

椭圆型方程的一个直接解法*

李荣凤 袁重光

(中国科学院大气物理研究所)

1. 引言

在数值天气预报以及动力气象问题的研究中,人们常常需要求解如下型式的椭圆型线性偏微分方程

$$\Delta F(x, y) - \mu^2 F(x, y) = G(x, y) \quad (1)$$

其中 μ 为常数,也可以为零。虽然近年来初始方程已经得到广泛应用,但是如(1)型式的准地转涡度方程仍然在有些国家的业务预告中使用,特别是在一些动力气象的研究工作中仍需大量应用,因此研究求解它的方法仍然是一个重要的课题。

(1)式最常用的解法是迭代法,近年来又发展了几种直接解法。迭代法收敛不快,有外推迭代、加进张弛因子的迭代以改进收敛速度,但是如后面还将叙述到的迭代法还有一些严重的缺陷不易克服。为了减小逐点迭代时误差的积累并加速收敛,Lorenz E. N.^[1]提出了一种推进—订正—推进的方法,采用了富氏变换及迭代法的混合。六十年代以来出现了大量的直接法,减少了计算量,提高了计算精度。其中较典型的如,Le Bail, R. C.^[2]应用快速富氏变换将二维问题化为一维问题,用高斯消去法求解;Ogura的降维法^[3],Hirota的广义括去法^[4],Rosmond^[5]的循环降维分解法,Leslie^[6]以及其他作者曾讨论比较了这些类型的解法,对于泊松方程来说,这些方法都能大大减少计算量,但是当 G 依赖于 F 时或 $\mu \neq 0$ 时都没有进行过讨论比较,它们大都存在问题甚至不能使用。其中有些方法编制程序比较繁复。至于快速富氏变换的采用,对于非线性的Helmholtz方程来说,相对于谱展开方法比较而言,它能够大大减少计算量,但仍然比差分迭代法慢。下面我们介绍一个完全的富氏变换解法,编制程序比较简便,克服了迭代法区域中心下降的严重缺陷,在保证精度的前提下,计算量能够与迭代法不相上下。我们在半球旋转适应过程的数值试验中部分采用了这一算法,取得了良好的结果。

2. 方案的推导

我们先以Poisson方程为例给出数学推导,然后再把它推广到Helmholtz方程。写出的Poisson方程如下:

$$\Delta f = g \quad (2)$$

上式的有限差分形式为

$$\begin{cases} \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = g_{i,j} \\ f|_{r=0} \end{cases} \quad (3)$$

* 本文于1980年3月18日收到,1982年3月21日收到修改稿。

我们不妨假设 $\Delta x = \Delta y = 1$, 则(3)式化为

$$(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}) = g_{i,j} \quad (4)$$

为清楚起见, 我们先单独讨论对 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 实行的 FFT 正、逆变换。

对 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 实行 x 和 y 方向的 FFT 正变换

$$\text{令 } W = e^{-\sqrt{-1} \frac{2\pi}{N}} \quad N = 2^\tau \text{ 是格点数, } \tau \text{ 是正整数}$$

$$F(p, y_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_j) W^{pi}$$

$$F(p, q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} F(p, y_j) W^{qj}$$

$$F(p, q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_j) W^{pi} \right] W^{qj} \quad (5)$$

$$G(p, q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i, y_j) W^{pi} \right] W^{qj} \quad (6)$$

再对 $F(p, q)$ 和 $G(p, q)$ 实行 y 和 x 方向的 FFT 逆变换:

$$F(p, y_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} F(p, q) W^{-qj} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} [F(p, q) * W^{qj}]^* \quad (7)$$

$$f(x_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} F(p, y_j) W^{-pi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} [F(p, y_j) * W^{pi}]^* \quad (8)$$

同样对 $G(p, q)$ 施行(7)和(8)那样的运算, 就得到 $g(x_i, y_j)$ 。这里 * 号表示取共轭复数。由(5)和(7), (8)式可见, 逆变换可以用正变换来表示, 从而可以利用同一个程序。以后为简便起见, 我们将用 $F_{p,q}, G_{p,q}$ 分别表示 $F(p, q), G(p, q)$, 而用 $f_{i,j}, g_{i,j}$ 分别表示 $f(x_i, y_j), g(x_i, y_j)$ 。

对方程(4)施行 x 方向 FFT 变换后, 就有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} [F_{p,j} (W^{-p} + W^p) + (F_{p,j+1} + F_{p,j-1} - 4F_{p,j})] W^{-pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} G_{p,j} W^{-pi} \end{aligned} \quad (9)$$

比较两边 W^{-pi} 的系数, 就得

$$F_{p,j} (W^{-p} + W^p) + (F_{p,j+1} + F_{p,j-1} - 4F_{p,j}) = G_{p,j} \quad (10)$$

令

$$\lambda_p = W^{-p} + W^p - 4 = 2 \cos \frac{2\pi p}{N} - 4 \quad (11)$$

则(10)化为

$$\lambda_p F_{p,j} + F_{p,j+1} + F_{p,j-1} = G_{p,j} \quad (12)$$

对(12)式再施行 y 方向的 FFT 变换, 就有:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} [\lambda_p F_{p,q} + F_{p,q} (W^{-q} + W^q)] W^{-q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^{N-1} G_{p,q} W^{-q}$$

比较两边 W^{-q} 的系数, 得到

$$\lambda_p F_{p,q} + F_{p,q} (W^{-q} + W^q) = G_{p,q} \quad (13)$$

令

$$\lambda_q = W^{-q} + W^q = 2 \cos \frac{2\pi q}{N}$$

有

$$(\lambda_p + \lambda_q) F_{p,q} = G_{p,q} \quad (14)$$

$$F_{p,q} = \frac{G_{p,q}}{\lambda_p + \lambda_q} \quad (15)$$

当网格点取定时, 可以首先算出 λ_p, λ_q . $g(x, y)$ 是已知的. 所以对 $g(x, y)$ 作 x, y 方向 FFT 变换后可得到变换系数 $G_{p,q}$, 由 (15) 式则可解得 $f(x, y)$ 的变换系数 $F_{p,q}$, 对 $F_{p,q}$ 再做 y, x 方向的 FFT 逆变换, 则得到 $f(x, y)$ 即是方程 (2) 的直接解.

上面整个过程可用下面流程表示

$$g_{i,j} \xrightarrow[\text{正变换}]{x \text{ 方向}} g_{p,q} \xrightarrow[\text{正变换}]{y \text{ 方向}} g_{p,q} \xrightarrow[\text{逆变换}]{\text{由 (15)}} f_{p,q} \xrightarrow[\text{逆变换}]{y \text{ 方向}} f_{p,q} \xrightarrow[\text{逆变换}]{x \text{ 方向}} f_{i,j} \quad (16)$$

在流程 (16) 中, 正、逆变换都可用同一型式的公式来实现, 对于编制计算程序是十分方便的.

今取赫姆霍兹方程

$$\Delta f(x, y) - \mu^2 f(x, y) = g(x, y) \quad (17)$$

不妨假设 μ 是常数, 用正方形网格. (17) 式的二阶有限差分形式为:

$$\begin{cases} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j}) + (f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - cf_{i,j}) = d^2 g_{i,j} \\ f|_{r=0} \end{cases} \quad (18)$$

其中 d 为格距, $c = 4 + \mu^2 d^2$. 同上述关于泊松方程的变换相类似, 即得

$$F_{p,q} = \frac{d^2 G_{p,q}}{\lambda_p + \lambda_q} \quad (19)$$

只是其中 λ_p 和 λ_q 取不同的值, 而是

$$\lambda_p = 2 \cos \frac{2\pi p}{N} - C \quad \lambda_q = 2 \cos \frac{2\pi q}{N}$$

其次, 流程 (16) 对赫姆霍兹方程显然也是适用的.

3. 计算结果及比较

我们用本文建议方案求解正压涡度方程

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = G \quad (20)$$

同时用差分迭代进行求解以资比较, 现将计算结果及比较讨论简述如下:

图 1 虚线是 φ 的初始场, 对于北极点是对称的, 按理说以后的流场也应具有同样的对称性. 图 2 是用差分迭代法求解的 120 小时预告图, 可以很明显地看出对称性已经被破坏,

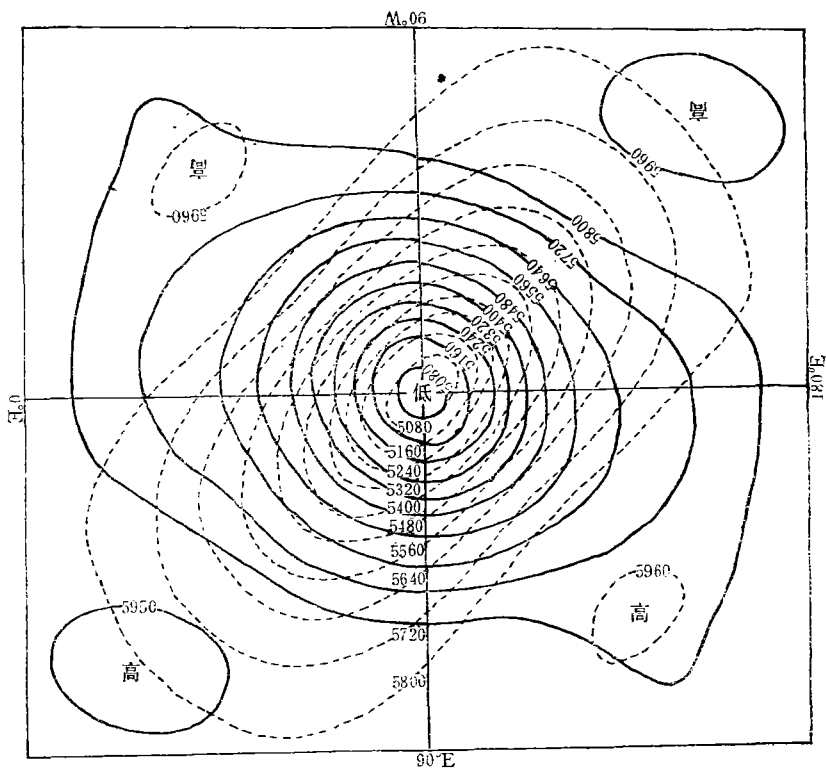


图 1

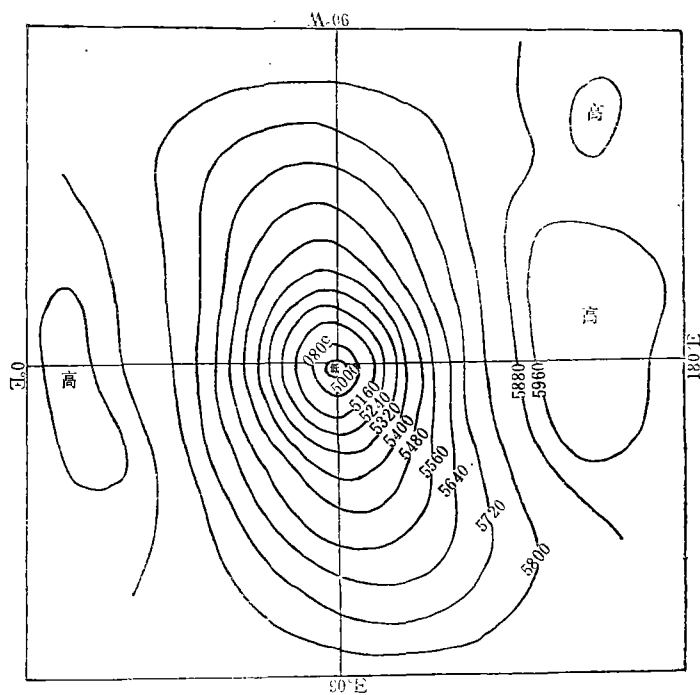


图 2

流场发生了很明显的歪曲。显然,这是外推迭代法误差积累的结果,Lorenz^[1]曾作了一个估算,外推每前进一位精度下降 $2\frac{1}{2}$ 个二进制位,只有当矩阵的行数和列数都很小时勉强可以用,而气象问题的特点是矩阵的行、列数都很大,这是产生明显歪曲的原因之一。原因之二是:气象问题往往需要反复求解方程(20),有时甚至要求解上千次才能得到最后的计算结果,这样每一次求解产生的歪曲又被严重地积累起来。当预告时间较短而流场本身又非严格对称时,这一点是不易被发现的。

图 1 中的实践是用本文提出的直接解法求解的结果,它在计算过程中对北极点始终是对称的,完全克服了外推迭代法产生的歪曲。

图 3 表示上述例子中区域中心点高度随时间的变化,图中曲线 A 是外推迭代法的结果,在 11 天的预告中高度持续下降,达 270 米之多。这一现象并非在所有计算例子中都会出现,但是一经出现就无法控制,过去许多人曾经多次碰到同类问题,而且减小迭代收敛误差反而使这一现象更为严重,发生这一现象的原因至今尚未得到解释。图中曲线 B 是用同样的初始场但采用本文解法计算的结果,变化的幅度是很小的,与天气实践相符。由此可见,本文建议的求解方法也可以较满意地克服了迭代法的这一缺陷。

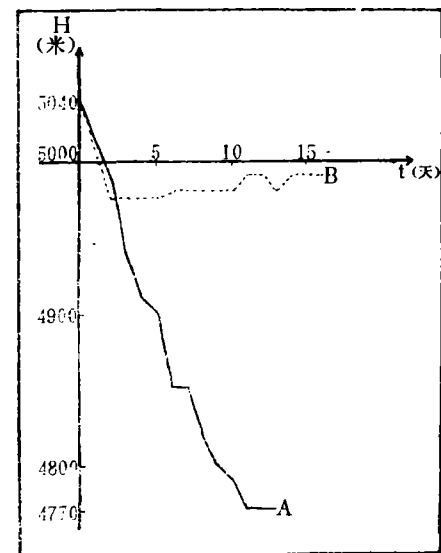


图 3

由于计算中对各个量需要正、逆变换,在格点数相近时直接法所需计算量比差分法有所增加,我们作了试验比较,当变换法采用比迭代法大一倍的网格距时,其解的精度仍然高于迭代法,这样就大大减少了总的计算量,使使用的计算机时间少于迭代法。此外,气象问题上往往只需要实数部分的运算,这样计算也可进一步减少,使得本文建议求解方法在速度上大大高于迭代法。

本方法的推导曾请王宗浩同志审阅,特此感谢。

参 考 文 献

- [1] Lorenz E. N., A Rapid Procedure for Inverting Del-Square with Certain Computers, *M. W. R.*, 104, No. 7, July, 1976.
- [2] Le Bail R. C., Use of Fast Fourier Transforms for Solving Partial Difference Equations in Physics, *J. of Comput. phy.*, 9, No. 3, June, 1977.
- [3] Ogura, Nasako, A Direct Solution of Poisson's Equation by Dimension Reduction Method, *J. M. S. J.*, 47, No. 4, Aug., 1969.
- [4] Hirota I., T. Tokioka and M. Nishiguchi, A Direct Solution of Poisson's Equation by Generalized Sweep-out Method, *J. M. S. J.*, 48, No. 2, Apr., 1970.
- [5] Thomas E. Rosmond and Frank D. Faulkner, Direct Solution of Elliptic Equation by Block Cyclic Reduction and Factorization, *M. W. R.*, 104, No. 5, May, 1976.
- [6] Leslie L. M. and B. J. McAvaney, Comparative Test of Direct and Iterative Methods for Solving Helmholtz-Type Equations, *M. W. R.*, 101, No. 3, Mar., 1973.