrac{\sin[\sqrt{(4\beta\bar{u}-D^2)}(x-x')]}{\sqrt{4\beta\bar{u}-D^2}}; & 0\leqslant x-x'\leqslant\bar{u}t;\\ -s^2Q\int_0^t e^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'-\bar{u}\tau)})d\tau, & x-x'>\bar{u}t\end{cases}\tag{21}$$

可见，对给定的 $x-x'$，当 $x-x'<0$ 时，即相对于点源的上游区域，加热不能激发出流场扰动；当 $x-x'>0$ 时，即相对于点源下游的区域，加热激发的扰动当 $t\geqslant\frac{x-x'}{\bar{u}}$ 时，得到的是不随时间改变的波型解。在[1]中，对定常流场，我们曾经得到过这类解。在现在的非定常问题中，对给定的区域 $(x-x')$，只要时间 $t\geqslant\frac{(x-x')}{\bar{u}}$，加热在西风带激发的扰动，就会在加热中心的下游区域，形成稳定不变的行星尺度波动。一旦时间 t 达到 $\frac{x-x'}{\bar{u}}$，定常行星波就建立起来并维持不变。当时间 $t<\frac{x-x'}{\bar{u}}$ 时，解与 t 有关，这表示这种行星波动正在建立过程中。(21)式的第三个积分表示的就是这种建立过程。如果令 $t\to\infty$，且

设 $D^2<4\beta\bar{u}$，则(21)式的第三个积分变为

$$G_w(x,x',\infty)=-s^2Qe^{-D\frac{x-x'}{2\bar{u}}}\frac{\sin[\sqrt{(4\beta\bar{u}-D^2)}(x-x')]}{\sqrt{4\beta\bar{u}-D^2}},$$

$$(x-x')>0 \tag{22}$$

可见，当 $t\to\infty$ 时，定常行星波对于加热中心下游 $(x-x')>0$ 的整个区域，都完全建立。在[1]中，我们考虑的是定常运动，得到的是类似 (22) 式的解，不能反映行星波的建立过程，当考虑非定常运动时，行星波从激发到稳定不变的全过程都显示出来了。

四、加热激发的东风带扰动

这时，$\bar{u}=-\bar{u}_E<0$ $(\bar{u}_E>0)$，由于 $(t-t')>0$，所以 $-\bar{u}_E(t-t')<0$，如此，

1) 当 $x-x'\leqslant-\bar{u}_Et$ 时，因 $x-x'+\bar{u}_E(t-t')\leqslant0$，结果 $G(x,x',t)\equiv0$。

2) 当 $-\bar{u}_Et\leqslant x-x'\leqslant0$ 时，存在一个 $t'=t_2=t+\frac{x-x'}{\bar{u}_E}$，使 $(x-x')+\bar{u}_E(t-t')=0$。当 $t'\leqslant t_2$ 时，$G(x,x',t)\neq0$；当 $t'>t_2$ 时，$G(x,x',t)\equiv0$。

3) 当 $x-x'>0$ 时，恒有 $x-x'+\bar{u}_E(t-t')>0$，按(17)式，$G(x,x',t)\neq0$。

如此，对东风带，(17)，(18)式变为

$$G_E(x,x',t)=\begin{cases}0, & x-x'\leqslant-\bar{u}_Et;\\ -S^2\int_0^{t+\frac{x-x'}{\bar{u}_E}}Q_1(t')e^{-D(t-t')}\times \\ \times H(R)J_0(2\sqrt{\beta(t-t')[(x-x')+\bar{u}_E(t-t')]})dt', \\ \qquad -\bar{u}_Et\leqslant x-x'\leqslant0; \\ -S^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}J_0(2\sqrt{\beta(t-t')[(x-x')+} \\ \qquad \overline{+\bar{u}_E(t-t')]})dt', \\ \qquad x-x'>0\end{cases} \tag{23}$$

式中

$$H(R)=\begin{cases}0, & R<0;\\ 1, & R>0。\end{cases}$$

是 Heaviside 单位函数，$R=(x-x')+\bar{u}_E(t-t')$。令 $t-t'=\tau$，则(23)式变为

$$G_E(x,x',t)=\begin{cases}0, & x-x'\leqslant-\bar{u}_Et;\\ -S^2\int_{-\frac{x-x'}{\bar{u}_E}}^t Q_1(t-\tau)e^{-D\tau}H(R)J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'+\bar{u}_E\tau)})d\tau, \\ \qquad -\bar{u}_Et<x-x'\leqslant0; \\ -S^2\int_0^t Q_1(t-\tau)e^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'+\bar{u}_E\tau)})d\tau, \\ \qquad x-x'>0\end{cases} \tag{24}$$

(24)式的第二个积分的积分限可以扩展为 0 到 t，因为当 $\tau<-\frac{x-x'}{\bar{u}_E}$ 时，$x-x'+\bar{u}_E\tau<0$，按(18)式，此时，$G_E(x,x',t)\equiv 0$，同前，取 $Q_1(t-\tau)=Q=$ 常数，则得

$$G_E(x,x',t)=\begin{cases}0, & x-x'\leqslant -\bar{u}_E t;\\ -S^2\int_0^t Qe^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x'+\bar{u}_E\tau)})d\tau & \\ \qquad -\bar{u}_E t<x-x'\leqslant 0; & \\ -S^2\int_0^t Qe^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x')+\bar{u}_E\tau)})d\tau, & \\ \qquad x-x'>0 & \end{cases}\tag{25}$$

上述积分只有当 $t\to\infty$ 时，才能得到与时间无关的解，就是说，对东风带，由加热激发的扰动，要稳定维持，即定常扰动的建立过程需要很长时间，这与西风带的情形完全不同。

令 $t\to\infty$，则有

$$G_E(x,x',\infty)=\begin{cases}0, & x-x'\leqslant -\bar{u}_E t;\\ -S^2Q\frac{1}{\sqrt{D^2+4\beta\bar{u}_E}}\exp\left[\frac{x-x'}{2\bar{u}_E}(D-\sqrt{D^2+4\beta\bar{u}_E})\right], & \\ \qquad -\bar{u}_E\leqslant x-x'\leqslant 0; & \\ -S^2Q\frac{1}{\sqrt{D^2+4\beta\bar{u}_E}}\exp\left[\frac{x-x'}{2\bar{u}_E}(D-\sqrt{D^2+4\beta\bar{u}_E})\right], & \\ \qquad (x-x')>0 & \end{cases}\tag{26}$$

(26)式显示，加热在东风带激发的定常扰动是衰减型扰动，加热在东风带不能形成波型扰动，这也是与西风带的情形完全不同的。大地形对大气运动也有类似的情况[4,5]。

五、无基本气流时的情况

这时 $\bar{u}=0$，(17)、(18)式变为

$$G_N(x,x',t)=\begin{cases}-S^2\int_0^t Q_1(t')e^{-D(t-t')}J_0(2\sqrt{\beta(t-t')(x-x')})dt', & \\ \qquad x-x'>0; & \\ 0, \quad x-x'<0 & \end{cases}\tag{27}$$

令 $t-t'=\tau$，则

$$G_N(x,x',t)=\begin{cases}-S^2\int_0^t Q_1(t-\tau)e^{-D\tau}J_0(2\sqrt{\beta\tau(x-x')})d\tau, & \\ \qquad x-x'>0; & \\ 0, \quad x-x'<0 & \end{cases}\tag{28}$$

只有当 $t\to\infty$ 时，才能得到与时间无关解，即对无基流的情形，加热激发的定常扰动的建立过程是需要很长时间的。

取 $Q_1=Q=$ 常数，并令 $t\to\infty$，这时由[2]不难得到

$$G_N(x,x',t)=\begin{cases}-S^2Q\dfrac{\sqrt{\beta(x-x')}}{D\sqrt{D\pi}}\exp\left[-\dfrac{\beta(x-x')}{2D}\right]K_{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{\beta}{2D}(x-x')\right] & x-x'>0;\\ 0; & x-x'<0\end{cases}\tag{29}$$

式中 $K_0(x)$ 是第二类虚宗量 Bessel 函数，它不具有振荡性质。(29) 式是衰减型的解。因为 $K_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\pi/2x}\,e^{-x}$，如此，(27)式变为

$$G_N(x,x',t)=\begin{cases}-S^2Q\dfrac{\pi^2}{4D}\exp\left[-\dfrac{\beta}{D}(x-x')\right], & x-x'>0;\\ 0, & x-x'<0\end{cases}\tag{30}$$

可见，当没有基流时，加热只能在其下游产生衰减型扰动，这说明西风基流的存在，是产生定常行星尺度波动的重要条件。

六、β 效应与摩擦的影响

如果不考虑地球的球面性，即设 $\beta=0$，这时由(16)式，按[3]，有

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{Sin}(As)}{s}ds=\frac{\pi}{2}SignA。$$

由于 $J_0(0)=1$，如此，对西风带，由(20)式，并令 $Q_1=Q=$ 常数，则得

$$G_W(x,x',t)=\begin{cases}\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & x-x'>\bar{u}(t-t')\geqslant 0;\\ -\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & x-x'<\bar{u}(t-t')\end{cases}\tag{31}$$

对东风带，有

$$G_E(x,x',t)=\begin{cases}\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & -\bar{u}_E(t-t')<x-x';\\ -\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & x-x'<-\bar{u}_E(t-t')\end{cases}\tag{32}$$

对无基流情形，得到

$$G_N(x,x',t)=\begin{cases}\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & x-x'>0;\\ -\dfrac{S^2Q}{2D}[1-e^{-Dt}], & x-x'<0\end{cases}\tag{33}$$

由(31)—(33)式不难发现，当不考虑地球球面性时，这三个解在性质上没有什么差别，都是衰减型解，这时加热在西风带也只能产生衰减型扰动，没有行星波产生。可见，地球球面性是西风带产生行星波动的根本原因。

摩擦对大气扰动有重要影响，解(21)，(22)是在摩擦 D 比较小的情况 ($D^2<4\beta\bar{u}$) 下得到的，如果摩擦增大，当 $D^2>D_c^2\equiv 4\beta\bar{u}$ 时，(21)式的第二个积分变为

$$G_W(x,x',t)=-S^2Qe^{-D\frac{x-x'}{2\bar{u}}}\frac{\exp\left[-\frac{x-x'}{2\bar{u}}(D-\sqrt{D^2-4\beta\bar{u}})\right]}{\sqrt{D^2-4\beta\bar{u}}}$$

$$0<x-x'\leqslant\bar{u}t \tag{34}$$

对(22)式也有类似的式子。可见，摩擦不仅使加热激发的西风带行星尺度波动发生阻尼，更重要的是，当摩擦足够大时，(在本模式中为 $D^2>4\beta\bar{u}$)使解的性质发生变化，这时，即使在西风带，加热也不能激发出行星波。我们在[1]中也曾指出过这一点。

参 考 文 献

[1] 吕克利，大尺度加热与东西风带中不稳定扰动的激发，气象学报，第40卷，No.2，148—157，1982。
[2] Magnus, W., F. Oberhettinger and R. P. Soni, Formulas and Theorems for the special functions of mathematical Physics, 508, 1966.
[3] Градшмейн, И. С., И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1100, 1962.
[4] Kasahara, A., The dynamical influence of orography on the large-scale motion of the atmosphere, J. A. S., 33. 259—271, 1966.
[5] Козлов, В. Ф., Формирование волны Россби в нестационарном ротропном океаническом потоке под действием во Дмушений, Изв. АН. СССР. ФАО. 16, 410—416, 1980.

PLANETARY WAVES EXCITED BY DIABATIC HEATING

Lu Keli

(Department of Meteorology, Nanjing University)

Abstract

The effect of heating on the nonstationary flow is studied. The establishing process of planetary waves excited by heating and their stationary solutions are discussed.