

正压大气中长波的演变*

卢 佩 生

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文研究正压大气中非均匀气流(特别是非平直基流)上扰动的演变过程,对[1]进行了推广,对迭加于超长波基流之上的长波扰动和迭加于超长波或长波基流之上的中、短波的扰动的演变特性进行了统一的处理。结果表明:当小槽、小脊的波长变长时,其振幅(能量)增大,扰动发展;波长变短时,振幅变小,扰动衰减。当小扰动已经发展成长波的时候,或者当我们一般地研究长波的演变过程的时候,则上述规律更为明显,即长波发展时,波长变长更为明显;长波衰减时,波长变短也更为明显。利用这些结果,可以解释大气中槽、脊发展时总是伴随着扰动加宽,而槽、脊收缩时,波长很快减小。其次,扰动发展与否完全由扰动的结构所决定,其中主要是由扰动轴线的方向及其与基流的相对位置所决定。北半球发展型扰动的轴线是:在急流以北呈东北—西南向,急流南呈西北—东南向;而衰减型的轴线是:急流北呈西北—东南向,急流南呈东北—西南向。这些结论和角动量传送理论结果以及天气实际都是符合的。

一、引 言

高空图中的槽、脊或即大气长波随时间的演变过程是天气预报的主要对象之一。长波的演变过程随基本气流(背景场)和自身的结构等因子的不同而异,分析其中的规律性是很重要的。由于在一般的情况下,基本气流不是平直的,例如,研究一个小槽或者一个和气旋相联系的长波槽、脊是否发展,我们必须考虑它们是迭加在大槽大脊这样的弯曲气流之上的。所以,研究非平直气流情况下扰动的演变过程更有一般性,也更有实际意义。在[1]和[2]中,曾建议用 WKBJ 方法进行研究,并取得了一些很有意义的结果。不过,那里主要是讨论小槽、小脊的演变过程。当小槽已发展成长波的时候,所得结论是否适用呢?或者,当我们直接考察一个长波扰动(槽、脊)的时候,它的演变过程又将是怎样的呢?为此,本文将推广[1]的方法和结果,将长波和小槽小脊作统一的处理,特别是讨论长波的演变过程的规律性。结果表明,[1]和[2]中的结论仍然正确,而且更为明显。本文仍只使用正压大气模式,而在另一篇文章中,我们再给出斜压性的影响。

二、基 本 方 程

取直角坐标下的正压准地转模式

$$\frac{d}{dt}(\Delta\psi - \kappa\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = \mathcal{E}, \quad (1)$$

* 本文于1980年1月28日收到,1980年5月10日收到修改稿。

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

$$u = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

其中 ψ 为流函数, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为平面拉氏算子, $\Delta \Psi - \kappa \psi$ 为准地转位涡度, $\beta = \frac{df}{dy}$ 为 Rossby 参数 (取为常数), $\kappa = f_0^2 / \bar{\phi}$ 为常数, f_0 为标准纬度的科氏参数, $\bar{\phi}/g$ 为等效均质大气的平均高度, 而 \mathcal{E} 就是源影响项。

设有基流 $\bar{\psi}(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t) = \bar{\psi} + \Psi'(x, y, t)$, Ψ' 就是我们所要讨论的长波或小槽、小脊等小扰动。并设 $\bar{\psi}(x, y, t)$ 为已知。今按基流结构和特性引入特征量: 时间尺度 T , 速度尺度 U , 长度尺度 L , 并取 $T = L/U$ (这对于涡旋波或即由方程(1)所决定的扰动来说是合适的), 以及特征量 $\Phi = UL$, 而 $\Phi = gZ = \Psi f_0$ 则是基流所代表的对平均值 $\bar{\phi}$ 的扰动重力位势的特征量。令无量纲量为 t_1, x_1, y_1, ψ_1 等, 即

$$t = T t_1, (x, y) = L(x_1, y_1), \psi = \Psi \psi_1,$$

代入(1), 即得无量纲方程

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t_1} + J(\psi_1, \Delta \psi_1) - \frac{f_0 L^2}{\bar{\phi}} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} + \frac{f_0 L^2}{aU} \beta_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \frac{L^2}{U^2} \mathcal{E}. \quad (2)$$

其中 Δ 和 $J(A, B)$ 为在坐标 (x_1, y_1) 中的拉氏算子和雅可比算子, a 为地球半径, 而 $\beta_1^* \equiv \sin \varphi$, φ 为纬度。再记

$$\begin{cases} \mu^{-2} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2, \\ \varepsilon^{-2} = \left(\frac{L}{L_0^*}\right)^2, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} L_0^2 = \frac{\bar{\phi}}{f_0^2}, \\ L_0^{*2} = \left(\frac{\Phi}{f_0^2}\right) \frac{a}{L} = \left(\frac{\Phi}{\bar{\phi}}\right) \left(\frac{a}{L}\right) L_0^2 = \left(\frac{a}{L}\right) L_0^{*2} \end{cases} \quad (4)$$

L_0 和 L_0^* 定义出另外两个特征长度, 其中 L_0 只与环境条件 ($\bar{\phi}, f_0$) 有关, 而 L_0^* 则还和基流自身的特性 (Φ, L) 有关, 将(3), (4)代入(2), 即可将(2)改写成更便于分析的形式

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) + \mu^{-2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varepsilon^{-2} \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = T^2 \mathcal{E}. \quad (5)$$

这里我们已将无量纲量的付标略去, 下同。

三、超长波和长波

按照 μ^{-2} 的大小, 可以将流场分为超长波、长波和中、短波, 即定义 $L/L_0 \gg 1$ 为超长波, $L/L_0 \approx 1$ 为长波, $L/L_0 \ll 1$ 为中、短波。一般常取等效均质大气高度 $\bar{Z} = \bar{\phi}/g^{-1}$ 约为 10 公里, 若取中纬度作为标准纬度, 就有 $f_0 \approx 10^{-4} \text{秒}^{-1}$, 由此算得 $L_0 \approx 3000$ 公里。于是上述关于超长波、长波和中、短波的划分和气象上通常的划分是一致的。

现在估计 L_0^* ，高空等压面位势偏差的特征量 Φ 一般为 1 公里，故 $\Phi/\bar{\phi} \approx 0.1$ 。故 $L_0^{*2} \approx 0.1 L_0^2$ 。对于超长波， $L_0 \ll L \approx a$ ，于是有 $L_0^* \approx \sqrt{0.1} L_0 \approx 0.3 L_0$ ，即 L_0^* 约为 1000 公里；对于长波， $L \sim 3000-1000$ 公里， L_0^* 接近于 L_0 。由此可以估计出 ε^{-2} 的数值如下：对于超长波， $\varepsilon^{-2} \geq 6^2$ ；对于长波， $\varepsilon^{-2} \approx 1$ 。

对于超长波来说，除非

$$\varepsilon^{-2} \beta^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx T^2 \mathcal{E}, \quad (6)$$

否则由(5)算得的 $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ 的量级亦将是 $O(\varepsilon^{-2})$ ，即超长波以比 U 大一个数量级的速度传播着¹⁾，这与原假设 $T=L/U$ 不符，而且在天气图中也并没有观测到这样快的传递，故与实际亦不符。由此可见，(6)应该成立。这或者是 $\partial \psi / \partial x \approx 0$ ，即环流基本上是纯带状纬围环流，南北风分量很小；或是南北风的作用正好和源作用项 \mathcal{E} 相平衡。由此可见，振幅较大的超长波是受外源控制的。当取超长波作为基流时，在基流方程中含有源影响的项，即

$$\frac{\partial \Delta \bar{\psi}}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \Delta \bar{\psi}) - \mu^{-2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \varepsilon^{-2} \beta^* \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = T^2 \bar{\mathcal{E}}. \quad (7)$$

对于长波或平直气流来说，(5)式左端各项有相同量级，若取长波为基流，则(7)仍对，不过这时源作用项 $T^2 \mathcal{E}$ 也可以不起重要作用，甚至可以略去。一般来说，当只讨论长波结构引起的演变过程时，常略去含 \mathcal{E} 项。

四、扰动方程及其求解方法

用(5)减去(7)，并略去非线性项，即得线性化小扰动方程为

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + J(\psi', \Delta \bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \Delta \psi') - \mu^{-2} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \varepsilon^{-2} \beta^* \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

在(7)中我们已略去了源作用项 \mathcal{E} 的扰动 \mathcal{E}' ，因为我们所要讨论的对象是长波和中、短波的小扰动的演变，如前所述，这是允许的。

(8)式对于迭加于超长波或长波基流上的扰动都是对的。对于长波基流， $\varepsilon \approx 1$ ， $\mu^{-2} \approx 1$ ，在(8)中没有小参数，当应用 WKB 方法时，就得直接由“扰动为中小尺度的”而引进小参数(见[1])。但若基流为超长波， ψ' 为长波以下波长的扰动，则因(8)中的 ε 就是小参数，可以统一地利用它作为小参数。今讨论这种情况。令

$$\psi' = \hat{\psi}(x, y, t) e^{i\varepsilon^{-1}\theta(x, y, t)} \quad (9)$$

$$\hat{\psi} = \psi_0(x, y, t) + \varepsilon \psi_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \psi_2(x, y, t) + \dots \quad (10)$$

并记

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\varepsilon \partial t} \equiv -\varepsilon^{-1} \sigma(x, y, t), \\ \frac{\partial \theta}{\varepsilon \partial x} \equiv \varepsilon^{-1} m(x, y, t), \\ \frac{\partial \theta}{\varepsilon \partial y} \equiv \varepsilon^{-1} n(x, y, t). \end{cases} \quad (11)$$

1) 换句话说，若(6)不成立，则我们不能取 $T=L/U$ ，而应取 $O(T) < O(L/U)$ 。

设 ψ 和 θ 以及 σ , m 和 n 都是自变量 (x, y, t) 的缓变函数, 即其量级为 $O(1)$ 。按(11)可知: $\varepsilon^{-1}\sigma$ 和 $(\varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n)$ 分别是扰动(波包)的无量纲局地瞬时频率和无量纲局地瞬时波数。因 $\varepsilon \approx 10^{-1}$, 而 $O(m, n) = O(1)$, 故 $O(\varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n) = O(\varepsilon^{-1}) = O(10)$, 即相对于基流的特征尺度 L^* 而言, 其波数量级为 $O(\varepsilon^{-1})$, 故扰动的波长为 $L_1 \approx \varepsilon L^*$ 。今 L^* 为超长波, 故扰动 ψ' 为长波。

再将(8)改写成

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \varepsilon^2 J(\psi', \Delta \bar{\psi}) + \varepsilon^2 J(\bar{\psi}, \Delta \psi') - (\mu^*)^{-2} \frac{\partial \psi'}{\partial t} + \beta^* \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

其中 $\mu^* = \varepsilon^{-1}\mu$ 。对于迭加于超长波基流上的长波扰动而言, 有 $\mu^* \approx 3$ 。故含有 $(\mu^*)^{-2} \frac{\partial \psi'}{\partial t}$ 的一项比 $\beta^* \frac{\partial \psi'}{\partial x}$ 的量级要小, 本也可以略去, 不过保留此项亦不妨碍。

将(10)–(11)代入(12), 按 ε 的幂次集项。 ε^{-1} 项给出频率方程

$$[\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})][(m^2 + n^2 + \mu^{*-2}) + \mu^{*-2}(m\bar{u} + n\bar{v}) + \beta_m^*] = 0. \quad (13)$$

ε^0 项给出

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} [(m^2 + n^2 + \mu^{*-2})\psi_0] - \beta^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - [\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})] \cdot \\ \cdot \left[2 \left(m \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + n \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) + \psi_0 \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (15)$$

(13)和(14)就是讨论扰动演变过程的基本关系式。

如基流为长波, 则因在(8)中的 μ^{-2} 和 $\varepsilon^{-2}\beta^*$ 量级都为 $O(1)$ 。并记 $\varepsilon^{-2}\beta^* = \beta^{**}$, 我们取另一参数 $\varepsilon' \ll 1$, 并用 ε'^2 通乘(8)两边, 然后将 ε' 改写成 ε , 就又得到了(12)式, 只不过这时 $\beta^* \equiv \varepsilon^2 \beta^{**}$ 和 $(\mu^*)^{-2} \equiv \varepsilon^2 \mu^{-2}$ 的量级都是 $O(\varepsilon^2)$, 是二个少量罢了。仍取(9)–(11), 结果就又得到(13)和(14), 可见(13)和(14)对于长波以及中短波都是适用的。只不过对于迭加于长波上的中、短波小扰动来说, 既然 μ^{*-2} 和 β^* 为少量, 就可在(13)中略去它, 于是(13)和(14)简化为

$$\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v}) = 0, \quad (13)'$$

$$\frac{D}{Dt} [(m^2 + n^2)\psi_0] = 0. \quad (14)'$$

这就是[1]的结果。(在[1]中 σ 定义为 $\partial\theta/\partial t$, 和本文差一个符号)。若 $\bar{v} = 0$, $\bar{u} = \text{常数}$, 则(13)就是一般的 Rossby 波传速公式。可见(13)和(14)比(13)'和(14)'更准确些, 而且可以同时适用于长波和中、短波扰动。

五、波长和波射线的变化

波包在非均匀基流上传播时, 按(11)定义的频率 $\varepsilon^{-1}\sigma$ 和波数 $\varepsilon^{-1}m, \varepsilon^{-1}n$ 等只有瞬时和局地的意义, 在演变过程中, 它们将会起变化。

先引入群速度 $\vec{c}_r = \vec{i}c_{rx} + \vec{j}c_{ry}$ 。记 $\sigma = \sigma(m, n, \bar{u}, \bar{v})$, 则有

$$c_{rx} = \frac{\partial \sigma}{\partial m}, \quad c_{ry} = \frac{\partial \sigma}{\partial n}. \quad (16)$$

下节我们将具体说明波包以群速度 \bar{c}_g 传播, 由(13)不难给出群速度随 m, n 的变化的具体公式。其次, 按(11)的定义, 显然又有

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (17)$$

再引入记号

$$\frac{D_g}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial}{\partial x} + c_{gy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (18)$$

利用(17)即可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} &= - \left[\frac{\partial \sigma}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] \\ &= -c_{gx} \frac{\partial m}{\partial x} - c_{gy} \frac{\partial m}{\partial y} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

故有

$$\frac{D_g m}{Dt} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right). \quad (19)$$

同理得

$$\frac{D_g n}{Dt} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \quad (20)$$

$$\frac{D_g \sigma}{Dt} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right). \quad (21)$$

由此又可得到沿波射线的波数 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 以及波射线的方向 (由 n/m 表示) 的改变方程为

$$\frac{D_g (m^2 + n^2)}{Dt} = -2 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + n \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + n \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_g \left(\frac{n}{m} \right)}{Dt} &= \frac{1}{m^2} \left(m \frac{D_g n}{Dt} - n \frac{D_g m}{Dt} \right) \\ &= -\frac{1}{m^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} \left(m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \left(m \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - n \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

(19)–(23)完全是运动学关系式, 与 σ 的具体形式无关。当 σ 由(13)给出时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{u}} &= -m \left[\frac{m^2 + n^2}{\eta} \right], \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} &= -n \left[\frac{m^2 + n^2}{\eta} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\eta \equiv m^2 + n^2 + \mu^{*-2}. \quad (25)$$

当忽略 μ^{*-2} 时, $\eta^{-1}(m^2 + n^2) = 1$, (24)就退化为 $\partial \sigma / \partial \bar{u} = -m$, $\partial \sigma / \partial \bar{v} = -n$, 这就是[1]和[2]的结果。注意到 $\eta^{-1}(m^2 + n^2) > 0$, 故当取(13)时, [1]中关于波长和波射线变化的分析仍然有效。例如: 急流以北的导槽 (槽线西北-东南走向) 和急流南的曳槽 (槽线为东北-西南走向) 的波长将随时间变短, 槽线日趋向东、西方向; 而急流南的导槽和急流北的曳槽的波长将随时间变长, 槽线日趋南北方向。这些规律对于中短波和长波都是对的。

六、波包振幅和能量的变化

利用(14)和(22)就可以讨论波包振幅和能量的变化。

由(13)可得

$$\begin{cases} \eta c_{gx} = \eta \frac{\partial \sigma}{\partial m} = (m^2 + n^2)\bar{u} - 2m[\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})] - \beta^*, \\ \eta c_{gy} = \eta \frac{\partial \sigma}{\partial n} = (m^2 + n^2)\bar{v} - 2n[\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})]. \end{cases} \quad (25)$$

将(25)代入(14), 可得

$$\eta \frac{D_{\mathbf{e}} \psi_0}{Dt} + \psi_0 \left\{ \frac{D\eta}{Dt} - [\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})] \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right) \right\} = 0. \quad (26)$$

我们还需要作进一步的变换。首先, 利用(25)和(22)可得下列关系式

$$\frac{\partial \eta c_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial \eta c_{gy}}{\partial y} = 2 \frac{D\eta}{Dt} - 2[\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})] \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\eta}{(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt},$$

由此推得:

$$\begin{aligned} \frac{D\eta}{Dt} - [\sigma - (m\bar{u} + n\bar{v})] \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \eta c_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial \eta c_{gy}}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \\ &+ \frac{\eta}{2(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} = \left[1 + \frac{\mu^{*-2}}{2(m^2 + n^2)} \right] \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial c_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial c_{gy}}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

将(26)代入(26), 即得

$$\left(\eta \frac{D_{\mathbf{e}} \psi_0}{Dt} + \psi_0 \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} \right) + \psi_0 \left[\frac{\mu^{*-2}}{2(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial c_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial c_{gy}}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (27)$$

或即

$$\frac{D_{\mathbf{e}} \eta \psi_0}{Dt} + \frac{\eta \psi_0}{2} \operatorname{div}(\bar{c}_{\mathbf{e}}) + \frac{\mu^{*-2} \psi_0}{2(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} = 0. \quad (28)$$

令

$$\psi_0 = |\psi_0| e^{i\alpha}, \quad (29)$$

其中 α 就是波包包络线的位相, $|\psi_0|$ 则是波包的真正振幅(实数)。将(29)代入(28), 约去公因子 $e^{i\alpha}$, 分虚实两部, 分别给出

$$\frac{D_{\mathbf{e}} \alpha}{Dt} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{D_{\mathbf{e}} \eta |\psi_0|}{Dt} + \frac{\eta |\psi_0|}{2} \operatorname{div}(\bar{c}_{\mathbf{e}}) + \frac{\mu^{*-2} |\psi_0|}{2(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} = 0. \quad (31)$$

由(30)可知

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, t) &= \alpha(\bar{r} - \bar{c}_{\mathbf{e}} t), \\ \bar{r} &\equiv \bar{i}x + \bar{j}y. \end{aligned} \quad (32)$$

即波包包络线确实以群速度 $\bar{c}_{\mathbf{e}}$ 传播。

用 $2\eta|\psi_0|$ 乘(31), 得到:

$$\frac{D_{\mathbf{e}} (\eta^2 |\psi_0|^2)}{Dt} + \eta^2 |\psi_0|^2 \operatorname{div}(\bar{c}_{\mathbf{e}}) + \frac{\mu^{*-2} \eta^2 |\psi_0|^2}{m^2 + n^2} \cdot \frac{D_{\mathbf{e}} \eta}{Dt} = 0. \quad (33)$$

这就是波包振幅的演变方程。将(33)沿全波包积分, 即可讨论波包总能量的改变。不妨取积分限为 $\pm\infty$, 注意到在波包边缘有 $|\psi_0|=0$, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 |\psi_0|^2 dx dy = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^{*-2} \eta^2 |\psi_0|^2}{(m^2 + n^2)} \cdot \frac{D_g L_n \eta}{Dt} dx dy. \quad (34)$$

这方程可称为总平方位涡度演变方程或广义能量守恒方程。事实上, 能量与振幅平方 $|\psi_0|^2$ 成正比, 而当 m, n 为常数且 ψ_0 为实数时, 位涡度 $(\Delta - \mu^{*-2})\psi_0$ 就等于 $\eta\psi_0 e^{i(m\pi + n\gamma)}$ 。故 $\eta|\psi_0|$ 为波包中一个单波的位涡度的振幅, 也可以简称为位涡度。(34)说明: 对于长波扰动没有总平方位涡度守恒。若对于中短波, 则因 $\mu^{*-2} \ll 1$, 可忽略(34)右端, 且 $\eta \approx (m^2 + n^2)$, 于是(34)退化为总平方位涡度守恒, 这就是[1]的结果, (34)为其推广。

若略去(34)右端项, 我们已由[1]推知: 当波长变长时(η 减小), $|\psi_0|^2$ 增大, 扰动总能量增加; 当波长变短时(η 增大), $|\psi_0|^2$ 减小, 扰动总能量减小, 这是中、短波的演变特性。在长波扰动情况下, (34)右端不能忽略。但若 η 减小时, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 |\psi_0|^2 dx dy > 0, \quad (35)$$

总平方位涡度增加。由于在积分号下 η^2 减小, 故 $|\psi_0|^2$ 比中、短波情况还有更大的增加。反之, 若 η 增加, 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 |\psi_0|^2 dx dy < 0, \quad (36)$$

总平方位涡度减小, 使得 $|\psi_0|^2$ 有更多的减小。可见对于长波扰动来说, [1]中所述的波长增减与扰动发展和衰减的规律性仍然有效, 而且波长增减所带来的能量改变的效应还更大些。因此我们得到: 在小槽、小脊阶段, 发展(衰减)将伴随着波长增加(减小), 当小槽发展成成长波槽脊时, 它将加速发展; 而当长波槽脊具有衰减的结构时, 它可能较快地收缩成为一个衰减的小槽、小脊。

七、具体例子分析

在[1]中我们给出过一些发展和衰减的槽、脊模型。今按上节的结果可知, 当波长为长波时, 这些模型仍然有效。本文不再叙述这些模式, 但给出一些更全面的模型。设纬围 φ_0 为西风急流位置, 如图1, 即 φ_0 以南和以北的西风风速比 $\bar{u}(\varphi_0)$ 小。设有扰动迭加于西风急流南北各部分, 则按上两节得到的结果, 可知衰减扰动必须在急流南、北各取导波和曳波的形式, 轴线应如图1所示。因此, 当槽脊轴线如图1, 它们将衰减, 而且波长变短, 逐渐变成以西风环流为主, 即向高指数环流演变。反之, 发展型扰动轴线必须如图2所示。因此, 当扰动轴线取这种形式时, 扰动将发展, 行星波振幅增大, 波长变长, 于是扰动日益变得明显起来, 即向“低指数环流”演变。上面两节的结论以及本节的模型和角动量输送理论的结果是一致的, 也都和实际有较好的吻合。下面引用仇永炎^[3]从实际天气图中总结出来的模型。他将500 mb逐日天气图作福氏展开, 截取有限个波。图3和图4分别是截取3个波时向高指数环流和低指数环流转变时500 mb槽脊的结构。将它们和图1和图2比较, 不难看出是完全相符合的。

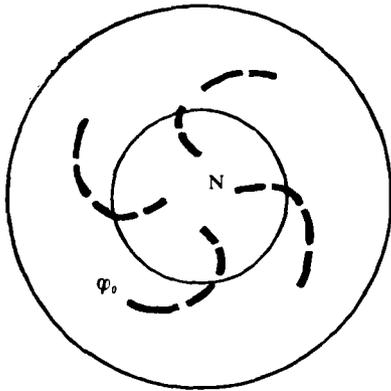


图 1 衰减型扰动轴线的走向
90°W

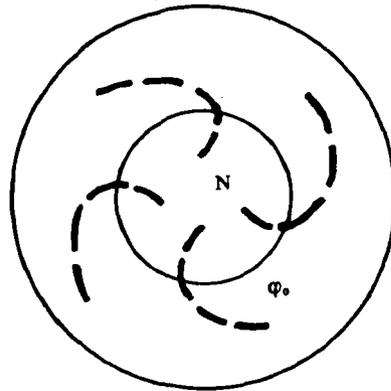


图 2 发展型扰动轴线的走向
90°W

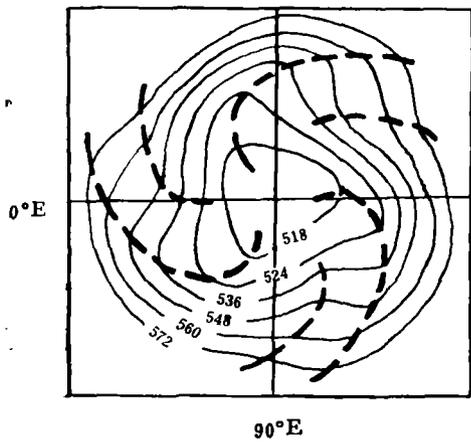


图 3
1977年1月5日 500 mb 主要槽脊形势图
(单位: 什米)

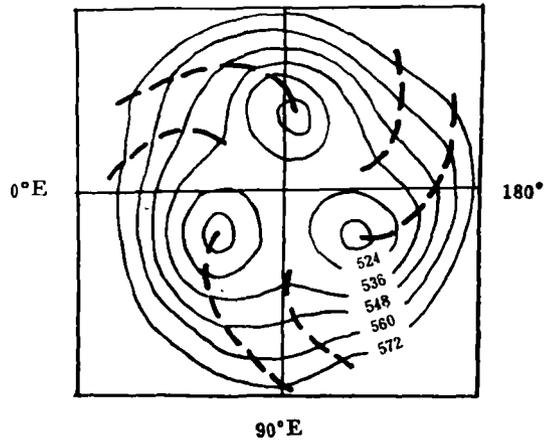


图 4
1977年1月26日 500 mb 主要槽脊形势图
(单位: 什米)

参 考 文 献

- [1] 卢佩生、曾庆存, 正压大气中扰动的演变, 大气科学, 5, No.1, 1981.
- [2] 曾庆存、卢佩生, 非均匀基流上扰动的演变, 中国科学, 1980年12期.
- [3] 仇永炎, 500 mb 角动量输送波谱的周期变化, 气象学报, 37, (1) 1979.

ON THE EVOLUTION PROCESS OF LONG WAVES IN THE BAROTROPIC ATMOSPHERE

Lu Pei-sheng

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the evolution process of disturbances superimposed on a barotropic non-uniform (curvilinear in particular) basic current are investigated. The previous work^[1] is generalized by means of general treatment both for the longwaves superimposed on basic current with ultra-long waves and the medium or short waves superimposed on basic current with long waves. The main results are as follows: when the wavelength of small trough or ridge is enlarged, its amplitude increases and the disturbance develops. In opposite case, i. e. when the wavelength shortens, its amplitude decreases and the disturbance is damped. As a small and short wave has changed into a long wave, the abovementioned laws become clearer, i. e. the wavelength of developing (damping) longwave increases (decreases) more rapidly. These results might be used to explain some observations of evolution processes of trough and ridge in the real atmosphere. Besides, the evolution of a disturbance is determined completely its structure, especially by the direction of its axis and its relative position in the basic current. In northern hemisphere, the axis of the developing disturbance is directed NE-SW-ly to the north of the jet stream, and NW-SE-ly to the south of it; while the axis of the damping disturbance is directed NE-SW-ly to the south of the jet stream and NW-SE-ly north of it. These results are in good agreement with the theory of angular transport as well as synoptic experience.