

有限区域湿有效位能收支方程*

吴宝俊 蒋凤英

(国家气象局气象科学研究所)

有效位能是大气能量学中较出色的创见^[1-3], 它的收支方程, 有助于揭示能量制造、积聚、释放条件, 在理论与实际工作中都占重要地位。自六十年代史密斯(Smith, P. J.) 提出有限区域有效位能及其收支方程后^[4], 很多人进行过这方面的研究。约翰逊(D. R. Johnson)^[5]以及文森特等(Vincent, D. G. and Chang, L. N.)^[6]分别在 (x, y, θ, t) 与 (x, y, p, t) 坐标中将有效位能分解成正压与斜压分量, 并给出了收支方程。1976年埃格(Egger, J.) 对 $dp_r/dt=0$ 提出质疑后^[7], 史密斯、文森特以及艾德曼(Edmon, H.J.) 于1977年导出了 $dp_r/dt \neq 0$ 时的收支方程^[8], 不久艾德曼又提出一种改进后的方程^[9]。

大气水分对天气变化有很大影响。在有效位能参考状态中假若考虑潜热能, 将更接近实际情况。因此洛伦茨(E. N. Lorenz)、谢义炳提出的湿有效位能概念^[10-11]受到了人们的重视。为了便于应用这一概念, 本文提出有限区域湿有效位能的一种近似表达式及其收支方程。

1. 有限区域湿有效位能的一种近似表达式

若把内能、潜热能、位能之和称作湿总位能(MTE), 则对于总面积为 Ω 、地表海拔高度 $h_s=0$ 的地球

$$\text{MTE} = \frac{C_p}{g} \int_{\Omega} \int_0^{p_s} T_e dp d\Omega \quad (1)$$

其中 $T_e = T + \frac{L}{C_p} q_s$ 为相当温度^[12], q_s 为凝结饱和比湿。把 MTE 分作无效位能与有效位能(MAE), 并认为大气微团按照一定条件重新排列后具有的最小总位能(MTE_m), 即大气的无效位能。因此

$$\text{MAE} = \text{MTE} - \text{MTE}_m \quad (2)$$

在有效位能研究中, 把 $\text{MTE} = \text{MTE}_m$ 的状态, 称为参考状态。本文认为在位相当温度(θ_e , 即文献[12]中的 θ_e^*)守恒的条件下, 将大气依次经两次调整可以达到: (1) 调整得 θ_e 随高度递增; (2) θ_e 水平均一。因此

$$\text{MAE} = \frac{C_p}{g} \int_{\Omega} \int_0^{p_s} T_e \left[1 - \left(\frac{p_r}{p} \right)^{\kappa} \right] dp d\Omega \quad (3)$$

这是湿有效位能的一个近似表达式。其中 $\kappa = R/C_p$; p_r 代表参考状态的气压, 简称

* 本文于1981年2月3日收到, 1981年12月5日收到修改稿。

参考气压。

仿照史密斯(Smith, P.J.)的作法^[4],对全球湿有效位能有

$$\text{MAE} = \sum_j (\text{MAE})_j = \sum_j \left\{ \frac{C_p}{g} \int_{\sigma_j} \int_0^{p_s} T_e \left[1 - \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa \right] dp d\sigma \right\}, \quad (4)$$

其中 $\sum_j \sigma_j = \Omega$ 。 $(\text{MAE})_j$ 表示有限区域 σ_j 对全球湿有效位能的贡献,简称有限区域湿有效位能。若取 A_j 表示 $(\text{MAE})_j$ 则

$$A_j = \frac{C_p}{g} \int_{\sigma_j} \int_0^{p_s} T_e \left[1 - \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa \right] dp d\sigma = \frac{C_p}{g} \int_{\sigma_j} \int_0^{p_s} N T_e dp d\sigma \quad (5)$$

其中 $N = \left[1 - \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa \right]$, 表示总位能转换成有效位能的效率,简称效率因子。将(5)式与史密斯所给有限区域干有效位能表达式^[4]对比看出, 只要用 T 代换 T_e , 两者形式一样。

2. A_j 收支方程式

前人得出的干有效位能收支方程^[4-9],基本上有两种类型。与其相应, A_j 收支方程也有两种。

1) 第一类收支方程式

为书写方便, 把 $\int_{\sigma_j} \int_0^{p_s} () dp d\sigma$ 记为 $\iint () dp d\sigma$, 因此

$$\frac{\partial}{\partial t} A_j = \frac{C_p}{g} \iint \frac{\partial}{\partial t} (N T_e) dp d\sigma + \frac{C_p}{g} \int N_s T_{e_s} \frac{\partial p_s}{\partial t} d\sigma \quad (6)$$

N_s, T_{e_s}, p_s 分别表示地面效率因子、相当温度及气压。由连续方程以及个别变率、局地变率之间关系

$$\frac{\partial}{\partial t} (N T_e) = \frac{d}{dt} (N T_e) - \nabla_p \cdot (N T_e \vec{V}) - \frac{\partial}{\partial p} (N T_e \omega) \quad (7)$$

考虑效率因子表达式后有

$$\frac{d}{dt} (N T_e) = N \frac{dT_e}{dt} + \frac{1}{C_p} \omega \alpha \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa + \frac{1}{C_p} \omega \alpha \left(\frac{L q_s}{C_p T} \right) \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa - \frac{T_e}{p^\kappa} \frac{d}{dt} p^\kappa \quad (8)$$

参照文献[11]

$$C_p \frac{dT_e}{dt} = \dot{Q} + \omega \alpha \quad (9)$$

其中 \dot{Q} 表示非绝热过程(湿)对单位质量空气产生的加热率。

(9)代入(8)

$$C_p \frac{d}{dt} (N T_e) = N \dot{Q} + \omega \alpha + \omega \alpha \left(\frac{L q_s}{C_p T} \right) \left(\frac{p_r}{p} \right)^\kappa - C_p \frac{T_e}{p^\kappa} \frac{d}{dt} p^\kappa \quad (10)$$

(10)代入(7)

$$C_p \frac{\partial}{\partial t} (NT_e) = N\dot{Q} + \omega\alpha + \omega\alpha \left(\frac{Lq_s}{C_p T} \right) \left(\frac{p_r}{p} \right)^k - C_p \frac{T_e}{p^k} \frac{d}{dt} p_r^k - C_p \nabla_p \cdot (NT_e \vec{V}) - C_p \frac{\partial}{\partial p} (NT_e \omega) \quad (11)$$

(11)代入(6),并把 $\frac{d}{dt}(p_r^k)$ 展开

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= \frac{1}{g} \iint N\dot{Q} dp d\sigma + \frac{1}{g} \iint \omega\alpha dp d\sigma && \text{(a)} \quad \text{(b)} \\ &- \frac{C_p}{g} \iint \nabla_p \cdot (NT_e \vec{V}) dp d\sigma && \text{(c)} \\ &- \frac{C_p}{g} \iint \frac{\partial}{\partial p} (NT_e \omega) dp d\sigma && \text{(d)} \\ &- \frac{C_p}{g} \iint \frac{T_e}{p^k} \frac{\partial p_r^k}{\partial t} dp d\sigma && \text{(e)} \\ &- \frac{C_p}{g} \iint \frac{T_e}{p^k} \vec{V} \cdot \nabla_p p_r^k dp d\sigma && \text{(f)} \\ &- \frac{C_p}{g} \iint \frac{T_e}{p^k} \omega \frac{\partial p_r^k}{\partial p} dp d\sigma && \text{(g)} \\ &+ \frac{C_p}{g} \int N_s T_{es} \frac{\partial p_s}{\partial t} d\sigma && \text{(h)} \\ &+ \frac{1}{g} \iint \omega\alpha \frac{Lq_s}{C_p T} \left(\frac{p_r}{p} \right)^k dp d\sigma && \text{(i)} \end{aligned} \quad (12)$$

这是欧拉参考系 p 坐标第一类类型的湿有效位能收支方程式。除最后一项外,其余各项都与干有效位能时对应^[8]。其中(a)项代表湿有效位能产生率,简称产生项,常用 G_A 表示;(b)项表示由于铅直运动使大气质点重新排列导致的湿有效位能释放率,简称释放项,常用 WA 表示;(c)、(d)项分别表示湿有效位能水平与铅直通量导致 A_i 在区域 σ_i 中的积聚,简称水平积聚项与铅直积聚项,常用 HF_A 与 VF_A 表示;(e)、(f)、(g)项分别表示参考气压局地变化、平流变化、铅直输送对 $\frac{\partial A_i}{\partial t}$ 的贡献,可分别简称 p_r 局地变化

项、平流项与铅直输送项, 分别用 DPR, HAPR, VAPR 表示; (h) 项表示地面气压变化对 $\partial A_s / \partial t$ 的贡献, 简称地面变压项, 常用 PS_A 表示。上述各项在讨论干有效位能收支的文献中都有讨论, 与湿有效位能类似, 不再赘述。

(12) 式中最后一项, 在于有效位能收支方程中无对应项, 暂称附加项, 并用 AD_A 表示。取 $\beta = \left(\frac{Lq_s}{C_p T} \right) \left(\frac{p_r}{p} \right)^k$, 则有:

$$AD_A = \frac{1}{g} \iint \omega \alpha \beta dp d\sigma \quad (13)$$

其中 β 是一无量纲数, 量级约为 $0-10^{-2}$ (表 1)。(13) 式表明, 如果把 (12) 式中 (b) 项称为转换项, 则 AD_A 项可看作水汽潜热增加的转换率。虽然 β 的数值不超过 2%, 但 (12) 式中有些项可能也比 (b) 项小 2 个量级, 故 AD_A 项不可忽略。另外只有考虑这一项, 才能由 (12) 式变换到 (15) 式。

表 1 β 数值表 (计算时取 $T = T_a, p_r$ 取自文献 [16])

p (mb)	T ($^{\circ}\text{C}$)	β (%)	T ($^{\circ}\text{C}$)	β (%)	T ($^{\circ}\text{C}$)	β (%)
1000	30	1.31	20	1.23		
800	20	1.04	10	0.90		
600	10	0.80	0	0.65	-10	0.33
500	0	0.56	-10	0.40	-20	0.18
300	-20	0.21	-30	0.10	-40	0.04

2) 第二类收支方程式

(12) 式也象同形式的干有效位能收支方程一样, 可能存在各项量级相差较大的缺点。为此, 应再导出一个各项量级相近的收支方程。对 (5) 式求导数

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} = \frac{C_p}{g} \iint N \frac{\partial T_e}{\partial t} dp d\sigma + \frac{C_p}{g} \iint T_e \frac{\partial N}{\partial t} dp d\sigma + \frac{C_p}{g} \int N_s T_{e,s} \frac{\partial p_s}{\partial t} d\sigma \quad (14)$$

(9) 代入 (14), 并考虑到个别变率与局地变率之间的关系后

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_s}{\partial t} = & \frac{1}{g} \iint N \omega \alpha dp d\sigma + \frac{C_p}{g} \iint T_e \frac{\partial N}{\partial t} dp d\sigma + \frac{C_p}{g} \int N_s T_{e,s} \frac{\partial p_s}{\partial t} d\sigma \\ & \vdots \\ & \text{NWA} \qquad \qquad \text{DADN} \qquad \qquad pS_A \\ & - \frac{C_p}{g} \iint N \vec{V} \cdot \nabla_p T_e dp d\sigma - \frac{C_p}{g} \iint N \omega \frac{\partial T_e}{\partial p} dp d\sigma + \frac{1}{g} \iint N \dot{Q} dp d\sigma \\ & \vdots \\ & \text{HADV} \qquad \qquad \text{VADV} \qquad \qquad G_A \end{aligned} \quad (15)$$

这是欧拉参考系 p 坐标第二类湿有效位能收支方程。其中 NWA 表示由于铅直运动使大气质点重新排列导致的湿有效位能释放率; DADN 表示由于效率因子局地变化对

$\partial A_s/\partial t$ 的贡献; HADV 与 VADV 分别表示热力平流与铅直输送对 $\partial A_s/\partial t$ 的贡献, 分别称平流项与铅直输送项; pS_A 与 G_A 项的意义同第一类收支方程。

考虑到 N 的量级约为 10^{-1} — 10^{-2} , 所以 NWA 要比 WA 小 1—2 个量级; 另外(15)式各项都包含 N 或 $\partial N/\partial t$, 因此各项量级可能不会相差太大。这是第二类方程的一个优点。

3. 小 结

按照推想, 由于有限区域湿有效位能表达式与干有效位能相似, 故它们的收支方程也应该相似。第二种类型确实与这个预计吻合, 两者各项对应, 本文(15)式与艾德曼^[9]导出的相似。但在第一种类型中, 与史密斯等人导出的方程相比^[8], 本文的方程(12)多一项。

干有效位能已对大气环流、热带风暴、温带气旋的研究起了很大的推动作用。而湿有效位能概念比干有效位能更接近大气能量的实际情况, 因此预计它对天气分析预报的研究将起更大的推动作用。

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., Available potential energy and maintenance of the general circulation, *Tellus*, 7, 157—167, 1955.
- [2] Dutton, J. A. and D. R. Johnson, The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics, *Advance in Geophysics*, 12, 333—436, 1967.
- [3] Van Mieghem, J., The energy available in atmosphere for conversion into kinetic energy, *Beitr. phys. Fr. Atmos.*, 29, 129—142, 1956.
- [4] Smith, P. J., On the contribution of a limited region to the global energy budget, *Tellus*, 21, 202—207, 1969.
- [5] Johnson, D. R., The available potential energy of storms, *J. Atmos. Sci.*, 27, 727—741, 1970.
- [6] Vincent, D. G., and L. N. Chang, Some further consideration concerning energy budgets of moving systems, *Tellus*, 25, 224—232, 1973.
- [7] Egger, J., Comments on "Zonal and eddy forms of the available potential energy equations in pressure coordinates," *Tellus*, 28, 377—378, 1976.
- [8] Smith, P. J., D. G. Vincent and H. J. Jr. Edmon, The time dependence of reference pressure in limited region available potential energy budgets of moving systems, *Tellus*, 29, 476—480, 1977.
- [9] Edmon, H. J. Jr., A reexamination of limited-area available potential energy budget equations, *J. Atmos. Sci.*, 35, 1655—1659, 1978.
- [10] Lorenz, E. N., Available energy and the maintenance of a moist circulation, *Tellus*, 30, 15—31, 1978.
- [11] 谢义炳, 湿斜压大气的天气动力学问题, 暴雨文集, 1—15, 吉林人民出版社, 1980.
- [12] 杨大升等, 动力气象, 1961.
- [13] Lorenz, E. N., The Nature and Theory of the general circulation of the atmosphere, W. M. O., 1967.
- [14] Lorenz, E. N., Numerical evaluation of moist available energy, *Tellus*, 31, 230—235, 1979.
- [15] K. Ninomiya, Variation in the heat energy budget over the East China Sea associated with the passage of wave cyclones in February 1968, *J. Met. S. Japan*, 51, 435—449, 1973.
- [16] 吴宝俊、蒋凤英, 湿有效位能的一种近似表达式及其计算方案, 气象科技, 1981年附刊(二), 1—4。
- [17] 陶诗言, 有关暴雨分析预报的一些问题, 大气科学, 1977, 第1期, 64—72。
- [18] 杨大升、刘余滨、刘式适, 动力气象学, 气象出版社, 1980。