第39卷 第1期 气 象 学 报 Vol. 39, No. 1
1981 年 2 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1981

稳定的和不稳定的斜压行星波*

谢 义 炳

（北京大学地球物理系）

提 要

本文采用两层模式，初步地应用"时空同化"的自然观，引进空间不稳定性观点，把空间不稳定性和时间不稳定性结合起来，研究振幅随纬度变化的斜压行星波的存在范围和其稳定性；得出了稳定的和不稳定的斜压行星波及其空间不稳定判据，并对传统的斜压行星波不稳定理论和判据作出鉴定，重新提出了斜压行星波时间不稳定判据，并讨论其物理含义；还得出了高层和低层斜压行星波相互强迫振动的机制以及不同纬度间扰动振幅的关系。

一、引 言

气象学中习用的斜压不稳定理论的基本观点是：观测到的行星波是在大气已有流场和层结结构情况下，具有最大不稳定性波长的波。斜压不稳定理论的目的，在于探寻不稳定判据和具有最大不稳定性的波长。斜压不稳定理论认为，大气中一般的基本气流和垂直层结结构，大都可以满足不稳定判据。在干斜压大气中，具有最大不稳定性的波长约 4000 公里[1]；在湿斜压大气中，最不稳定波的波长可缩短到前者的一半或更小[2]。

气象学中还习用另一观点，即观测到的波是中性的罗斯贝波[3]或郝威茨波[4]。这种波的振幅不随时间变化。

这两种观点间有其矛盾处。为了迴避这种矛盾，气象学中习惯地把斜压不稳定理论用于行星波的发生阶段，即振幅很小时的波。当波发展到具有一定但还不大的振幅后，不再用斜压不稳定理论而应用罗斯贝波或郝威茨波理论。这种习惯用法似不能被认为是完善的。

斜压不稳定理论和罗斯贝波所考虑的是振幅不随 y 变的波。郝威茨波的振幅随 y 变，但与罗斯贝波一样，所考虑的是正压大气。本文谋求把这些工作结合起来，采用两层模式来研究振幅随 y 变的波在斜压大气中的发展和运动，以一种统一的理论来阐明大气中观测到的快速发展的即不稳定的行星波，和两三天内振幅基本不变的、稳定的、运行的行星波。同时也希望能有助于解决既应用罗斯贝波和郝威茨波理论，又应用斜压不稳定理论间的矛盾。

二、基 本 方 程

两层准地转模式是能够勉强地描述斜压大气运动的最简单模式。这种模式用下述形式表达流场，

* 本文于1980年4月23日收到，1980年6月26日收到修改稿。

$$\psi_1=-U_1y+\psi_1'(x,y,t)$$
$$\psi_3=-U_3y+\psi_3'(x,y,t) \tag{1}$$
$$\omega_2=\omega_2'(x,y,t)$$

这里符号“′”表示扰动值。下标 1,2,3 分别表示 250,500,750 毫巴面上的特征。U_1，U^3 取作常数。如取

$$U_2=\frac{1}{2}(U_1+U_3) \tag{2}$$

则扰动方程组可写成如下形式，为简化计略去了表示扰动的符号，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{f_0}{\Delta p}\omega_2 \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=-\frac{f_0}{\Delta p}\omega_2 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_1-\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_3=\frac{\sigma\Delta p}{f_0}\omega_2 \tag{5}$$

这里 $\Delta p=500$ mb，$\sigma=-\dfrac{\alpha}{\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial p}$即垂直稳定度参数。考虑可逆湿绝热过程的湿绝热大气时，应以 σ_m 代替σ，$\sigma_m=-\dfrac{\alpha}{\theta_{se}}\dfrac{\partial\theta_{se}}{\partial p}$。

设方程组(3)，(4)，(5)有下述波动解

$$\begin{cases}\psi_1=A(y)\sin k(x-ct)\\ \psi_3=B(y)\sin k(x-ct)\\ \omega_2=\omega(y)\sin k(x-ct)\end{cases} \tag{6}$$

这里，波的振幅取作 y 的函数。把(6)代入消去了ω_2 的方程组(3)，(4)，(5)，得

$$A''+\left(\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k^2\right)A=-\lambda^2B \tag{7}$$

$$B''+\left(\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k^2\right)B=-\lambda^2A \tag{8}$$

(7)，(8)是以y 为自变量的常微分方程组，符号“″”表示$\dfrac{d^2}{dy^2}$。$\lambda^2=f_0^2/\sigma(\Delta p)^2$ 反映高低层相互强迫振动的强度，可以称为相互强迫振动参数，或简称强迫参数。考虑可逆湿绝热过程的湿绝热大气时，应以 λ_m^2 代替λ^2，$\lambda_m^2=f_0^2/\sigma_m(\Delta p)^2$。方程组 (7)，(8) 类似力学中具有两个自由度的系的自由振动微分方程组，但自变量不同。我们这里考虑的是随一维空间 y 的变化，可以称为斜压空间振动方程组。

如垂直层结非常稳定，以至于$\sigma\doteq\infty$，则$\lambda^2\doteq 0$，方程组(7)，(8)蜕化为高低层没有关系的郝威茨波频率方程。如波幅不随 y 变，则 $A''=B''=0$，方程组(7)，(8)蜕化为斜压不稳定理论的方程组。如除 λ^2 近于零外，振幅不随 y 变，则方程组(7)，(8)蜕化为高低层没有关系的罗斯贝波频率方程。

三、斜压行星波的存在范围

令

$$a^2=\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k^2$$
$$b^2=\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k^2 \tag{9}$$

则当

$$a^2>\chi^2>0$$
$$b^2>\chi^2>0 \tag{10}$$

这里 χ^2 是任何正实数时，方程组(7)，(8)有波动解。下文将简写(10)式为 $a^2>0$，$b^2>0$。(9)，(10)式确定了斜压行星波的存在范围。a^2，b^2 中每一个符号所代表的量，在实际大气中都是随时间和地点而变的，因而斜压行星波的存在范围是相当广阔的。a^2、b^2 的量纲是 L^{-2}。当 $\lambda^2\doteq0$ 时，a,b 分别蜕化为高层和低层没有关系的郝威茨波沿 y 方向的波数。a、b 因而依次可以称为斜压郝威茨波高层和低层一维空间波数。

本节将对 $\beta,U_1,U_3,\lambda^2,c$ 取某些值时，斜压行星波的存在范围作简单的讨论。

如根据中纬度大气中的一般情况，设

$$U_1-c>0,\ U_3-c<0 \tag{11}$$

则(9)，(10)式，可以被改写成

$$c>\frac{\lambda^2U_3+k^2U_1-\beta}{\lambda^2+k^2} \tag{9a}$$

$$c<\frac{\lambda^2U_1+k^2U_3-\beta}{\lambda^2+k^2} \tag{10a}$$

由(9 a)，(10 a)得

$$k^2<\lambda^2\ 或\ \frac{4\pi^2}{L^2}<\lambda^2 \tag{12}$$

这里 L 是斜压行星波沿 x 方向的波长。(12)式指示中纬度斜压行星波沿 x 方向的波数或波长与强迫参数或垂直稳定层结的一般关系。

当 $\lambda^2<0$，即当 $-\frac{\partial\theta}{\partial p}<0$ 垂直层结为绝对不稳定时，k^2 是负数，k 是虚数，(6)式中出现 x 和 t 的双曲函数，斜压行星波不复存在，实际大气中也不存在大范围内 $-\frac{\partial\theta}{\partial p}<0$ 的情况。在1,3层间，大范围内 $-\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}<0$ 也是不易出现的。

当 $\lambda^2\doteq0$，即当 $-\frac{\partial\theta}{\partial p}\doteq\infty$ 垂直层结非常稳定时，$k^2\doteq0$，$L\doteq\infty$，即在 x 方向近于没有波动。实际大气中，就大范围说，λ^2 总是某个正值。

(12)式可改写成

$$L^2>\frac{4\pi^2}{f_0^2}(\Delta p)^2\left(-\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)_2 \tag{13}$$

如考虑湿斜压大气，以 θ_{se} 代替 θ，得

$$L_m^2>\frac{4\pi^2}{f_0^2}(\Delta p)^2\left(-\frac{\alpha}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}\right)_2 \tag{14}$$

如取　$f_0=10^{-4}\text{sec}^{-1}$，$\alpha=1.6\times10^3\text{cm}^3\text{gr}^{-1}$，$\Delta p=5\times10^5\text{gr}\cdot\text{cm}^{-1}\text{sec}^{-2}$

$$\left(\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)_2=\left(\frac{\Delta\theta}{\theta}\right)_2\frac{1}{\Delta p}=\frac{1}{10\Delta p},\quad\left(\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}\right)_2=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)_2$$

则得

$$\lambda^2=1.6\times10^{-16}\text{cm}^{-2},\quad\lambda_m^2=8\times10^{-16}\text{cm}^{-2}$$
$$L>5000\text{ km}\qquad L_m>2200\text{ km}\tag{15}$$

即在干斜压大气中，一般可以出现波长大于5000公里的行星波； 在湿斜压大气中，一般可以出现波长大于2200公里的行星波。纬度高，f_0大些；在已有对流云雨带的湿斜压大气中，$\left(\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}\right)_2$的值可以接近于零；这使$\lambda^2$或$\lambda_m^2$增大，使斜压行星波的存在范围向短波方向发展。

另值得注意的是，由于$U_1-c>0$，$U_3-c<0$，a^2和b^2随λ^2的增加而增加。 当$a^2=b^2$时，即

$$\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k^2=\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k^2\tag{16}$$

或

$$\lambda^2=\frac{\beta}{(U_1-c)+(U_3-c)}=\frac{\beta}{2(U_2-c)}$$
$$a^2=b^2=\frac{\beta}{2(U_2-c)}-k^2\tag{17}$$

如取

$$\beta=1.6\times10^{-13}\text{cm}^{-1}\text{sec}^{-1},\quad U_1=3\times10^3\text{cm sec}^{-1}$$
$$U_3=10^3\text{ cm sec}^{-1},\quad c=1.5\times10^3\text{cm sec}^{-1}$$

则

$$\lambda^2=1.6\times10^{-16}\text{cm}^{-2}\tag{18}$$

(18)式中λ^2的值与(15)式者一样。

对于斜压行星驻波来说，$c=0$，因此(9)式蜕化为

$$\begin{aligned}a^2&=\frac{\beta}{U_1}-\frac{U_3}{U_1}\lambda^2-k^2\\b^2&=\frac{\beta}{U_3}-\frac{U_1}{U_3}\lambda^2-k^2\end{aligned}\tag{19}$$

行星驻波的存在范围仍为$a^2>0$，$b^2>0$，即

$$k^2<\frac{\beta-U_3\lambda^2}{U_1},\quad k^2<\frac{\beta-U_1\lambda^2}{U_3}\tag{20}$$

因为$\beta-U_1\lambda^2<\beta-U_3\lambda^2$，当$\beta-U_1\lambda^2=0$时，$k^2$为负值，$k$为虚数，(6)式中出现$x$和$t$的双曲函数， 不再呈波动解。 因此， 斜压行星驻波的存在范围除受(20)式的约束外，还应受下式的约束

$$\beta-U_1\lambda^2>0,\ \text{或}\ \lambda^2<\frac{\beta}{U_1}<\frac{\beta}{U_3}\tag{21}$$

如取前面提到的β, U_1, U_3,值，则λ^2应小于$\frac{\beta}{U_1}$或$0.53\times10^{-16}\text{cm}^{-2}$。如前所述，大气中

实际的 λ^2 约为 $1.6\times10^{-16}\text{cm}^{-2}$，远不能满足(21)式，这意味着在实际的斜压大气中，不能存在行星驻波。

如大气中的垂直层结是这样的稳定，以至于 $\lambda^2\doteq0$，则除能满足不等式(21)式外，还可用(20)式来估计行星驻波波长 L_s，即

$$L_s^2>\frac{4\pi^2U_1}{\beta}=7.5\times10^{16}\text{cm} \tag{22}$$

$$L_s>8.6\times10^8\text{cm}=8600\text{ km} \tag{23}$$

即大气垂直层结非常稳定时，可能出现超长波式的行星驻波。但这不能作为大气中实际存在的平流层驻波（超长波）的解释。平流层出现超长波，而对流层没有超长波或至少超长波不明确的事实，应当用把平流层和对流层加以统一考虑的模式而不应当由本文所用的简单两层模式来加以阐明。

三、斜压行星波的表达式和空间稳定性

时间稳定和不稳定观点的提出，是为了考虑周期性和发散性的时间变化，但并不意味着所研究的周期性物理过程被认为可以延伸到无限时间，或所研究的发散性物理过程可以发展到无限强度。这种研究物理量时间变化的观点和方法，也适用于研究空间变化。我们可以引入空间稳定和空间不稳定的观点。空间稳定指的是某个物理量或气象要素值随空间作周期性变化(本文指一维空间 y)；空间不稳定指某物理量随空间作指数变化。这实质上是“时空同化”自然观在本文所考虑的具体问题中的应用。

气象学中考虑的是无限时间和有限空间，但空间有限并无碍于空间稳定和不稳定观点的应用。当某物理量随空间作稳定性变化时，可以由边界开拓出去。当某物理量随空间作不稳定变化时，根本不能考虑距振源较远的边界。

在天气图上，常见的北槽南涡的形势中，振幅从槽涡间的纬度分别向南北快速增加，可以看成是流场空间不稳定的一个特例，就象气旋的发生被看成是流场时间不稳定一样。

由于气象学中传统地用定时观测的纪录绘制天气图，并由不同时间的天气图来研究时间变化，因而习惯上把空间分布看成是空间结构，而把时间分布看成是时间变化。其实，时间分布、时间变化和时间结构是同义辞；空间分布，空间结构和空间变化也是同义辞。

“时空同化”的观点，在气象学中并不是新鲜事物。时间剖面图和空间剖面图是早就被应用的分析工具。卫星观测等非常规资料被采用后，数值预报实践中明确地提出了“四维同化”的名词，并开始在实践中应用。本文不过是在理论研究工作中开始试用这种观点罢了。

本节讨论斜压行星波的空间稳定性问题。

利用(9)式，方程组(7)，(8)可写成

$$A''+a^2A=-\lambda^2B \tag{24}$$

$$B''+b^2B=-\lambda^2A \tag{25}$$

方程组(24)，(25)有不同的解法，下面采用标准的常微分方程的解法。(24)，(25)可化为双

重二次方程，

$$\mathscr{L}(A,B)=0$$

$$\mathscr{L}\equiv\frac{d^4}{dy^4}+(a^2+b^2)\frac{d^2}{dy^2}+a^2b^2-\lambda^4 \tag{26}$$

令

$$A,B\sim e^{\gamma y}$$

则得(26)式的特征方程

$$\gamma^4+(a^2+b^2)\gamma^2+(a^2b^2-\lambda^4)=0 \tag{27}$$

特征方程(27)的根为

$$\gamma^2=\frac{-(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}=\frac{-(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2+4\lambda^4}}{2} \tag{28}$$

或

$$\begin{cases}\gamma_1^2=\dfrac{-(a^2+b^2)-\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}=\dfrac{-(a^2+b^2)-\sqrt{(a^2-b^2)^2+4\lambda^4}}{2}\\ \gamma_2^2=\dfrac{-(a^2+b^2)+\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}=\dfrac{-(a^2+b^2)+\sqrt{(a^2-b^2)^2+4\lambda^4}}{2}\end{cases} \tag{28a}$$

不论 a^2,b^2 是正或负，根号内均为正数，因此，γ^2是实数。本文仅将在 $a^2>0$，$b^2>0$，即斜压行星波存在的范围内，讨论 A，B 的解和斜压行星波的表达式。

作为特例，如垂直层结很稳定，$\lambda^2\doteq0$，则(24)，(25)式蜕化为

$$A''+a^2A=0 \tag{29}$$

$$B''+b^2B=0 \tag{30}$$

并且

$$\gamma_1^2=-a^2,\quad \gamma_2^2=-b^2 \tag{31}$$

因此

$$A=A_1\cos ay+A_2\sin ay \tag{32}$$

$$B=B_1\cos by+B_2\sin by \tag{33}$$

如设行星波的振幅随 y 的变化是对称于 x 轴的，则取下述边界条件

$$y=0\ \text{处},\quad A=0,\quad B=\psi_0,\quad A'=\frac{dA}{dy}=0,\quad B'=\frac{dB}{dy}=0 \tag{34}$$

这意味着在某一纬度的低层引入一个振动，考虑的是无界空间、类似研究弦振动时考虑无界弦的方法。由(32)，(33)，(34)，(6)和(19)式得

$$\begin{cases}A_1=0,\quad B_1=\psi_0,\quad A_2=0,\quad B_2=0\\ A=0,\quad B=\psi_0\cos by\\ \psi_1=0,\quad \psi_3=\psi_0\cos by\sin k(x-ct)\\ b^2=\dfrac{\beta}{U_3-c}-k^2\end{cases} \tag{35}$$

即低层以郝威茨波形式振动，而高层没有振动。

同理，如在高层引入振动，则取边界条件

$$y=0\text{ 处},\ A=\psi_0,\ B=0,\ A'=0,\ B'=0 \tag{36}$$

得

$$\begin{cases}\psi_1=\psi_0\cos ay\sin k(x-ct),\ \psi_3=0\\ a^2=\dfrac{\beta}{U_1-c}-k^2\end{cases} \tag{37}$$

即在高层有郝威茨波式振动，而低层没有振动。

(28)式指出，在一般情况下，$a^2b^2-\lambda^4$ 的正负起关键性的作用，它决定 γ^2 是正数或负数，和 γ 是实数或虚数。$a^2b^2-\lambda^4$ 即空间不稳定判据，它表徵斜压郝威茨波高低层空间波数和相互强迫振动参数或垂直稳定度大小之间的关系。这种波数愈大，相互强迫振动参数愈小，或垂直稳定度愈大，$a^2b^2-\lambda^4$ 愈易大于零，斜压行星波愈易空间稳定；相反，愈不易稳定。下按 $a^2b^2-\lambda^4\gtreqless 0$三种不同情况加以讨论。

1. $a^2>0,\ b^2>0,\ a^2b^2-\lambda^4=0$

这是一种临界情况，这时

$$\begin{gathered}\gamma_1^2=-(a^2+b^2),\ \gamma_2^2=0\\ \gamma_1^{(1)}=i\sqrt{a^2+b^2},\ \gamma_1^{(2)}=-i\sqrt{a^2+b^2},\ \gamma_2^{(1)}=0,\ \gamma_2^{(2)}=0\end{gathered} \tag{38}$$

方程组(24)，(25)的解可以写成

$$A=A_1+A_2y+A_3\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y+A_4\sin\sqrt{a^2+b^2}\,y \tag{39}$$

$$B=B_1+B_2y+B_3\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y+B_4\sin\sqrt{a^2+b^2}\,y \tag{40}$$

将(39)，(40)式代入(24)，(25)式，合併相同性质的项，简单运算后得

$$B_1=-\left|\frac{a}{b}\right|A_1,\quad B_2=-\left|\frac{a}{b}\right|A_2,\quad B_3=\left|\frac{b}{a}\right|A_3,\quad B_4=\left|\frac{b}{a}\right|A_4$$

因而 (40) 式可以改写成

$$B=-\left|\frac{a}{b}\right|(A_1+A_2y)+\left|\frac{b}{a}\right|(A_3\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y+A_4\sin\sqrt{a^2+b^2}\,y) \tag{41}$$

(39)，(41) 依次表达高层和低层流场振动的振幅，是 y 的函数，其中有随 y 线性增加的项。这种振动是空间临界不稳定的。

(39)，(41) 中有四个待定常数。如在某纬度 $y=0$ 处的低层引入振动，可取下述边界条件

$$y=0\text{ 处},\ A=0,\ B=\psi_0,\ A'=0,\ B'=0 \tag{42}$$

由(39)，(41)，(42)得

$$A_1=-\frac{ab}{a^2+b^2}\psi_0,\quad A_3=\frac{ab}{a^2+b^2}\psi_0,\ A_2=0,\ A_4=0 \tag{43}$$

因此

$$A=-\frac{ab}{a^2+b^2}\psi_0(1-\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y) \tag{44}$$

$$B=\frac{1}{a^2+b^2}\psi_0(a^2+b^2\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y) \tag{45}$$

$$\psi_1=-\frac{ab}{a^2+b^2}\psi_0(1-\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y)\sin k(x-ct) \tag{46}$$

$$\psi_3=\frac{1}{a^2+b^2}\psi_0(a^2+b^2\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y)\sin k(x-ct) \tag{47}$$

同理，如在高层引入振动，可取边界条件

$$y=0\text{ 处，}A=\psi_0,\ B=0,\ A'=0,\ B'=0 \tag{48}$$

则得

$$\psi_1=\frac{1}{a^2+b^2}\psi_0(b^2+a^2\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y)\sin k(x-ct) \tag{49}$$

$$\psi_3=-\frac{ab}{a^2+b^2}\psi_0(1-\cos\sqrt{a^2+b^2}\,y)\sin k(x-ct) \tag{50}$$

这些结果指出，当振动是空间临界不稳定时，在上述边界条件下，蜕化为空间稳定的。不论在低层或高层引入振动，高层和低层的振动流场都是一个郝威茨波叠加一个罗斯贝波。高低层叠加的罗斯贝波的位相是相反的。

2．$a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4>0$

这时

$$r_1^2<0,\ r_2^2<0,\ r_1=\pm ik_1,\ r_2=\pm ik_2$$

$$k_1=\left[\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2+4\lambda^4}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{51}$$

$$k_2=\left[\frac{a^2+b^2-\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{a^2+b^2-\sqrt{(a^2-b^2)^2+4\lambda^4}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

方程组（24），（25）的解可写成

$$A=A_1\cos k_1y+A_2\sin k_1y+A_3\cos k_2y+A_4\sin k_2y \tag{52}$$

$$B=B_1\cos k_1y+B_2\sin k_1y+B_3\cos k_2y+B_4\sin k_2y \tag{53}$$

用前面用过的方法求得

$$\begin{aligned}B_1&=\frac{k_1^2-a^2}{\lambda^2}A_1=\frac{\lambda^2}{k_1^2-b^2}A_1,\quad B_2=\frac{k_1^2-a^2}{\lambda^2}A_2=\frac{\lambda^2}{k_1^2-b^2}A_2\\ B_3&=\frac{k_2-a^2}{\lambda^2}A_3=\frac{\lambda^2}{k_2^2-b^2}A_3,\quad B_4=\frac{k_2^2-a^2}{\lambda^2}A_4=\frac{\lambda^2}{k_2^2-b^2}A_4\end{aligned} \tag{54}$$

$$(k_1^2-a^2)(k_1^2-b^2)=\lambda^4,\ (k_2^2-a^2)(k_2^2-b^2)=\lambda^4 \tag{55}$$

因此，（53）式可改写成，

$$\begin{aligned}B&=\frac{k_1^2-a^2}{\lambda^2}(A_1\cos k_1y+A_2\sin k_1y)+\frac{k_2^2-a^2}{\lambda^2}(A_3\cos k_2y+A_4\sin k_2y)\\ &=\frac{\lambda^2}{k_1^2-b^2}(A_1\cos k_1y+A_2\sin k_1y)+\frac{\lambda^2}{k_2^2-b^2}(A_3\cos k_2y+A_4\sin k_2y)\end{aligned} \tag{56}$$

（52），（56）是斜压行星波振幅的表达式，是 y 的简谐函数。因此，这种行星波是空间稳定的。

为了确定（52），（56）式中的四个待定常数，取下述边界条件

$$y=0\text{ 处，}A=0,\ B=\psi_0,\ A'=0,\ B'=0 \tag{57}$$

即在某一纬度 $y=0$ 处的低层大气中，引入一个振动。由（52），（56），（57）得

$$A_1=\frac{\lambda^2\psi_0}{k_1^2-k_2^2},\quad A_3=-\frac{\lambda^2\psi_0}{k_1^2-k_2^2},\quad A_2=0,\quad A_4=0 \tag{58}$$

因此

$$A=\frac{\lambda^2\psi_0}{k_1^2-k_2^2}(\cos k_1y-\cos k_2y)=-\frac{2\lambda^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\sin\frac{k_1-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y \tag{59}$$

$$\begin{aligned}B&=\frac{k_1^2-a^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\cos k_1y-\frac{k_2^2-a^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\cos k_2y\\&=\psi_0\cos k_1y+2\frac{a^2-k_2^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\sin\frac{k_1-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y\end{aligned} \tag{60}$$

$$\psi_1=-\frac{2\lambda^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\sin\frac{k_1-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y\sin k(x-ct) \tag{61}$$

$$\psi_3=\left(\psi_0\cos k_1y+2\frac{a^2-k_2^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\sin\frac{k_1-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y\right)\sin k(x-ct) \tag{62}$$

由（51）式可以证明 $a^2-k_2^2>0$。因此，在所取边界条件下，如在低层引入一个振动，除低层有一个郝威茨波外，高层和低层还各有一个振幅沿 y方向呈“拍”状振动但位相相反的波。

如在高层引入振动，则取下述边界条件

$$y=0\text{ 处，}A=\psi_0,\quad B=0,\quad A'=0,\quad B'=0 \tag{63}$$

通过类似计算，得

$$\psi_1=\left(\psi_0\cos k_1y+2\frac{k_1^2-a^2}{k_1^2-k_2^2}\psi_0\sin\frac{k_2-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y\right)\sin k(x-ct) \tag{64}$$

$$\psi_3=-\frac{2\lambda^2(a^2-k_2^2)\psi_0}{(k_1^2-b^2)(k_1^2-k_2^2)}\sin\frac{k_1-k_2}{2}y\sin\frac{k_1+k_2}{2}y\sin k(x-ct) \tag{65}$$

由（51）式，可以证明 $k_1^2-a^2>0$，$k_1^2-b^2>0$，$a^2-k_2^2>0$。因此，如在高层引入一个振动，除高层有一个郝威茨波外，高层和低层还各有一个振幅沿 y方向作“拍”式振动，但高低层位相相反的波。

众所周知，郝威茨波考虑了波的振幅随纬度的变化，但振幅在半球范围内是随纬度的增减而减少的。叠加波可以弥补这种缺点，比较符合实际些。

如 $\lambda^2\doteq0$，则（61），（62）式蜕化为（35）式；（64），（65）式蜕化为（37）式。

3．$a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4<0$

这时

$$\gamma_1^2<0,\quad \gamma_2^2>0,\quad \gamma_1^2=\pm ik_i,\quad \gamma_2=\pm\gamma_i$$

$$k_i=\left[\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{66}$$

$$\gamma_i=\left[\frac{-(a^2+b^2)+\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(a^2b^2-\lambda^4)}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

方程组（24），（25）的解可以被写成

$$A=A_1e^{\gamma_iy}+A_2e^{-\gamma_iy}+A_3\cos k_iy+A_4\sin k_iy \tag{67}$$

$$B=B_1e^{\gamma_iy}+B_2e^{-\gamma_iy}+B_3\cos k_iy+B_4\sin k_iy \tag{68}$$

在前面所取类似边界条件下，可以证明指数项的系数不为零，斜压行星波的振幅是随 y 发

散的。流场是空间不稳定的。

本节的讨论是按理论力学和数学的习惯进行的。在气象学中应当理解为某时刻天气图上高低层流场可以用空间稳定的和不稳定的斜压行星波来近似地描叙。

四、斜压行星波的时间稳定性

第三节讨论了斜压行星波的振幅随 y 的变化，即空间稳定性问题。本节将讨论在不同空间稳定性情况下，斜压行星波的振幅是否因 c 为复数而增加随 t 作指数变化的因子，即时间稳定性问题；并确定 c 成为复数的条件，即时间不稳定判据。

1. $a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4=0$

在这种情况下，斜压行星波是存在的，是空间临界不稳定的，并在我们所选边界条件下，蜕化为空间稳定的。展开 $a^2b^2-\lambda^4=0$，得

$$\left(\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k^2\right)\left(\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k^2\right)-\lambda^4=0 \tag{69}$$

整项得

$$\begin{aligned}&(k^4+2\lambda^2k^2)c^2+[2\beta(k^2+\lambda^2)-(U_1+U_3)(k^4+2\lambda^2k^2)]c+\\&+[k^4U_1U_3+\beta^2-(U_1+U_3)(k^2+\lambda^2)\beta+\lambda^2k^2(U_1^2+U_3^2)]=0\end{aligned} \tag{69 a}$$

(69 a) 就是传统的斜压不稳定理论中计算相速 c 的频率方程。由 (69 a) 解出 c，得

$$\begin{gathered}c=U_2-\frac{\beta(k^2+\lambda^2)}{k^2(k^2+2\lambda^2)}\pm\delta^{\frac{1}{2}}\\ \delta=\frac{\beta^2\lambda^4}{k^4(k^2+2\lambda^2)}-\frac{U_T^2(2\lambda^2-k^2)}{k^2+2\lambda^2}\\ U_2=\frac{U_1+U_3}{2},\quad U_T=\frac{U_1-U_3}{2}\end{gathered} \tag{70}$$

当 $\delta<0$ 时，c 是复数，即 $c=c_r+ic_i$，在前节的扰动流函数 ψ_1 和 ψ_3 的表达式中，出现时间的双曲函数，因而斜压行星波是时间不稳定的。如 $\delta=0$，$\delta>0$，斜压行星波依次是时间临界稳定的和时间稳定的。这些结论与传统的斜压不稳定理论一致。传统的斜压不稳定理论研究的是空间临界稳定的特殊情况，它把 δ 看成是斜压不稳定判据。下文将指出，在对空间和时间稳定性作统一考虑的理论中，还应对斜压不稳定判据重新修订。

2. $a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4>0$

在这种情况下，斜压行星波是存在的，是空间稳定的。$a^2b^2-\lambda^4>0$ 可展开为

$$\left(\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k^2\right)\left(\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k^2\right)-\lambda^4>0 \tag{71}$$

根据中纬度斜压大气中的一般情况，$U_1-c>0$，$U_3-c<0$，(71) 式可以改写成

$$\begin{aligned}&(k^4+2\lambda^2k^2)c^2+[2\beta(k^2+\lambda^2)-(U_1+U_3)(k^2+2\lambda^2k^2)]c+\\&+[k^4U_1U_3+\beta^2-(U_1+U_3)(k^2+\lambda^2)\beta+\lambda^2k^2(U_1^2+U_3^2)]<0\end{aligned} \tag{72}$$

或

$$\left[c-U_2+\frac{\beta(k^2+\lambda^2)}{k^2(k^2+2\lambda^2)}-\delta^{\frac{1}{2}}\right]\left[c-U_2+\frac{\beta(k^2+\lambda^2)}{k^2(k^2+2\lambda^2)}+\delta^{\frac{1}{2}}\right]<0 \tag{72 a}$$

令

$$c_2=U_2-\frac{\beta(k^2+\lambda^2)}{k^2(k^2+2\lambda^2)} \tag{73}$$

c_2 是当 $a^2b^2-\lambda^4=0$，和 $\delta=0$ 时的 c。如 $\lambda^2\doteq 0$，则 c_2 蜕化为 500 毫巴面上罗斯贝波的相速。c_2 可以称为斜压空间时间双重临界稳定罗斯贝波相速，或简称斜压临界罗斯贝波相速。(72 a) 可改写成

$$(c-c_2-\delta^{\frac{1}{2}})(c-c_2+\delta^{\frac{1}{2}})<0 \tag{74}$$

或

$$(c-c_2)^2-\delta<0 \tag{74 a}$$

下面分别对 $\delta\gtreqless 0$ 三种不同情况加以讨论。

1) $\delta>0$

如 c 是实数，并且

$$c_2-\delta^{\frac{1}{2}}<c<c_2+\delta^{\frac{1}{2}}$$

即 c 处于以 c_2 为中点的从 $-\delta^{\frac{1}{2}}$ 到 $+\delta^{\frac{1}{2}}$ 区间时，则不等式成立。这时，斜压行星波既是空间稳定的，也是时间稳定的。

如 c 是复数，即 $c=c_\gamma+ic_i$，则 (74) 式变成

$$(c_\gamma-c_2)^2-c_i^2-\delta+2\,ic_i(c_\gamma-c_2)<0$$

当 $c_\gamma=c_2$ 时，不等式成立，即在以 c_2 为中点的从 $-\delta^{\frac{1}{2}}$ 到 $+\delta^{\frac{1}{2}}$ 区间里，中点 c_2 是一个奇点。如斜压行星波的速率的实部 c_γ 正好等于 c_2 时，任何 c_i 值都可以满足 (74) 式，即斜压行星波是时间不稳定的。这种情况下，δ 不能作为不稳定判据。

2) $\delta=0$

这时，(74) 式蜕化为

$$(c-c_2)^2<0$$

c 不可能是实数。如 c 是复数，则

$$(c_\gamma-c_2)^2-c_i^2+2\,ic_i(c_\gamma-c_2)<0$$

如 $c_\gamma=c_2$，任何 c_i 值都满足上述不等式，即斜压行星波是时间不稳定的。在这种情况下，δ 也不能作为不稳定判据。

3) $\delta<0$

这时，(74 a) 式可以改写成

$$(c-c_2)^2+|\delta|<0$$

c 不可能是实数。如 c 是复数，则

$$(c_\gamma-c_2)^2-c_i^2+|\delta|+2\,ic_i(c_\gamma-c_2)<0$$

当 $c_\gamma=c_2$，$c_i^2>|\delta|$ 时，上述不等式成立，即只有在 $c_\gamma=c_2$，$c_i^2>|\delta|$ 条件下，$\delta<0$ 才是斜压不稳定判据，斜压行星波才是时间不稳定的。

$c_\gamma=c_2$ 情况特殊，c_2 可看成是一个奇点。

3．$a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4<0$

在这种情况下，斜压行星波是存在的，但却是空间不稳定的。展开 $a^2b^2-\lambda^4<0$ 并简写如下

$$(c-c_2-\delta^{\frac{1}{2}})(c-c_2+\delta^{\frac{1}{2}})>0 \tag{75}$$

或

$$(c-c_2)^2-\delta>0 \tag{75 a}$$

下面分别讨论 $\delta\gtreqless 0$ 时的情况。

1) $\delta>0$

如 c 是实数，并且

$$c<c_2-\delta^{\frac{1}{2}},\ \text{或}\ c>c_2+\delta^{\frac{1}{2}}$$

时，不等式（75）成立。如 c 是复数，则（75 a）改写为

$$(c_\gamma-c_2)^2-c_i^2-\delta+zic_i(c_\gamma-c_2)>0$$

只能当 $c_i=0$，即 c 由复数蜕化为实数时，上述不等式才可能成立，即 c 不可能是复数。

2）$\delta=0$

这时不等式（75）蜕化为

$$(c-c_2)^2>0$$

除 $c=c_2$ 这个奇点外，c 是任何实数不等式都成立。可以证明，c 不可能是复数。

3）$\delta<0$

这时，不等式（75 a）可改写成

$$(c-c_2)^2+|\delta|>0$$

c 是任何实数，不等式都成立。如 c 是复数，则（75 a）可改写成

$$(c_\gamma-c_2)^2-c_i^2+|\delta|+zic_i(c_\gamma-c_2)>0$$

当 $c_\gamma=c_2$，$c_i^2<|\delta|$ 时，不等式成立。

可以把前述的结果总结为下表。

斜压行星波稳定性表

	空间稳定	空间临界稳定	空间不稳定
存在条件	$a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4>0$	$a^2>0, b^2>0, a^2b^2-\lambda^4=0$	$a^2>0$，$b^2>0$，$a^2b^2-\lambda^4<0$
振动特征	郝威茨波+“拍”状波，0－“拍”状波	郝威茨波±罗斯贝波	∓郝威茨波±空间不稳定波
$\delta>0$	$c_2-\delta^{\frac{1}{2}}<c<c_2+\delta^{\frac{1}{2}}$ 时间稳定 $c_\gamma=c_2$，奇点，c_i=任何实数时间不稳定	$c=c_2\pm\delta^{\frac{1}{2}}$ 时间稳定	$c<c_2-\delta^{\frac{1}{2}}, c>c_2+\delta^{\frac{1}{2}}$ 时间稳定
$\delta=0$	不可能出现时间稳定 $c_\gamma=c_2$，奇点，c_i=任何实数，时间不稳定	$c=c_2$ 时间临界稳定	c=任何实数，时间稳定 $c=c_2$，奇点，不可能出现
$\delta<0$	不可能出现时间稳定 $c_\gamma=c_2$，奇点，时间不稳定 $c_i<-\|\delta\|^{\frac{1}{2}}$，$c_i>\|\delta\|^{\frac{1}{2}}$	$c_\gamma=c_2$，$c_i=\pm\|\delta\|^{\frac{1}{2}}$ 时间不稳定	c=任何实数，时间稳定 $c_\gamma=c_2$，奇点，时间不稳定 $-\|\delta\|^{\frac{1}{2}}<c_i<\|\delta\|^{\frac{1}{2}}$

由上表可以看出，如仅考虑空间临界不稳定情况，则 δ 是时间不稳定判据。这就是传统的斜压不稳定理论的结论。但对空间和时间不稳定性作统一考虑时，则结论是：当 $\delta>0$ 时，它确定不同空间稳定性情况下，斜压行星波相速所在区间的界限；当 $\delta<0$ 时，它确定不同空间稳定性情况下，时间不稳定强度所在区间的界限；斜压不稳定判据不是 $\delta\geqq0$，而是 $c_\gamma=c_2$，即斜压行星波相速等于斜压临界罗斯贝波相速时，斜压行星波是时间不稳定的。

斜压临界罗斯贝波相速 c_2 可以看成是斜压大气的特征相速。kc_2 可以看成是斜压大气的特征频率。实际存在的斜压行星波的频率是 kc。当 $c=c_2$ 时，$kc=kc_2$，发生似共

振现象，斜压行星波是时间不稳定的，这时 c 变为复数。这可能是奇点 $c_\gamma=c_2$ 的物理含义。

应当指出，当 c 变为复数后，不再能满足基本条件 $a^2>0$，$b^2>0$，$U_1-c>0$，$U_3-c<0$ 和小扰动假设。本文的结论正象传统的斜压不稳定理论一样，只能确定时间不稳定判据，而不能研究时间不稳定发生后的变化过程。

六、讨　论

本文采用两层准地转模式，研究斜压大气中振幅随 y 变化的行星波的存在范围和稳定性问题；引进了空间不稳定性观点，统一地考虑空间和时间不稳定性；谋求阐明实际大气中观测到的稳定的和不稳定的行星波，解决气象学中既应用罗斯贝波和郝威茨波（中性波）的观点，又应用斜压不稳定理论所认为的实际观测到的波是具有最大不稳定性波长的波的观点间的矛盾，得出了斜压行星波的存在范围、空间不稳定判据，并对传统的斜压时间不稳定判据作出鉴定，重新订出了斜压时间不稳定判据，并讨论了新判据的物理含义。所得结果，实质上否定了传统的斜压不稳定理论的基本观点，即大气中观测到的行星波是具有最大不稳定性波长的波；但却保留了其具体内容，指出传统的斜压不稳定判据，源自空间临界不稳定的特殊情况。把这种判据用于远为广泛的空间稳定或不稳定情况时，有不同程度的局限性。

本文的局限性也是显然的。首先同传统的斜压不稳定理论一样，不能研究时间不稳定后的过程。同时，只能以空间不稳定来看待某些流场，而不能讨论其具体分布情况。

其次，本文在(3)，(4)，(5)式中引进垂直速度 ω_2，但后来运算过程中消去了 ω_2，集中地讨论了 ψ_1 和 ψ_3 的时空变化。限于篇幅未能把已求得的 ψ_1，ψ_3 代入(3)，(4)或(5)式，讨论 ω_2 的时空变化，因此也没有能进一步讨论斜压行星波的能量转换过程，这应当是不难做到的。

第三，本文采用的两层准地转模式只能粗略地描述大气的斜压性。U_1，U_3 取作常数与实际情况也有相当的出入。如 U_1，U_3 取作 y 的简单函数，或可能由分析解或简单的数值解得出结论。如考虑 U_1，U_3 随 y 的实际分布，层次也不限于两层，则必须借助于数值模拟计算技术。本文结果或可能为这一类数值模拟工作提供一些参考性依据。

本文的结论支持大气运动是一种准涡旋运动的观点[6]。

本文引进的扰动并没有指定。因此，也可以适用于大地形如西藏高原或落矶山对大型流场或大气环流的扰动。本文的结论是这种扰动的影响是随大气中已存在的垂直层结、斜压性和流型而不同的。这似符合天气分析和预报经验。

致谢：本文初稿完成后，刘式适、陈受钧、巢纪平和学报审稿同志都曾提出若干宝贵意见，使定稿有所改进，谨此致谢。

参 考 文 献

[1] Holton, J. R., An Introduction to dynamic meteorology. Academic Press, New York and London, 186—192, 1972.
[2] 谢义炳，湿斜压大气的天气动力学问题，暴雨文集，吉林出版社，1978。
[3] Rossby, C-G. and Collaborators, Relation between variations in the intensity of the zonal

circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of actions, *Jour. of Mar. Res.* 2, 38—55, 1939.

[4] Haurwitz, B., The Motion of Atmospheric Disturbances, *Jour. of Mar. Res.*, 3, 35—50, 1940.

[5] 谢义炳，纬圈平均大气运动特征的振动，气象学报，第 38 卷，第二期，111—121，1980.

THE STABLE AND UNSTABLE PLANETARY WAVES IN THE BAROCLINIC ATMOSPHERE

Xie Yi-bing (Yi-Ping Hsieh)

(Department of Geophysics, Beijing University)

Abstract

In this paper, the two-level quasi-geostraphic model is used, the concept of assimilation of space and time is adopted, the idea of space instability is introduced and combined with time instability to study the effects of any disturbance introduced at an unidentified latitude to the general circulation. A general theory about the extent of existence of the planetary waves, the criteria of space and time instabilities and their physical implications, and the coupling of the high and low level planetary waves is presented.

The extent of existence of the wave length of the baroclinic planetary waves is closely related to the velocity field and the vertical stratification. The more unstable the vertical stratification is, the shorter the length of the stable, moving planetary waves may appear will be. The vertical stability in the moist baroclinic atmosphere is much less than that in the dry baroclinic atmosphere, therefore, it is possible for stable, moving planetary waves of much shorter wave length to appear in the moist baroclinic atmosphere. Under the ordinary vertical stratification in the troposphere, it will be no stable, stationary ultra-long planetary waves. If the vertical strafication is as stable as that in the stratosphere, there will be stable, stationary planetary waves with wave length longer than 8500 km.

The strength of the coupling effect of the planetary waves between the upper and the lower levels is determined by the vertical stability. If the vertical stratification is very stable, there will be little coupling effect between the upper and the lower levels. Under the ordinary stratification of the atmosphere, the planetary waves on the upper and lower levels are coupling to each other. The results of coupling are different for different baroclinic space stability. The criterion of the baroclinic space instability is just the 2nd degree polynomials of c in the classical theory of baroclinic instability. It expresses the relationship of the wave numbers along y direction of the baroclinic Haurwitz waves on the high and the low levels and the static stability parameter.

The classical theory of baroclinic instabality is a spaciãl case of the theory considering both the space and time instability presented in this paper. The classical theory of baroclinic instability studies the special case of marginal space instability, and gives plausible results. The creterion of time baroclinic instability is not $\delta<0$, but $c=c_2$. It implies that when $c=c_2$, the frequency of the existing planetary wave kc equals to the frequency of the marginal stable baroclinic Rossby wave which may be considered as the characteristic frequency of the existing baroclinic atmosphere. Hence, some process similar to resonance happens, c becomes imaginary, i.e. $c=c_r+ic_i$, $c_r=c_2$ c_i depends on space stability and δ.

The ideas of space and time baroclinic instability, and stable and unstable planetary waves might help in explaining the observations and solving the discrepancy that the planetary waves are considered as neutral waves in Rossby's and Haurwitz's theories, while they are considered as waves with wave length of maximum instability in the theory of baroclinic instability.