

应用变分原理积分正压原始方程*

王晓林 夏大庆 吴辉碇

(北京大学地球物理系)

提 要

将正压原始方程组无量纲化以后, 把量级近似相当的动能与有效位能之和守恒作为变分约束条件, 有效地控制了非线性不稳定, 使长时间积分中能保持总能量守恒。其结果可和其它积分方法相比。

一、引 言

积分原始方程模式的要点之一, 是要保持积分区域内能量守恒。一般采用守恒的差分格式^[1]。如将变分方法用于积分原始方程组, 对能量守恒实行变分约束, 也可避免非线性不稳定, 而保持能量守恒。

佐佐木曾设计了一种用于一维正压模式的变分约束方案^[2-3]。本文推广到二维的情况, 通过将正压原始方程组中量级近似相当的动能与有效位能之和守恒作为变分约束条件, 以抑制非线性不稳定。

在有限区域、固定边条件、边界内一圈进行平滑的情况下, 时间积分正压原始方程组时, 常常出现动能持续下降、系统逐渐减弱的现象。即使采用没有平滑作用的时, 空差分格式(如中央差), 也不能避免这一趋势。这里, 我们试图用变分方法对正压原始方程组实施能量守恒约束, 希望能抑制这一趋势。

二、正压原始方程变分约束

正压大气的控制方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, h 为自由面高度, 其它符号是气象上常用的。易于证明, 在水平闭合区域 σ 内, 总能量是守恒的, 即

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} (u^2 + v^2 + gh) h d\sigma = 0$$

* 本文于1979年7月10日收到, 1980年2月1日收到修改稿。

$$\text{或} \quad \int_{\sigma} (u^2 + v^2 + gh)hd\sigma = \text{常数} \quad (2)$$

上式为时间积分过程中的能量约束条件。

令 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{h} 为积分过程中的预报值, u 、 v 、 h 为调整后的值。在时间积分过程中, 通过变分约束, 使由 u 、 v 、 h 算得的总能量与初始总能量 T_0 之差的绝对值小于某一给定小量时, 便认为遵守总能量守恒定律(2)。此外, 还要求离差 $(u - \bar{u})$ 、 $(v - \bar{v})$ 、 $(h - \bar{h})$ 的权重和在全区域的积分最小。根据变分原理, 这就是求泛函

$$J = \sum_{i,j} [\alpha(u_{i,j} - \bar{u}_{i,j})^2 + \alpha(v_{i,j} - \bar{v}_{i,j})^2 + \beta(h_{i,j} - \bar{h}_{i,j})^2] + \lambda \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j} [h_{i,j}(u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2) + gh_{i,j}^2] - T_0 \right\} \quad (3)$$

的极值。式中, α 、 β 为相对权重, λ 为拉格朗日乘子。 α 、 β 给定, λ 由解方程得到。

按理, 积分过程中, 应用上述变分约束可使总能量近于守恒。但是, 由于位能比动能大 2—3 个量级, 变分约束主要对位能起作用, 不能充分有效地限制速度场的解。如果应用动能与有效位能之和守恒的性质, 对这两个量级近似相当的物理量之和实行变分约束, 有可能收到较好的效果。

为此, 将控制方程组无量纲化, 得到

$$\begin{cases} \frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) - fVv' + \frac{gH}{L} \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \\ \frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + fVu' + \frac{gH}{L} \frac{\partial h'}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial(h'u')}{\partial x'} + \frac{\partial(h'v')}{\partial y'} + \bar{h} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中, \bar{h} 为无量纲平均高度, h' 为无量纲扰动高度。 $u = Vu'$, $v = Vv'$, $(x, y) = (x', y')$, L , $h = H(\bar{h} + h')$, $t = \frac{L}{V}t'$ 。特征量取 $L = 10^6$ 米, $H = 10^4$ 米, $V = 10$ 米/秒, 将 h 分成 $H\bar{h}$ 和 Hh' 两部分, 可以把有效位能从总位能中分出来。总能量守恒演变为动能与有效位能之和守恒, 即

$$\frac{H}{2} \int_{\sigma} [V^2(\bar{h} + h')(u'^2 + v'^2) + gHh'^2]d\sigma = \text{常数}$$

对应于差分的控制方程组, 有

$$\sum_{i,j} [V^2(\bar{h} + h'_{i,j})(u'_{i,j}^2 + v'_{i,j}^2) + gHh'_{i,j}^2] = T_0 \quad (5)$$

相应的泛函为

$$J' = \sum_{i,j} [\alpha V^2(u'_{i,j} - \bar{u}'_{i,j})^2 + \alpha V^2(v'_{i,j} - \bar{v}'_{i,j})^2 + \beta H^2(h'_{i,j} - \bar{h}'_{i,j})^2] + \lambda \left\{ \sum_{i,j} [V^2(\bar{h} + h'_{i,j})(u'_{i,j}^2 + v'_{i,j}^2) + gHh'_{i,j}^2] - T_0 \right\} \quad (6)$$

式中, α 、 β 和 λ 的意义同前。若认为 u 、 v 和 h 具有同量级误差, 则调整率也应相同, 得

到比例关系 $\beta/\alpha = g/\bar{h}H$ 。如认为流场比气压场更可信,则可令 $\alpha=1$, 于是 $\beta = g/\bar{h}H$ 。由(6)的变分为零, 即 $\delta J' = 0$ 。

用间接解法可得 Euler-Lagrange 方程组

$$\alpha(u'_{ii} - \bar{u}'_{ii}) + \lambda \bar{h} u'_{ii} + \lambda h'_{ii} u'_{ii} = 0 \quad (7)$$

$$\alpha(v'_{ii} - \bar{v}'_{ii}) + \lambda \bar{h} v'_{ii} + \lambda h'_{ii} v'_{ii} = 0 \quad (8)$$

$$2\beta H^2(h'_{ii} - \bar{h}'_{ii}) + \lambda V^2 u'^2_{ii} + \lambda V^2 v'^2_{ii} + 2\lambda g H h'_{ii} = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{ii} [V^2(\bar{h} + h'_{ii})(u'^2_{ii} + v'^2_{ii}) + g H h'_{ii}] - T_0 = 0 \quad (10)$$

(7)–(9)联立求解得

$$u'_{ii} = \frac{\bar{u}'_{ii}}{1 + \lambda(\bar{h} + h'_{ii})} \quad (11)$$

$$v'_{ii} = \frac{\bar{v}'_{ii}}{1 + \lambda(\bar{h} + h'_{ii})} \quad (12)$$

$$h'_{ii} = \frac{\bar{h}'_{ii}(1 + \lambda\bar{h})}{(1 + \lambda\bar{h})^2 - 2\lambda\bar{h}'_{ii}} - \frac{\lambda V^2(\bar{u}'^2_{ii} + \bar{v}'^2_{ii})\bar{h}}{2gH(1 + \lambda\bar{h})[(1 + \lambda\bar{h})^2 - 2\lambda\bar{h}'_{ii}]} \quad (13)$$

将(11)–(13)代入(10)。由于 λ 很小, 故可略去其高次项, 得

$$\lambda = \frac{V^2 \left[\bar{h} \sum_{ii} (\bar{u}'^2_{ii} + \bar{v}'^2_{ii}) + \sum_{ii} \bar{h}'_{ii} (\bar{u}'^2_{ii} + \bar{v}'^2_{ii}) \right] + gH \sum_{ii} \bar{h}'^2_{ii} - T_0}{\bar{h} \left[3T_0 - \bar{h} V^2 \sum_{ii} (\bar{u}'^2_{ii} + \bar{v}'^2_{ii}) - gH \sum_{ii} \bar{h}'^2_{ii} \right]} \quad (14)$$

考虑 $\bar{h} \gg h'$, 以

$$\begin{cases} u'_{ii} = \frac{\bar{u}'_{ii}}{1 + \lambda\bar{h}} \\ v'_{ii} = \frac{\bar{v}'_{ii}}{1 + \lambda\bar{h}} \\ h'_{ii} = \frac{\bar{h}'_{ii}}{1 + \lambda\bar{h}} \end{cases} \quad (15)$$

作为迭代初值, 用迭代法求解 u'_{ii}, v'_{ii} 和 h'_{ii} 。

当 T_0 与由变分后 u'_{ii}, v'_{ii} 和 h'_{ii} 算得的总能量 T 之差的绝对值小于某一给定的小量时 (在我们的试验中, 取 $|T - T_0| < 10^{-4} T_0$), 调整即告结束。在较长时间积分后, 仍会产生一些误差。但如迭代终止条件取得更小, 计算时间花费太多。

三、二维理想场试验

为了试验在二维情况下, 能量守恒变分约束对非线性不稳定的控制能力, 我们取两种初始高度场^[1]。

$$I. \quad h(x, y) = H_0 + H_1 \text{th} \frac{9(y - y_0)}{2D} + H_2 \text{sh}^2 \frac{9(y - y_0)}{D} \sin \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad h(x, y) = & H_0 + H_1 \text{th} \frac{9(y-y_0)}{2D} + H_2 \text{sh}^2 \frac{9(y-y_0)}{D} \\
 & \cdot \left[0.7 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 0.6 \sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right) \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

式中, L 是区域长度, D 是宽度。 $y_0 = D/2$ 。 有关常数取为

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 5500 \text{ 米} & L &= 6000 \text{ 公里} \\
 H_1 &= -220 \text{ 米} & D &= 5200 \text{ 公里} \\
 H_2 &= 133 \text{ 米} & f &= 10^{-4} \text{ 秒}^{-1} \\
 g &= 9.8 \text{ 米/秒}^2 & \Delta x = \Delta y &= 300 \text{ 公里}
 \end{aligned}$$

在南、北边界, 等高线与边界平行, 从而保证边界的法向通量为零。 另外, 区域内均有西风急流带。 I 类初值为一个波, II 类初值还包含三个短波。

初始风场由地转关系求得, 南、北取固定边条件, 东、西取周期性边条件。 在约束条件下, 用易于产生非线性不稳定的时、空中央差分格式积分无量纲化的控制方程组 (4), 时间步长取 10 分钟, 使用时间平滑, 以抑制计算解。

对初值 I、II 分别进行有、无变分约束的试验, 结果如图 1 所示。 在无变分约束的情况下, 初值 I 积分至第 4 天, 初值 II 积分 2 天后, 总能量开始迅速增长。 实行变分约束后, 非线性不稳定受到了抑制。 初值 I、II 积分到 40 天, 总能量都仍近于常值。

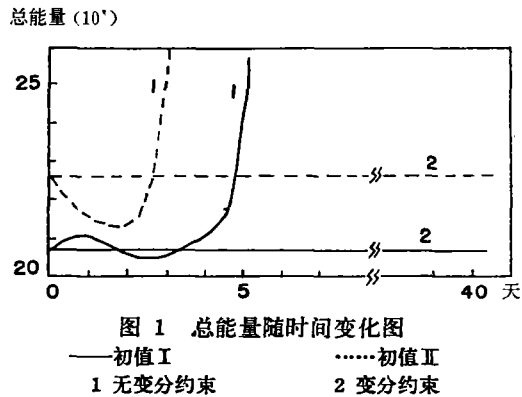


图 1 总能量随时间变化图

— 初值 I
 初值 II
 1 无变分约束 2 变分约束

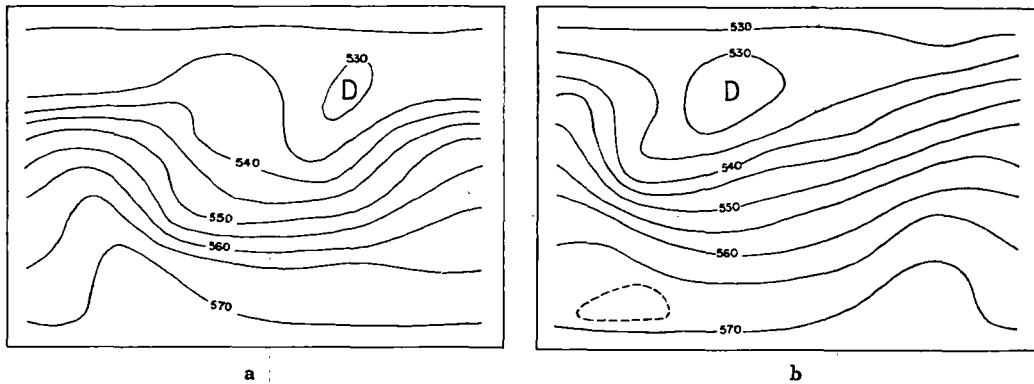


图 2 初值 II 5 天(a)和 10 天(b)预报图

图 2(a)、(b)分别为初值 II 的第 5 天和第 10 天预报图。 预报场是光滑的, 图中急流很清楚, 槽脊也很明显。

为进一步考察积分过程中, 变分约束对抑制非线性不稳定的作用, 又对一维情况下作了较长时间的试验。 在满足线性稳定性条件下, 积分平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

给定两种初值

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x \tag{19}$$

$$u(x, 0) = 1.5 + \sin 2\pi x \tag{20}$$

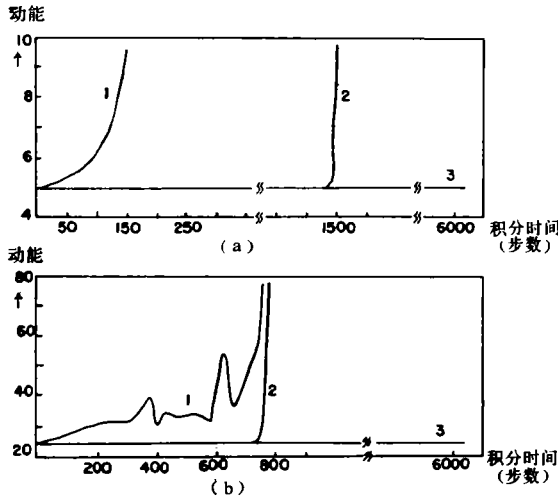


图 3 时、空中央差分下，动能随时间变化图

- ((a) 初值(19) 1 无变分约束，
- 2 每 10 步变分约束一次，
- 3 每 5 步变分约束一次；
- (b) 初值(20) 1 无变分约束，
- 2 每 5 步变分约束一次，
- 3 每 2 步变分约束一次。)

格距取 300 公里，仍用时、空中央差分格式。图 3 给出动能随时间变化。无变分约束的情况下，对于没有基本气流的初值 (19)，仅积分到 80 步就出现不稳定；对于有基本气流的初值 (20)，计算不到 800 步也出现不稳定。试验结果表明，对于初值(19)，每 5 步变分约束一次，对于初值(20)，每 2 步变分约束一次，都能保证稳定地积分到 6000 步以上，相当于 200 多天。

四、实例计算

以 1978 年 4 月 3 日 08 时 500 毫巴高度场作为初始场，取地转风初值，分别对无变分约束、总能量守恒变分约束、动能与有效位能之和守恒变分约束三种情况进行试验。图 4 表明，无变分约束时，48 小时后动能损失 16%；总能量守恒变分约束下，动能损失也达 15.5%；而动能与有效位能之和守恒变分约束下，动能仅损失 8%，动能下降的趋势受到部分控制。动能的损失可能来自两个方面：一是变分调整的误差，二是为了抑制计算解而施行的时间平滑。

明，无变分约束时，48 小时后动能损失 16%；总能量守恒变分约束下，动能损失也达 15.5%；而动能与有效位能之和守恒变分约束下，动能仅损失 8%，动能下降的趋势受到部分控制。动能的损失可能来自两个方面：一是变分调整的误差，二是为了抑制计算解而施行的时间平滑。

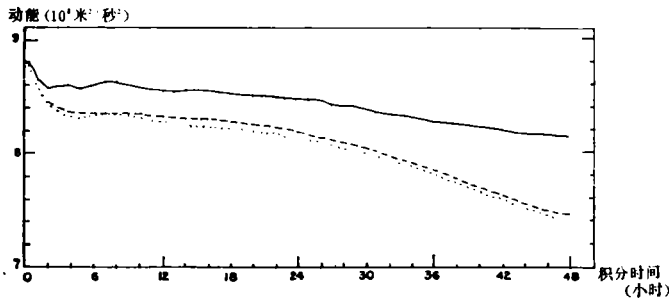


图 4 动能随时间变化图
 (— 动能与有效位能之和守恒变分约束；
 - - - 总能量守恒变分约束；
 无变分约束。)

比较以上三种情况下，沿 $45^{\circ}N$ 纬圈， $50^{\circ}-140^{\circ}E$ 的 48 小时高度廓线预报及实况 (图 5)，可以看出，以动能与有效位能之和守恒变分约束的预报结果最接近于实况。即使积分时间较短，其优越性已明显可见。

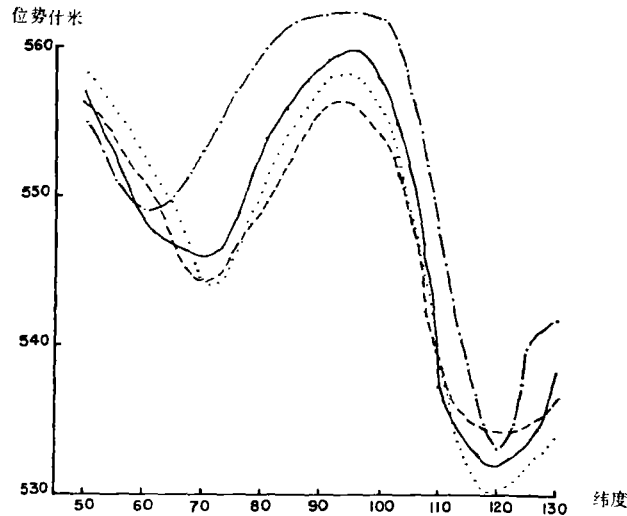


图 5 1978 年 4 月 5 日 08 时(48 小时预报)500 毫巴、 $45^{\circ}N$ 纬圈高度廓线图

(—实况;
 ····无变分约束;
 -·-·-·总能量守恒变分约束;
 ·····动能与有效位能之和守恒变分约束。)

五、结 语

对控制方程组无量纲化后，在时间积分过程中施以动能与有效位能之和守恒变分约束，这是一种行之有效的抑制非线性不稳定的方法。它不需要加平滑或粘性耗散项等来削弱扰动振幅。时间积分过程中加上变分约束，也比其它方法节省计算时间。个例预报表明，在这种约束下，动能损失最小，预报的槽脊强度也更接近于实况。

参 考 文 献

- [1] Grameltvad, A., A Survey of Finite-Difference Schemes for the Primitive Equations for a Barotropic Fluid, *Monthly Weather Review*, **97**, 384-404, 1969.
- [2] Sasaki, Y. K., Variational Design of Finite-Difference Schemes for Initial Value Problems with a Global Divergent Barotropic Model, *Contribution to Atmospheric Physics*, **50**, 284-289, 1977.
- [3] Sasaki, Y. K., Variational Design of Finite-Difference Schemes for Initial Value Probs with an Integral in variant, *Journal of Computational Physics*, **21**, 270-278, 1976.

INTEGRATION OF THE BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATIONS BASED ON THE VARIATIONAL PRINCIPLE

Wang Xiao-lin, Xia Da-qing, Wu Hui-ding

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

In this paper, a time integral scheme based on variational principle is presented. The dimensionless form of the primitive equations is taken into account and the sum of the kinetic and available potential energies is used as the variational constraint condition in order to prevent the nonlinear instability during long-term numerical integration. The results are comparable with those used by other integral methods.