

## 对流云中点源爆炸催化剂的扩散问题\*

申 亿 铭      刘 桂 馥      许 焕 斌      杨 亚 萱      王 思 微

(北京气象专科学校) (南京气象学院)

(国家气象局气象科学研究所)

### 提 要

本文探讨了对流云中点源的扩散问题。在考虑了云中上升速度随高度变化的情况下求得了扩散方程的解。利用我国南方对流云探测的平均数据和点源所在的一般高度, 计算了不同时间催化剂的扩散范围和浓度分布, 并作了分析讨论, 初步得到了对流云中点源的扩散规律和特点。

### 一、引 言

我国人工影响天气的规模相当广泛, 所用工具和方法甚多, 但不外乎地面和高空两种作业方法。就高空而言, 除层状云可用飞机直接播撒催化剂外, 对对流云的人工影响目前仅能使用高炮和火箭两种携带催化剂的工具。从我国实际应用的催化工具出发, 本文探讨了三七高炮和火箭在对流云中爆炸后点源催化剂的扩散问题。

人们知道, 人工影响天气的效果, 不仅取决于云本身的宏、微观条件、催化技术、影响原理、影响部位和影响时间等等。还取决于所使用的催化剂的性能、剂量以及它们在对流云中的扩散规律和特点等。但目前直接在对流云中进行催化剂扩散的研究尚有难以克服的困难, 比较切实可行的还是理论探讨。即使理论工作从现在看到的也为数甚少, 只有苏联学者  $\Gamma. A. \text{Mиццбеладзе}$  和  $B. M. \text{Мацбахоб}$  两人的著作<sup>[1,2]</sup> 及  $\text{Geoffrey E. Hill}$  的文章<sup>[3]</sup> 探讨了这方面的问题。但前两人的工作只对扩散方程进行了定性分析, 没有给出理论计算结果, 而后者虽进行了冬季地形云中  $\text{AgI}$  扩散的测量, 且只得到了烟羽边缘的扩散速度和宽度, 但未能给出  $\text{AgI}$  的浓度分布。

可以想象, 催化剂在云中的扩散过程是相当复杂的, 它取决于许多因素, 其中包括对流和水平输送、湍流混合、催化剂质点的沉降、受雨滴的捕获以及催化剂质点彼此之间的併合等等。因此, 考虑上述诸因素作用的积云中点源催化剂的扩散方程应具有下述形式:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial q'}{\partial z} - u \frac{\partial q'}{\partial x} - v \frac{\partial q'}{\partial y} - (w - w_H) \frac{\partial q'}{\partial z} - \alpha N_c q' \quad (1)$$

\*本文于 1982 年 4 月 26 日收到, 1983 年 2 月 7 日收到修改稿。

式中  $q'$  为催化剂浓度;  $u, v$  和  $w$  分别为  $x, y$  和  $z$  轴上的分风速;  $k_x, k_y$  和  $k_z$  分别代表  $x, y$  和  $z$  轴上的湍流扩散系数;  $w_H$  为催化剂质点的下沉速度;  $N_c$  为云滴浓度;  $\alpha$  为催化剂质点被云滴捕获的系数;  $t$  为时间。

## 二、扩散方程的求解过程

从方程(1)中可以看出, 催化剂质点的浓度是空间和时间的复杂函数, 同时湍流系数紧密地与云体的流场状态联系着, 并且是座标函数, 而风速和云滴浓度又随座标值变化着, 因此要获得其通解是相当困难的。一般都提出某些假设或对方程做一定简化后寻求其特解。

首先令风向与  $x$  轴相合, 并垂直于  $y$  轴, 由此  $v=0$ , 因而  $v \frac{\partial q'}{\partial y}$  项可以忽略; 又假定湍流系数为常数; 除此, 我国三七高炮炮弹装载的催化剂是碘化银 ( $\text{AgI}$ ), 其质点下沉速度甚小, 与气流上升速度相比, 可以忽略不计。这样方程(1)就可简化为:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 q'}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q'}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 q'}{\partial z^2} - u \frac{\partial q'}{\partial x} - w \frac{\partial q'}{\partial z} - \alpha N_c q' \quad (1')$$

令  $q' = q e^{-\alpha N_c t}$ , 将其代入上式, 且消去  $e^{-\alpha N_c t}$  项后, 则得:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - u \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (2)$$

求解方程(2)给定下列初始和边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} 1, t=0, q=Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-h); \\ 2, z=0 \quad q=0 \\ 3, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \infty, q=0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

式中  $Q$  为点源功率,  $\delta(x), \delta(y)$  和  $\delta(z-h)$  代表丢脱函数,  $h$  为点源爆炸高度。

方程(2)的解可以被看做是三个互不依赖的微分方程解的乘积, 亦即按  $x, y$  和  $z$  三个座标分别求解[4], 这样则有如下三个独立方程:

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} - u \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} = k_y \frac{\partial^2 q_y}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial t} = k_z \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} - w \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (6)$$

为了求得方程(6)的解, 必须给出  $w$  随高度变化的具体形式。

国内和国外的实测资料均已证明<sup>[5]</sup>, 积雨云和积云内部空气的上升速度开始是随高度的升高而逐渐增大的, 及至到某一高度达到最大值, 其后反随高度的升高而减小(图1)。因此积雨云和积云内部任意高度上的空气上升速度可用下式来表示:

$$w = w_m + b(z - z_m) \quad (7)$$

式上  $w_m$  为最大上升速度;  $z_m$  为最大上升速度对应的高度;  $b$  为系数, 且当  $z < z_m$  时为正, 而当  $z > z_m$  时为负。

将(7)式代入(6)式, 可得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_z}{\partial t} &= k_z \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} - [w_m + b(z - z_m)] \frac{\partial q_z}{\partial z} \\ &= k_z \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} - bz \frac{\partial q_z}{\partial z} - (w_m - bz_m) \frac{\partial q_z}{\partial z}\end{aligned}$$

再令  $(w_m - bz_m) = \beta$ , 则有:

$$\frac{\partial q_z}{\partial t} = k_z \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} - bz \frac{\partial q_z}{\partial z} - \beta \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (8)$$

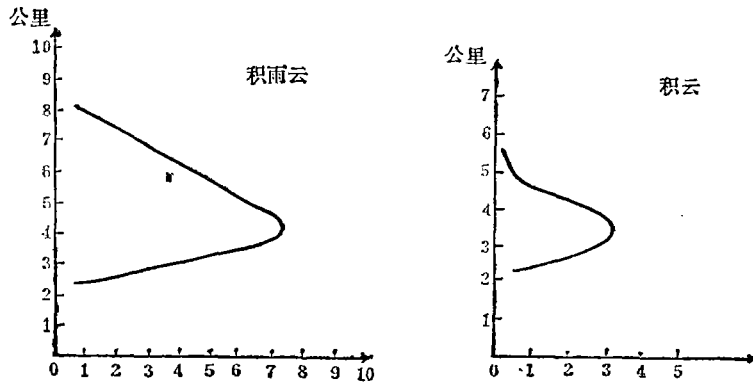


图 1 积雨云(左)和积云(右)中垂直气流随高度分布

这样,我们的任务就是应用初始和边界条件(3)求解方程(4)、(5)和(8)的解了。

(一) 首先从方程(8)着手, 且令  $\frac{z}{\sqrt{k_z}} = Z$ ,  $\frac{\beta}{\sqrt{k_z}} = R$ , 则方程(8)变为:

$$\frac{\partial q_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_z}{\partial Z^2} - bZ \frac{\partial q_z}{\partial Z} - R \frac{\partial q_z}{\partial Z} \quad (9)$$

现在我们应用运算微积方法解上述方程。为此,对方程(9)进行拉普拉斯变换, 结果变为:

$$\frac{d^2 \bar{q}_z}{dZ^2} - (R + bZ) \frac{d\bar{q}_z}{dZ} - P_1 \bar{q}_z = Q\delta(z-h) \quad (10)$$

其中  $\bar{q}_z = \int_0^\infty q_z e^{-P_1 t} dt$ 。

在步骤上先求方程(10)的齐次解, 即:

$$\frac{d^2 \bar{q}_z}{dZ^2} - (R + bZ) \frac{d\bar{q}_z}{dZ} - P_1 \bar{q}_z = 0 \quad (11)$$

方程的解, 并令其具有按  $b$  幂次排列的形式<sup>[6]</sup>, 于是便有:

$$\bar{q}_z = \bar{q}_{z,0} + b\bar{q}_{z,1} + b^2\bar{q}_{z,2} + \dots \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式, 且使  $b$  幂次一样的各项相等, 这样便可得到下列微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{q}_{z \cdot 0}}{dZ^2} - R \frac{d\bar{q}_{z \cdot 0}}{dZ} - P_i \bar{q}_{z \cdot 0} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{q}_{z \cdot 1}}{dZ^2} - R \frac{d\bar{q}_{z \cdot 1}}{dZ} - P_i \bar{q}_{z \cdot 1} &= Z \frac{d\bar{q}_{z \cdot 0}}{dZ} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

不难看出,方程组(13)的左端项形式一样,其齐次方程应具有  $e^{AZ}$  和  $e^{BZ}$  形式的两个特解,且  $A = \frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + P_i}$ ,  $B = \frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} + P_i}$ 。但第二个方程带有右端项,并非齐次方程。因此,为了求得它的解,需要应用常数变易法,并使其具有下述形式的算子<sup>[7]</sup>:

$$\bar{q}_{z \cdot n} = \frac{1}{2C} \left[ e^{AZ} \int e^{-AZ} \varphi_{n-1}(Z) dZ - e^{BZ} \int e^{-BZ} \varphi_{n-1}(Z) dZ \right] \quad (14)$$

这里  $\varphi_{n-1}(Z) = Z \frac{d\bar{q}_{z \cdot (n-1)}}{dZ}$ ,  $C = \sqrt{\frac{R^2}{4} + P_i}$ 。

首先令

$$\bar{q}_{z \cdot 0}^{(1)} = e^{AZ} \quad (15)$$

于是,当

$n=1$  时,

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} = \varphi_0 &= Z \frac{d\bar{q}_{z \cdot 0}}{dZ} \\ \bar{q}_{z \cdot 1}^{(1)} &= \frac{Ae^{AZ}}{4C} \left( Z^2 - \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$n=2$  时,

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} = \varphi_1 &= Z \frac{d\bar{q}_{z \cdot 1}}{dZ} \\ \bar{q}_{z \cdot 2}^{(1)} &= \frac{A^2 e^{AZ}}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} - \frac{5Z^3}{6C} + \frac{3Z^2}{2C^2} - \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) + \\ &+ \frac{Ae^{AZ}}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} - \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} - \frac{3}{8C^3} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

类似地再令

$$\bar{q}_{z \cdot 0}^{(2)} = e^{BZ} \quad (18)$$

于是,当

$n=1$  时,

$$\bar{q}_{z \cdot 1}^{(2)} = -\frac{Be^{BZ}}{4C} \left( Z^2 + \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right); \quad (19)$$

$n=2$  时,

$$\bar{q}_{z \cdot 2}^{(2)} = \frac{B^2 e^{BZ}}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} + \frac{5Z^3}{6C} + \frac{3Z^2}{2C} + \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) +$$

$$+ \frac{BC^{Bz}}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} + \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} + \frac{3}{8C^3} \right) \quad (20)$$

将公式(15)–(17)代入(12), 则得:

$$\begin{aligned} \bar{q}_z^{(1)} = e^{Az} \left\{ 1 + b \frac{A}{4C} \left( Z^2 - \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right) + b^2 \left[ \frac{A^2}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} - \frac{5Z^3}{6C} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3Z^2}{2C^2} - \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) + \frac{A}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} - \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} - \frac{3}{6C^3} \right) \right] + \dots \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

再将公式(18)–(20)代入(12), 则得:

$$\begin{aligned} \bar{q}_z^{(2)} = e^{Bz} \left\{ 1 - b \frac{B}{4C} \left( Z^2 + \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right) + b^2 \left[ \frac{B^2}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} + \frac{5Z^3}{6C} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3Z^2}{2C^2} + \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) + \frac{B}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} + \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} + \frac{3}{8C^3} \right) \right] + \dots \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

由此可知,  $\bar{q}_z^{(1)}$  和  $\bar{q}_z^{(2)}$  即为齐次方程(12)的两个线性无关的特解, 故

$$\bar{q}_z = \bar{q}_z^{(1)} + \bar{q}_z^{(2)} = F_1(Z)e^{Az} + F_2(Z)e^{Bz} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} F_1(Z) = 1 + b \frac{A}{4C} \left( Z^2 - \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right) + b^2 \left[ \frac{A^2}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} - \frac{5Z^3}{6C} + \frac{3Z^2}{2C^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) + \frac{A}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} - \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} - \frac{3}{8C^3} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(Z) = 1 - b \frac{B}{4C} \left( Z^2 + \frac{Z}{C} + \frac{1}{2C^2} \right) + b^2 \left[ \frac{B^2}{8C^2} \left( \frac{Z^4}{4} + \frac{5Z^3}{6C} + \frac{3Z^2}{2C^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3Z}{2C^3} + \frac{3}{4C^4} \right) + \frac{B}{4C^2} \left( \frac{Z^3}{3} + \frac{3Z^2}{4C} + \frac{3Z}{4C^2} + \frac{3}{8C^3} \right) \right] + \dots \end{aligned}$$

对于带有右端项的方程(10)来说, 它具有下述形式的解:

$$\bar{q}_z = C_1 \bar{q}_z^{(1)} + C_2 \bar{q}_z^{(2)} = C_1 F_1(Z)e^{Az} + C_2 F_2(Z)e^{Bz} \quad (24)$$

但从边界条件可知, 当  $Z \rightarrow \infty$  时,  $q = 0$ , 故有  $C_1 = 0$ , 因而方程(10)的解为:

$$\bar{q}_z = C_2 F_2(Z)e^{Bz} \quad (25)$$

对(25)式进行反变换

$$q_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} C_2(P_i) e^{Bz} F_2(Z) e^{P_i z} dP_i \quad (26)$$

前已令  $B = \frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} + P_i}$ , 现令  $\frac{R^2}{4} + P_i = P^*$ , 由此,  $P_i = P^* - \frac{R^2}{4}$ ,  $dP = dP^*$ 。这样, 便有:

$$\begin{aligned} e^{Bz} e^{P_i z} dP_i = e^{\left(\frac{R}{2} - \sqrt{P^*}\right)z} e^{P^* z - \frac{R^2}{4} z} dP^* \\ = e^{\frac{R}{2}z - \frac{R^2}{4}z} e^{-\sqrt{P^*}z} e^{P^* z} dP^* \quad (27) \end{aligned}$$

将(27)代入(26)式, 可得:

$$q_z = e^{\frac{R}{2}z - \frac{R^2}{4}z} \frac{1}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} c_2(P^*) e^{-\sqrt{P^*}z} F_2(Z) e^{P^* z} dP^* \quad (28)$$

从(28)式可见,要求得反演结果,必须先求出  $c_2(P^*)$  来。为此,令  $b=0$ ,这样方程(9)就变为格林方程了,即:

$$\frac{\partial q_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_z}{\partial Z^2} - R \frac{\partial q_z}{\partial Z} \quad (29)$$

解方程(29)仍使用初始和边界条件(3)。其解具有下述形式<sup>[7]</sup>:

$$q_z = \frac{1}{2\sqrt{\pi k_z t}} e^{\frac{R(z-h) - R^2 t}{2\sqrt{K_z}} - \frac{R^2 t}{4}} \left[ e^{-\frac{(z-h)^2}{4K_z t}} - e^{-\frac{(z+h)^2}{4K_z t}} \right] \quad (30)$$

另一方面,当  $b=0$  时,  $F_2(Z)=1$ ,故(28)式变为:

$$q_z = e^{\frac{Rz - R^2 t}{2} - \frac{R^2 t}{4}} \frac{1}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} c_2(P^*) e^{-\sqrt{P^*} Z} e^{P^* t} dP^* \quad (31)$$

按照前面标记,  $Z = \frac{z}{\sqrt{K_z}}$ ,  $R = \frac{\beta}{\sqrt{K_z}}$ ,而  $\beta = w_m - bz_m$ ,故当  $b=0$  时,  $R = -\frac{w_m}{\sqrt{K_z}}$ 。

将它们代入(30)和(31)式,则得:

$$q_z = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_z t}} e^{\frac{w_m(z-h)}{2K_z} - \frac{w_m^2 t}{4K_z}} \left[ e^{-\frac{(z-h)^2}{4K_z t}} - e^{-\frac{(z+h)^2}{4K_z t}} \right] \quad (30)'$$

$$q_z = e^{\frac{w_m z - w_m^2 t}{2K_z} - \frac{w_m^2 t}{4K_z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} C_2(P^*) e^{-\sqrt{P^*} \frac{z}{\sqrt{K_z}}} e^{P^* t} dP^* \quad (31)'$$

但(30)'和(31)'是等价的,由此得:

$$C_2(P^*) e^{-\sqrt{P^*} \frac{z}{\sqrt{K_z}}} = \frac{e^{-\frac{w_m h}{2K_z}}}{2\sqrt{K_z}} \left[ \frac{1}{\sqrt{P^*}} \left( e^{-\frac{|z-h|}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} - e^{-\frac{|z+h|}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} \right) \right] \quad (32)$$

但是  $(z-h)$  可能是正值,也可能是负值。不过根据本文的实际需要仅求  $z > h$  时的解。于是,当  $z \geq h$ ,亦即  $z-h \geq 0$ ,  $|z-h| = z-h$  时,  $C_2(P^*)$  应为:

$$C_2(P^*) = \frac{e^{-\frac{w_m h}{2K_z}}}{2\sqrt{K_z}} \left[ \frac{1}{\sqrt{P^*}} \left( e^{\frac{h}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} - e^{-\frac{h}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} \right) \right] \quad (33)$$

将(33)式代入(28)式,并归项则可得:

$$q_z = e^{\frac{w_m(z-h)}{2K_z} - \frac{w_m^2 t}{4K_z}} \frac{1}{2\sqrt{\pi K_z t}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} \left( e^{\frac{|z-h|}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} - e^{-\frac{|z+h|}{\sqrt{K_z}} \sqrt{P^*}} \right) \times \\ \times F_2(Z) e^{P^* t} dP^* \quad (34)$$

将  $B = \frac{R}{2} - \sqrt{P^*}$  代入  $F_2(Z)$  的表达式中,并归项可得:

$$F_2(Z) = \left\{ 1 + b \left[ \frac{z^2}{4K_z} + \left( \frac{Rz}{4\sqrt{K_z}} - \frac{Rz^2}{8K_z} \right) \frac{1}{\sqrt{P^*}} + \left( \frac{1}{8} - \frac{Rz}{8\sqrt{K_z}} \right) \frac{1}{P^*} - \frac{R}{16P^{*3/2}} \right] + \right. \\ \left. + b^2 \left[ \frac{z^4}{32K_z^2} + \left( \frac{5z^3}{48K_z^{3/2}} - \frac{z^3}{12K_z^{3/2}} - \frac{Rz^4}{32K_z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{P^*}} + \left( \frac{R^2 z^4}{128K_z^2} + \frac{Rz^3}{24K_z^{3/2}} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5z^3}{48K_z^{3/2}} + \frac{3z^2}{16K_z} - \frac{3z^2}{16K_z} \Big) \frac{1}{P^*} + \left( \frac{5R^2z^3}{192K_z^{3/2}} - \frac{3Rz^2}{16K_z} + \frac{3Rz^2}{32K_z} + \frac{3z}{16\sqrt{K_z}} \right. \\
& \left. - \frac{3z}{16\sqrt{K_z}} \right) \frac{1}{P^{*3/2}} + \left( \frac{3R^2z^2}{64K_z} - \frac{3Rz}{16\sqrt{K_z}} + \frac{3Rz}{32\sqrt{K_z}} + \frac{3}{32} - \frac{3}{32} \right) \frac{1}{P^{*2}} + \\
& \left. + \left( \frac{3R^2z}{64\sqrt{K_z}} - \frac{3R}{32} + \frac{3R}{64} \right) \frac{1}{P^{*5/2}} + \frac{3R^2}{128} \cdot \frac{1}{P^{*3}} \right] + \dots \Big\} \quad (35)
\end{aligned}$$

将(35)式代入(34)式, 则得:

$$\begin{aligned}
q_z = & \frac{1}{2\sqrt{\pi K_z t}} e^{\frac{w_m(z-h)}{2K_z} - \frac{w_m^2 t}{4K_z}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i+i\infty} \left( e^{-\frac{|z-h|\sqrt{P^*}}{\sqrt{K_z}}} - e^{-\frac{|z+h|\sqrt{P^*}}{\sqrt{K_z}}} \right) \times \\
& \times \left\{ 1 + b \left[ \frac{z^2}{4K_z} + \left( \frac{Rz}{4\sqrt{K_z}} - \frac{Rz^2}{8K_z} \right) \frac{1}{\sqrt{P^*}} + \left( \frac{1}{8} - \frac{Rz}{8\sqrt{K_z}} \right) \frac{1}{P^*} - \frac{R}{16P^{*3/2}} \right] + \right. \\
& + b^2 \left[ \frac{z^4}{32K_z} + \left( \frac{5z^3}{48K_z^{3/2}} - \frac{z^3}{12K_z^{3/2}} - \frac{Rz^4}{32K_z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{P^*}} + \left( \frac{R^2z^4}{128K_z^2} + \frac{Rz^3}{24K_z^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{5Rz^3}{48K_z^{3/2}} + \frac{3z^2}{16K_z} - \frac{3z^2}{16K_z} \right) \frac{1}{P^*} + \left( \frac{5R^2z^3}{192K_z^{3/2}} - \frac{3Rz^2}{16K_z} + \frac{3Rz^2}{32K_z} + \frac{3z}{16\sqrt{K_z}} \right. \\
& \left. - \frac{3z}{16\sqrt{K_z}} \right) \frac{1}{P^{*3/2}} + \left( \frac{3R^2z^2}{64K_z} - \frac{3Rz}{16\sqrt{K_z}} + \frac{3Rz}{32\sqrt{K_z}} + \frac{3}{32} - \frac{3}{32} \right) \frac{1}{P^{*2}} + \\
& \left. + \left( \frac{3R^2z}{64\sqrt{K_z}} - \frac{3R}{32} + \frac{3R}{64} \right) \frac{1}{P^{*5/2}} + \frac{3R^2}{128} \cdot \frac{1}{P^{*3}} \right] + \dots \Big\} e^{P^* t} dP^* \quad (36)
\end{aligned}$$

由于

$$L^{-1} \left( \frac{1}{P^{*\frac{n}{2}+1}} e^{-z\sqrt{P^*}} \right) = (4t)^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{t}} \right)$$

其中

$$i^n \operatorname{erfc}(r) = \frac{e^{-r}}{2^n \sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{r^{n+1}} - \frac{(n+2)!}{2^2 n! r^{n+3}} + \frac{(n+4)!}{i^2 2^n n! r^{n+5}} - \dots \right]^{[8]}$$

这里

$$r = \frac{Z}{2\sqrt{t}} = \frac{z}{2\sqrt{K_z t}}$$

利用上述公式反演(36)式, 最后得:

$$q_z = \frac{1}{2\sqrt{K_z}} e^{\frac{w_m(z-h)}{2K_z} - \frac{w_m^2 t}{4K_z}} \left[ e^{-\frac{(z-h)^2}{4K_z t}} - e^{-\frac{(z+h)^2}{4K_z t}} \right] \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + b \left[ \frac{z^2}{4K_z \sqrt{\pi t}} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{z}{4\sqrt{K_z}} - \frac{Rz^2}{8K_z} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^3} + \dots \right) + \left( \frac{1}{8} - \frac{Rz}{8\sqrt{K_z}} \right) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{3}{2r^4} + \dots \right) \\
& + \dots - \frac{R}{16\sqrt{\pi}} \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5} + \dots \right) + b^2 \left[ \frac{z^4}{32K_z^2\sqrt{\pi}t} + \left( \frac{z^3}{48K_z^{3/2}} - \frac{Rz^4}{32K_z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^3} + \dots \right) \right. \\
& + \left. \left( \frac{R^2z^4}{128K_z^2} - \frac{3Rz^3}{48K_z^{3/2}} \right) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2r^4} + \dots \right) + \left( \frac{5R^2z^3}{192K_z^{3/2}} - \frac{3Rz^2}{32K_z} \right) \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5} + \dots \right) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{3R^2z^2}{64K_z} - \frac{3Rz}{32\sqrt{K_z}} \right) \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{5}{r^6} + \dots \right) + \left( \frac{3R^2}{64\sqrt{K_z}} - \frac{3R}{64} \right) \frac{t^2}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{1}{r^5} - \frac{15}{2r^7} + \dots \right) + \frac{3R^2t^{5/2}}{128\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{21}{2r^8} + \dots \right) \right] + \dots \} \quad (37)
\end{aligned}$$

(二) 应用初始和边界条件(3)求方程(4)和(5)的解,其结果分别为:

$$q_x = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_x t}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t}} \quad (38)$$

$$q_y = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_y t}} e^{-\frac{y^2}{4K_y t}} \quad (39)$$

以上我们分别求得了方程(4)、(5)和(6)的解,如将三个方程的解相乘,则可得方程(2)的解了。因此,当  $z \geq h$  时,方程(2)的最终解应为:

$$\begin{aligned}
q & = q_x \cdot q_y \cdot q_z = \frac{Q}{8\sqrt{K_x \cdot K_y \cdot K_z} \pi t} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} - \frac{w_m t}{4K_z} + \frac{w_m(z-h)}{2K_z}} \times \\
& \times \left[ e^{-\frac{(z-h)^2}{4K_z t}} - e^{-\frac{(z+h)^2}{4K_z t}} \right] \left\{ \frac{1}{\pi t} + b \left[ \frac{z^2}{4K_z\sqrt{\pi}t} + \left( \frac{z}{4\sqrt{K_z}} - \frac{Rz^2}{8K_z} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^3} + \dots \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{1}{8} - \frac{Rz}{8\sqrt{K_z}} \right) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{3}{2r^4} + \dots \right) - \frac{R}{16} \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5} + \dots \right) + \dots \right] + b^2 \left[ \frac{z^4}{32K_z^2\sqrt{\pi}t} + \left( \frac{z^3}{48K_z^{3/2}} - \frac{Rz^4}{32K_z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^3} + \dots \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{R^2z^4}{128K_z^2} - \frac{3Rz^3}{48K_z^{3/2}} \right) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{3}{2r^4} + \dots \right) + \left( \frac{5R^2z^3}{192K_z^{3/2}} - \frac{3Rz^2}{32K_z} \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{t}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^5} + \dots \right) + \left( \frac{3R^2z^2}{64K_z} - \frac{3Rz}{32\sqrt{K_z}} \right) \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{5}{r^6} + \dots \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$



$$+ \left( \frac{3R^2z}{64\sqrt{K_z}} - \frac{3R}{64} \right) \frac{t^2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{15}{2r^7} + \dots \right) + \frac{3R^2t^{5/2}}{128\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^6} - \frac{21}{2r^8} + \dots \right) \Big] + \dots \} \quad (40)$$

如考虑云滴对催化剂质点的捕获作用,则需在(40)式的右端乘以  $e^{-\alpha N_c t}$  项,这样就可以得到方程(1)'的解了。

假如我们讨论的是各向同性的情况,则  $K_x = K_y = K_z = K$ 。

至于当  $z < h$  时,毫无疑问能够求得相应的解,但因为催化剂云团在上升运动的作用上是在  $z > h$  的高度上扩散的,故这种情况本文就不再讨论了。

### 三、计算结果及其分析

在计算中我们采用了各项参数的平均值,即  $h = 4000$  米、 $w_m = 7$  米/秒、 $w_m = 1$  米/秒、 $z_m = 5000$  米、 $z_0 = 1000$  米、 $u = 15$  米/秒和  $Q = 10^{12}$  个/克。至于  $K$  的数值,大家知道无论是积云,还是积雨云在它们发展的不同阶段和不同部位显然是不同的,而且随着云厚的增加而增大。参照文献[9]中给出的积雨和积雨中不同部位的湍流系数,又考虑到我国纬度低于苏联纬度的事实,我们选用了  $K = 250$  米<sup>2</sup>/秒和  $K = 400$  米<sup>2</sup>/秒两种数值。

使用上述数据并利用公式(40)我们计算了各向同性条件下催化剂在 2, 5 和 10 分钟时的扩散情况,并将结果绘成图 2。分析这两张图可以看出下述规律并得出相应的结论:

第一,在  $x-z$  (在  $y-z$  剖面上也一样)垂直剖面上催化剂浓度分布图形是椭圆形的,这主要是空气上升运动所造成的。

第二,相对最大浓度中心催化剂的分布在垂直方向上并不是均称的,而是呈偏对称型,且其中心偏于下方。对比两种湍流系数情况下的偏心率可以看到,湍流系数愈大,其偏心率也愈大。例如:  $K = 250$  米<sup>2</sup>/秒时的偏心率,二分钟时为 1.22,五分钟时为 1.82;而在  $K = 400$  米<sup>2</sup>/秒的情况下二分钟时为 1.44,五分钟时为 2.15;但到十分钟时偏对称性已不十分明显。

但在水平方向上由于沿  $x$  轴的平均风速是均匀的,它不随时间和距离而变,所以催化剂的分布相对中心是对称的。

第三,初始时催化剂的扩散范围(以  $10^\circ$  为界)较小,但浓度梯度较大,继之随时间的增加,催化剂的扩散范围也随之增大,但浓度梯度相应变小,及至到一定时间以后随时间的增加催化剂的扩散范围相反却日趋变小,以至最终接近于零。

第四,比较图 2 中两张图形表明:湍流系数愈大,催化剂的扩散范围也愈大。仅以五分钟时的扩散范围为例:当  $K = 250$  米<sup>2</sup>/秒时水平扩散范围约 1700 米左右,而垂直厚度达 2500 米;当  $K = 400$  米<sup>2</sup>/秒时水平扩散范围为 1800 米,而垂直厚度达 2500—2600 米左右。

从催化剂的中心浓度来看,可以清楚地看出,湍流系数愈大,扩散速度愈快,其中心浓度则愈小,比较同一时刻的中心浓度都相差约一个量级。

第五,在空气上升运动和水平运动的综合作用下催化剂云团是一边倾斜向上运动又一边扩散的,故催化剂最大浓度中心的轨迹是呈上斜线形式的,但由于在最大上升速度对应的高度以上,上升速度是逐渐减小的,所以催化剂最大浓度中心的轨迹并非是简单的斜

直线,而是略向下弯曲。

本文仅对对流云中点源爆炸后催化剂的扩散问题进行了初步探讨, 所得结果可供人工影响对流云降水时参考。

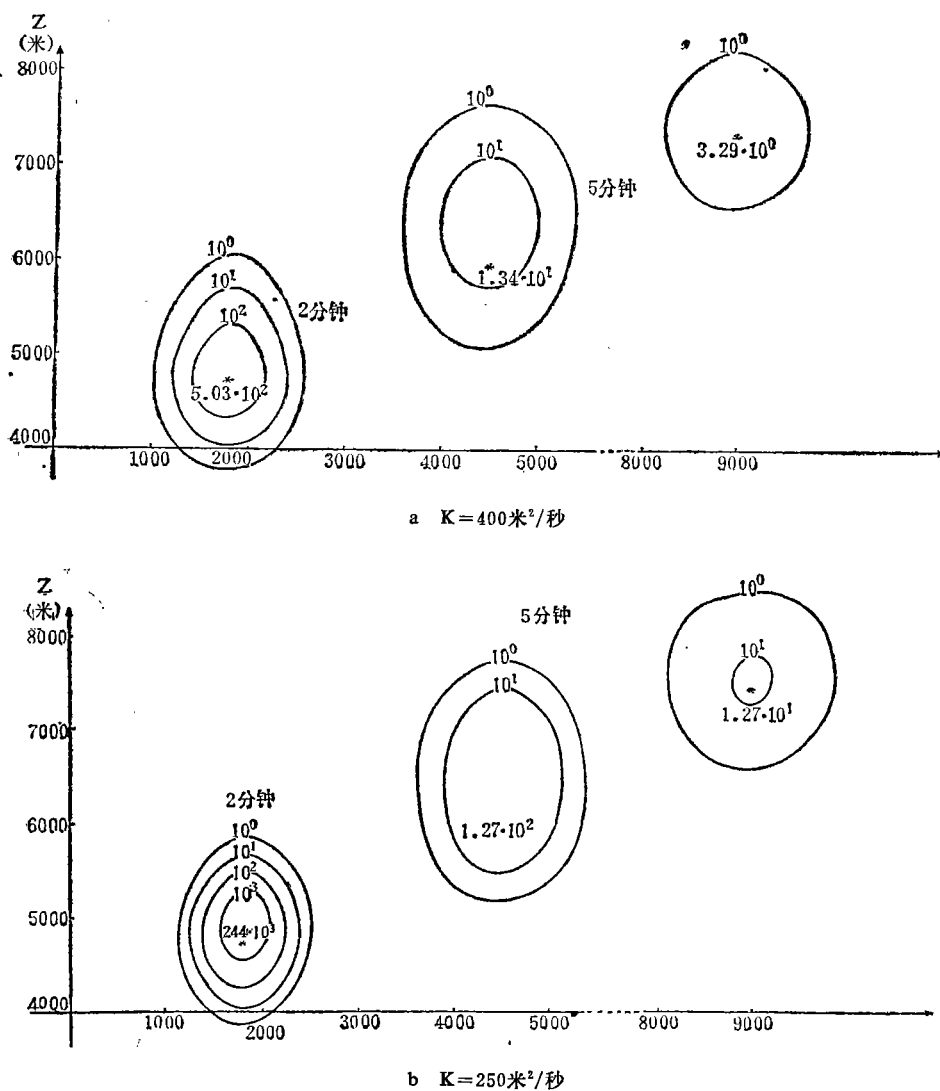


图 2 催化剂扩散浓度等值线垂直剖面图(催化剂的浓度等值线以个/升为单位——下同)

### 参 考 文 献

- [1] Мишвеладзе. Б. А., В. М. Мальбахов, К вопросу о распространении реагента диспергированного взрывом снаряда в конвективном облаке, Сообщ, АН ГССР, Т. 73, № 2, 1974.
- [2] Мишвеладзе. Б. А., В. М. Мальбахов, Распространение пассивности примеси в стационарном конвективном облаке Зак, НИГМИ, 64(70), 1977.
- [3] Geoffrey. E. Hill, Dispersion of Airborne Released. Silver Iodide in Winter Orographic Clouds, *J. Appl. Meteor.*, 19, № 8, 1980.

- [4] Берлянд О. С., Л. А. Соколовская, О пенка концентрации примеси в свободной атмосферы с учетом изменчивости ветра во времени и с расстоянием, Тр. ИПГ. № 4, 1967.
- [5] 中央气象局研究所编, 人工降水、防雷基础知识, 农业出版社, 1974.
- [6] 福原满洲雄、佐藤常三、古屋茂著, 常微分方程, 岩波书店, 1958.
- [7] Смирнов, М. И., Курс высшей математики. т. 1, ГИФМЛ, 1958.
- [8] Берлянд. О. С., Л. А. Соколовская, О функциях  $i^{\text{erfcx}}$ , Цнженерно-физический журнал, Т. 1, № 11 1958.
- [9] Винниченко. Н. К., Н. З. Пивус. С. М. Шметер, Турбулентность в свободной атмосфере, Гидрометеоздат, 1976.

## THE PROBLEM OF DIFFUSTON OF POINT SOURCE IN THE CONVECTIVE CLOUDS

Shen Yiming

*(Meteorological College of Beijing)*

Liu Guifu

*(Meteorological College of Nanjing)*

Xu Huanbin et al

*(Academy of Meteorological Science, National Meteorological Bureau)*

### Abstract

The purpose of this paper is to study the diffusion of point source in the convective clouds. Considering the rising speed in clouds changes with altitudes we obtained the solution for the diffusion equation. By taking advantage of the mean figures concerning convective clouds in South China and the usual altitudes of point source at which the shell charged with AgI is exploded, we have calculated the distrition with time of the diffusion range and concentration of the catalytic agent.