

有云泡结构的对流云中降水形成的研究*

徐华英 李桂忱

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

观测事实表明, 对流云中分布着许多不同大小的云泡, 本文根据这一事实讨论有云泡结构的对流云中降水粒子形成的问题。我们考虑在云泡中的含水量和垂直气流均比云泡外的云中的值大, 因此这是一个含水量和垂直气流同时起伏条件下滴在云中随机生长的模式。

根据滴在云中碰并增长的公式, 我们推得一个重要的关系: 即对于任何滴同样的半径增量, 通过云泡所需移动的距离要比在云泡外的云中所需移动的距离少, 而这个距离的差值仅与云泡的特性有关, 与滴的初始大小无关, 因此滴在云中经过若干云泡的生长就由一个排列问题转变为组合问题, 这就便于我们讨论滴随机穿过若干云泡的生长。

计算结果表明, 有云泡结构的云中, 比较薄的云就可以形成较大的水滴或冰雹, 或者说降低了形成降水对云厚的要求。本文还计算了云泡特征量对降水形成的影响。

一、引 言

许多观测事实表明, 积云是由许多对流云泡组成的。

Вульфсон^[1]指出积云中有各种大小尺度的许多云泡, 云泡中的上升气流较云泡周围云中的值大, 其直径为几十米到几百米不等, 平均值为100米。

黄美元^[2]在苏联的观测指出, 云中的含水量也有起伏, 并且一般较大的含水量与较强的垂直气流相对应。因此, 我们可以认为积云是由许多各种尺度的云泡组成, 在云泡中上升气流速度与含水量都较大。

有云泡结构的云中水滴生长形成降水的问题, 有人曾进行过一些讨论, Mason^[3]考虑了在海洋上大盐核由于经过一个比一个强的云泡, 因此在较薄的云中也可以形成降水。这虽然定性地说明, 考虑云中云泡结构也可能解释薄云中的降水, 但他只作了一种特定云泡分布的计算。李麦村^[4]把云泡看作是气流的涡旋结构, 可以延长水滴在云中停留的时间, 但这个模式还不能反映观测所表明的云泡结构。徐华英、顾震潮^[5]曾经计算过垂直气流起伏条件下薄云降水的问题。计算结果也表明, 考虑了气流的起伏, 可在较薄的云中产生足够浓度的雨滴, 但气流起伏的结构不很清楚, 不能直接与观测表明的云泡结构相联系。

本文根据 Вульфсон 等的观测事实, 假设云是由许多云泡组成的, 在云泡中垂直气流和含水量同时起伏, 计算滴在积云中随机生长形成降水, 讨论在有云泡结构的云中薄

* 本文于1979年7月7日收到, 1979年11月3日收到修改稿。

云降水的问题。

二、模 式

假设云中有各种大小的云泡，它们在云中随机分布，云泡内的含水量和垂直气流都较云泡外的云中大，并假设其含水量及垂直气流与云泡尺度 l 有关，即将云泡看作是一团尺度为 l 并具有较大的含水量和垂直气流的云团，云泡以其本身的上升速度作整体向上运动，云泡外的云中有均匀的含水量和上升速度，在云发展的阶段，云的底部不断产生新的云泡，源源不断的上升，随着云泡的上升，云也不断地发展。

大云滴或雹胚在云中通过重力碰并生长形成雨滴或冰雹，由于云中分布着各种大小强度的云泡，降水及胚胎从某一高度上下落，随机地遇到各种大小云泡，因此，从同一高度降落的粒子，即使大小相同，但由于各自遇到不同的环境，在落出云底时，其大小也不一样，其中有一部分可以长得较大，得到具有一定浓度和宽度的雨滴或冰雹谱。

三、计算公式的推导

滴在云泡中重力碰并生长公式为

$$\frac{dR}{dt} = \frac{E}{4\rho} q_l V(R) \quad (1)$$

式中 $V(R)$ 为水滴或冰球相对云泡的速度， ρ 为水或冰球的密度， q_l 是尺度为 l 的云泡中的含水量， E 为碰并系数，计算中取为常数， R 为滴半径。

经过一个尺度为 l 的云泡后，滴半径增量

$$\Delta R_l = \frac{E}{4\rho} q_l \cdot l \quad (2)$$

由式 (2) 可见：经过一个 l 大小的云泡后，滴半径的增量仅与云泡的特性（含水量和尺度）有关，而与进入云泡的滴大小无关，这就对计算滴随机穿过若干云泡长大进行数学处理带来很大的方便。

水滴或冰球经过一个 l 大小云泡的半径增量为 ΔR_l 时相对于地面移动距离 ΔZ_l 为

$$\Delta Z_l = \frac{4\rho}{E q_l} \left(\Delta R_l - W_l \int_R^{R+\Delta R_l} \frac{dR}{V(R)} \right) \quad (3)$$

式 (3) 中的 W_l 为云泡中的上升速度。

同样的半径增量 ΔR 如不经过云泡时，所需移动的距离 ΔZ 为

$$\Delta Z = \frac{4\rho}{E q} \left(\Delta R - W \int_R^{R+\Delta R} \frac{dR}{V(R)} \right) \quad (4)$$

式中 q 为云泡外云中的平均含水量， W 为云泡外云中的平均上升速度。

对于相同半径增量 ($\Delta R = \Delta R_l$) 在云泡内外所需移动距离的关系为

$$\Delta Z_l = (1 - \beta_l) l + \frac{\beta_l}{\alpha_l} \Delta Z \quad (5)$$

其中

$$\alpha_l = q_l / q, \quad \beta_l = W_l / W$$

因为 $q_l \geq q$, $W_l \geq W$ 所以 $\alpha_l, \beta_l \geq 1$

令 $\alpha_l = \beta_l$ 则

$$\Delta Z_l = \Delta Z - (\beta_l - 1)l \quad (6)$$

公式 (6) 表示, 当云泡内外含水量的比值与垂直速度的比值相同时 ($\alpha_l = \beta_l$), 经过一个云泡后所移动的距离, 比在云泡外的云中相同的半径生长情况所移动的距离少 $(\beta_l - 1)l$, 这个差值仅与云泡的特性有关, 而与进入云泡粒子的大小无关。

因此粒子从 H 高度上下落到云底, 经过几个云泡生长的大小相当于在没有经过云泡的积云中移动的距离为 Z

$$Z = H + \sum_{i=1}^n (\beta_{l_i} - 1)l_i \quad (7)$$

我们称 Z 为虚厚度。由公式 (7) 可以看出, 在有云泡的云中, 经过 H 厚度生长的滴要比无云泡的大。

我们假设单位体积中, l 大小的云泡有 $m(l)$ 个, 滴在降落过程中扫过的体积为 V_l , 其计算如下:

$$\begin{aligned} V_l &= \frac{\pi}{4} l^2 (H + Wt) \\ &= cl^2 + dl^3 \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) 中的 $c = \frac{\pi}{4}(H + Wt)$, $d = \frac{\pi}{4}\gamma Wt$ 其中 γ 为表征云泡起伏强度的量。 $\gamma = \frac{\beta_l - 1}{l}$

即 $\beta_l = \gamma l + 1$, 而 t 则为滴从 H 高度降落到云底所用的时间。

假设滴穿过云泡尺度的谱为

$$N(l) = al^3 e^{-bl^2} \quad (9)$$

则单位体积中云泡尺度分布谱为

$$m(l) = \frac{N(l)}{V(l)} = \frac{al e^{-bl^2}}{c + dl} \quad (10)$$

扫过云泡的谱密度为 $m'(l)$

$$m'(l) = \frac{N(l)}{\bar{N}} \quad (11)$$

其中 \bar{N} 为总共平均扫过云泡的个数, 即 $\bar{N} = \int_0^{\infty} N(l) dl$, 因此

$$m'(l) = 2 b^2 l^3 e^{-bl^2} \quad (12)$$

这样扫过云泡的谱密度 $m'(l)$ 仅由单一的参数 b 确定

$$b = \frac{c}{2 l_n^2 (c + dl_n)} \quad (13)$$

式中 l_n 为单位体积中云泡谱 $m(l)$ 峰值的云泡大小, 即云泡在空间分布中最可几的云泡尺度。

设经过一个 l 大小云泡虚云厚为 Z

$$Z = H + \gamma l^2$$

那么一个 l 对应一个虚云厚 Z , 则得到相应的虚云厚谱 $g(Z)$

$$g(Z) = m'(l) \frac{dl}{dZ} = m'(l)/2\gamma l$$

为了计算方便令 $y=l^2$, 则

$$f(y) = m'(l) \frac{dl}{dy} = m'(l)/2l = b^2 y e^{-by}$$

$$Z = H + \gamma y \quad g(Z) = f(y)/\gamma$$

假设滴穿过第一个云泡状况, 并不影响选择第二个云泡的状况, 即它们之间相互独立, 令 $f(y) = f_1(y)$ 表示只穿过一个云泡的谱分布, $f_2(y)$ 为穿过两个云泡的谱分布, $f_n(y)$ 表示穿过 n 个云泡的谱分布, 根据概率论中的卷积公式

$$f_2(y) = \int_0^y f_1(y-\xi) f_1(\xi) d\xi = \frac{1}{3!} b^4 y^3 e^{-by}$$

⋮

$$f_n(y) = \int_0^y f_{n-1}(y-\xi) f_1(\xi) d\xi$$

$$= \frac{b^{2n}}{(2n-1)!} y^{(2n-1)} e^{-by} \quad (14)$$

因为
所以

$$g_n(Z) = f_n(y)/\gamma$$

$$g_n(Z) = \left(\frac{b}{\gamma}\right)^{2n} \frac{1}{(2n-1)!} (Z-H)^{(2n-1)} e^{-\frac{b}{\gamma}(Z-H)} \quad (15)$$

式(15)中 $g_n(Z)$ 为经过 n 个云泡相应的虚云厚的谱分布。

设水滴穿过云泡的个数服从 Poisson 分布

$$p_n = \frac{\bar{N}^n}{n!} e^{-\bar{N}} \quad (16)$$

式中 \bar{N} 为平均扫过云泡的个数, n 为遇到云泡的个数, p_n 为遇到 n 个云泡的概率。

因此, 一个滴遇到 n 个云泡, 其相应的虚云厚的概率为 $p_n \cdot g_n(Z)$, 穿过不同个数的云泡后其相应的虚云厚 Z 的概率 $P(Z)$ 为

$$P(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot g_n(Z) \quad (17)$$

一个虚云厚 Z , 对应一个滴的大小的谱分布为

$$G(R) = P(Z) \frac{dZ}{dR}$$

设 R_0 大小的滴, 在 H 高度上浓度为 n_0 , 其末速度为 V_0 , 经过时刻 t 之后, 到云底长大到 R , 末速度为 $V(R)$, 则单位体积出云谱分布

$$\psi(R) = G(R) \frac{n_0 V_0}{V(R)} \quad (18)$$

四、计算结果

在计算中对于水滴初始半径 R_0 和浓度 n_0 取如下的值

云中平均参量为

$$R_0 = 10^2 \text{ 微米}, \quad n_0 = 10^2 \text{ 个/米}^3$$

$$W = 0.5 \text{ 米/秒}, \quad q = 1 \text{ 克/米}^3$$

末速度公式

$$\begin{aligned} V(R) &= K_1 R & 100 \text{ 微米} \leq R < 500 \text{ 微米} \\ V(R) &= K_2 \sqrt{R} & R \geq 500 \text{ 微米} \end{aligned} \quad (19)$$

公式中用克·米·秒制, $K_1 = 8000$, $K_2 = 200$,

因此

$$\begin{aligned} Z(R) &= \frac{4\rho}{Eq} \{ R - R_0 - W [\ln 5/K_1 + 2/K_2 (\sqrt{R} - \sqrt{5} \times 0.01)] \} \\ \frac{dZ}{dR} &= \frac{4\rho}{Eq} \left(1 - \frac{1}{K_2 \sqrt{R}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

对于冰雹假设雹块为球形粒子, 其中各参数取值如下

$R_0 = 1$ 毫米, $n_0 = 10$ 个/米³, $q = 2$ 克/米³, $W = 5$ 米/秒, 末速度公式为

$$V(R) = \sqrt{\frac{8\rho_i g R}{3C_D \rho_a}} \quad (22)$$

公式中用克·米·秒制, ρ_i 为冰雹密度, 计算中取 0.9×10^6 克/米³, $g = 9.8$ 米/秒², $C_D = 0.5$ 为阻力系数, ρ_a 为空气密度。

$$Z(R) = C_2 \left(R - 2 \frac{W}{C_1} \sqrt{R} + 2 \frac{W}{C_1} \sqrt{R_0} - R_0 \right) \quad (23)$$

其中

$$C_1 = \sqrt{\frac{8\rho_i g}{3C_D \rho_a}}; \quad C_2 = \frac{4\rho_i}{Eq}$$

$$\frac{dZ}{dR} = C_2 - \frac{C_2 W}{C_1 \sqrt{R}} \quad (24)$$

1. 关于降水形成的计算, 取 $H = 3000$ 米, $\bar{m} = 10^{-6}$ 个/米³, $\ln = 70$ 米, $\gamma = 0.01$ /米, $t = 20$ 分, 这样计算得到出云雨滴谱宽为半径 1100 微米—3000 微米, 主要集中在半径 1600 微米—2000 微米, 雨滴峰值浓度为 1800 微米, 浓度达 1 个/米³, 雨滴总浓度为 10 个/米³, 这与一般观测到的直径大于 1000 微米雨滴浓度差不多^[6]。

如果滴穿过没有云泡结构的云(取上述情况下平均含水量和平均垂直气流值), 半径长大到 1800 微米需云厚 5.4 公里, 而穿过有云泡结构的云, 则只需云厚 3.6 公里, 同样穿过无云泡结构的云半径长大到 3000 微米需云厚 9.4 公里, 而在我们的模式中, 穿过 3.6 公里就可以有少数粒子长大到 3000 微米。相反, 在没有云泡结构的云中, 3.6 公里的云厚只能生长出半径 1200 微米的滴。

我们还计算了 $H = 2000$ 米, $H = 1000$ 米的出云滴谱, 也都得了一定宽度和浓度的雨滴谱。见图 1。

2. 关于冰雹谱的例子, 冰球经过有云泡结构的云后, 得到的出云雹谱半径 0.52—1.29 厘米, 其峰值半径为 0.85 厘米, 它的浓度 0.1 个/米³。如果冰球穿过的云是没有

云泡结构的(取有云泡结构中的平均含水量和平均垂直气流值), 则要长大到半径 0.85 厘米需云厚 6.1 公里, 而在有云泡结构的模式中只要求云厚 4.5 公里。又如要达到 1.29 厘米的冰雹粒子, 在无云泡结构的云中需云厚 11 公里, 而在有云泡结构的云中, 只需 4.5 公里就可以出现少数粒子半径超过 1.29 厘米。参看图 2。

由以上两个例子说明, 由于云中含水量和上升气流的同时起伏, 对形成较大的降水粒子来说, 对云厚的要求降低了, 因而能够解释某些薄云降水和降雹的现象。

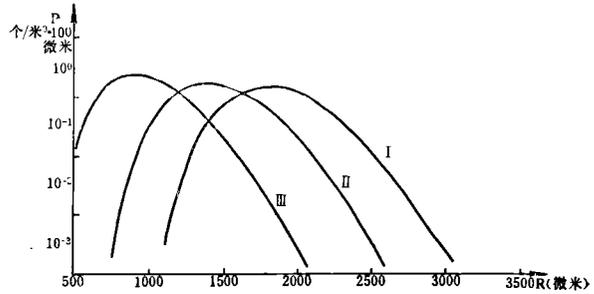


图 1 在云泡结构的云中出云的雨滴谱
(曲线 I $H=3000$ 米, $R_{max}=1800$ 微米; 曲线 II $H=2000$ 米, $R_{max}=1400$ 微米; 曲线 III $H=1000$ 米, $R_{max}=900$ 微米)

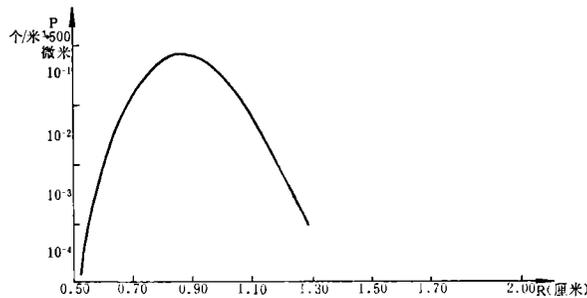


图 2 在云泡结构的云中出云的雹谱
($R_{max}=0.85$ 厘米)

五、云泡特征量对形成降水的影响

在我们的计算中, 描述云泡特征的量有: 表征起伏强度的 γ , 云泡的最可几尺度 l_n , 云中单位体积里云泡的平均浓度 \bar{n} , 我们分别对这三个量的不同大小进行了计算。

(1) 起伏场强度 γ 值对形成雨滴谱及冰雹谱的影响见图 3 及图 4。在图 3 中计算了 γ 为 0.01(1/米)和 0.015(1/米)时, 云中其他参量相同条件下出云的雨滴谱。起伏强度取这两个值表示在云泡中含水量及垂直速度平均为云泡外云中的 1.7 倍及 2.05 倍。其结果表明: 雨滴谱的最大值及峰值均因起伏量增加而加大 500 微米左右, 或者说峰值均因起伏量加大了 30% 左右, 可见起伏强度增大对形成降水十分有利。在图 4 中计算了 γ 为 0.01 和 0.02(1/米)时, 出云的冰雹谱, 这两个例子的云泡中参量各为云泡外云中的 1.7 倍及 2.4 倍, 由于起伏场强度的增加, 出云的冰雹谱增大也很明显, 谱宽增加 0.14 厘米, 峰值半径增加 0.16 厘米或者说加大了 20% 左右。

(2) 单位体积云泡的个数 \bar{n} 对形成雨滴谱和雹谱的影响见图 5 和图 6。我们分别对 $\bar{n}=10^{-6}$ 个/米³ 和 $\bar{n}=0.7 \times 10^{-6}$ 个/米³ 进行了计算, 这两个值表示, 在云中云泡所占有的体积分别为云总体积的 27% 和 19%, 由图 5 看到: 云泡所占体积减少了 30%, 其雨滴谱

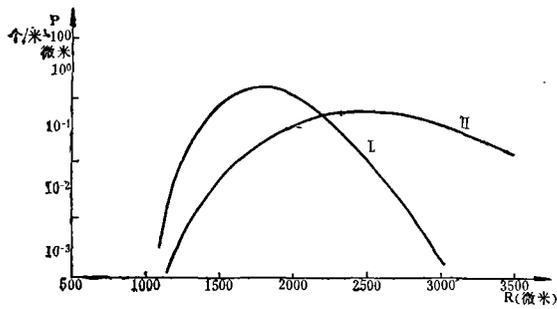


图 3 起伏场强度 γ 对出云雨滴谱的影响
(曲线 I $\gamma=0.01$, $R_{max}=1800$ 微米;
曲线 II $\gamma=0.02$, $R_{max}=2350$ 微米)

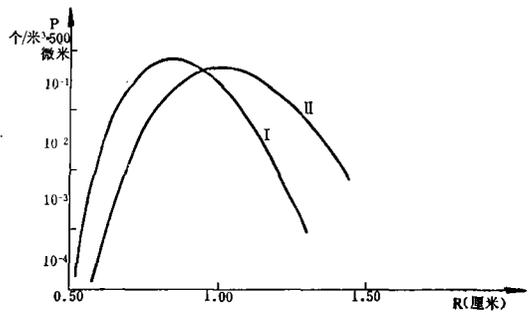


图 4 起伏场强度 γ 对出云霰谱的影响
(曲线 I $\gamma=0.01$, $R_{max}=0.85$
厘米; 曲线 II $\gamma=0.02$, $R_{max}=1.00$ 厘米)

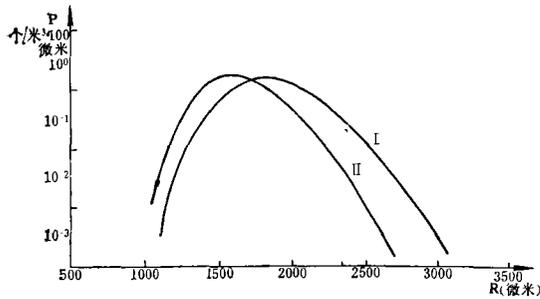


图 5 云泡浓度 \bar{m} 对出云雨滴谱的影响
(曲线 I $\bar{m}=10^{-6}$ 个/米³, $R_{max}=1800$ 微米; 曲线 II $\bar{m}=0.7 \times 10^{-6}$ 个/米³, $R_{max}=1550$ 微米)

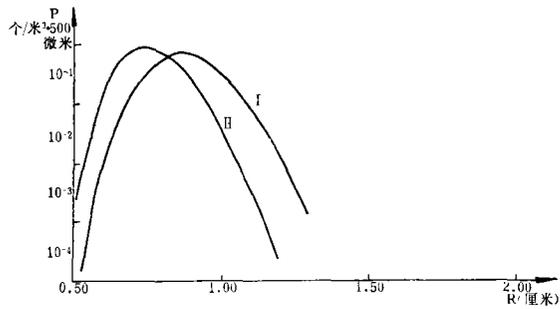


图 6 云泡浓度 \bar{m} 对出云霰谱的影响
(曲线 I $\bar{m}=10^{-6}$ 个/米³, $R_{max}=0.85$ 厘米; 曲线 II $\bar{m}=0.7 \times 10^{-6}$ 个/米³, $R_{max}=0.74$ 厘米)

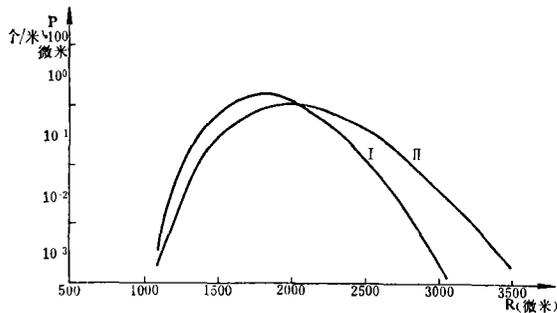


图 7 云泡尺度对出云雨滴谱的影响
(曲线 I $l_n=70$ 米, $R_{max}=1800$ 微米; 曲线 II $l_n=80$ 米, $R_{max}=2000$ 微米)

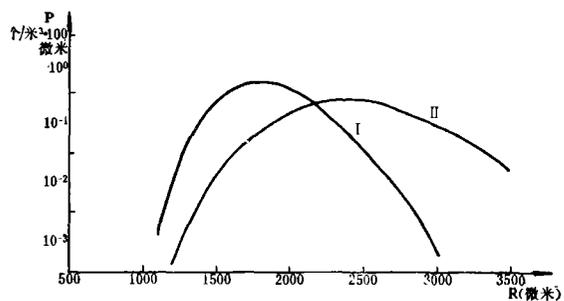


图 8 不同起伏场强度 γ 对应不同云中停留时间的出云雨滴谱
(曲线 I $\gamma=0.01$ $t=20$ 分, $R_{max}=1800$ 微米; 曲线 II $\gamma=0.02$ $t=10$ 分, $R_{max}=2500$ 微米)

的谱宽减少了 300 微米, 峰值半径减少 250 微米、由图 5 看到, 云泡所占体积减少了 30%, 其雨滴谱的宽度减少 300 微米, 峰值半径减少 250 微米。由图 6 看到: 由于体积比减少了 30%, 而出云霰谱的谱宽也减少了 0.16 厘米, 峰值半径由 0.85 厘米降低到 0.74 厘米。由此可见, 云中云泡浓度的减少, 不利于降水的形成。

(3) 图 7 表示了云泡最可几尺度 l_n 的变化对形成降水的影响。结果表明: l_n 由 70 米增加到 80 米, 其谱的宽度增加了 500 微米, 峰值半径由 1800 微米增加到 2000 微米, 说明云泡尺度的增加有利于降水的形成。

(4) 图 8 上两条不同的曲线是假设不同强度的起伏场 ($\gamma_1=0.01$ 1/米; $\gamma_2=0.02$ 1/米) 对应于不同的云中停留时间 $t(t_1=20$ 分; $t_2=10$ 分) 计算的结果。由图可见, 当 γ_1 为 0.01 1/米 时即含水量和上升速度均比云泡外云中的值大 1.7 倍时, 滴从 3000 米高度降到云底需 20 分钟才得到谱宽为 1100 微米—1800 微米, 峰值半径为 1800 微米的雨滴谱。如果起伏强度增加到 0.02 1/米, 即云泡中的含水量和上升速度均比云泡外云中的大 2.4 倍时, 滴从 3000 米高度降到云底只需 10 分钟就得到谱宽 1150 微米—3500 微米, 峰值半径为 2500 微米的滴谱, 由此说明当起伏强度增加之后, 要形成一定浓度和大小的降水粒子, 对滴在云中停留时间的要求大大降低了。

总之在云泡结构的云中起伏场越强, 单位体积中云泡的个数越多, 云泡的尺度越大, 就越有利于大的降水粒子的形成, 这与我们在宏观云的观测中看到, 在积云中翻滚越厉害, 越有利于出现强的降水现象是吻合的。

六、结 束 语

根据对流云中云泡结构的观测事实, 我们建立了滴在云中随机生长的模式, 计算了降水及降霰情况, 所得结果为:

(1) 在不太厚的云中可能形成降水或冰霰。在计算中我们选取了云厚为 1600、2600、3600 米, 在适当的条件下均能在地面上形成一定浓度和大小的降水粒子, 对于冰霰云我们计算了 4500 米的云厚也出现了较大的冰霰(峰值直径 1.7 cm), 由此可见考虑了云泡结构有利于解释较薄的云形成降水或冰霰这一观测事实, 我们的模式还为人工降水作业提供了一定的作业理论依据, 即在作业中可以选择在云泡结构的云中施放适量的大水滴, 即使云不太厚, 也可期望得到降水。

(2) 计算得到的降水粒子浓度及冰霰浓度与观测结果比较相符, 如我们计算半径大于 500 微米的雨滴谱浓度为 10 个/米³, 一般观测^[6]半径大于 500 微米的雨滴浓度为 1—10 个/米³; 我们计算的冰霰浓度为 0.1 个/米³, 苏联观测直径 1.6 厘米的冰霰浓度 1 个/米³^[7], 由此可见, 我们考虑的随机生长模式是比较合理的。

参 考 文 献

- [1] Вульфсон, Н. И., исследование конвективных движений в свободной атмосфере, ИЗД. АН СССР, Москва, 1961.
- [2] 黄美元, ИЗВ. АН СССР, Сер. Геофиз., 362—376, 1963.
- [3] Mason, B., *Tellus*, 11 216, 1959.
- [4] 李麦村, 云中对流胞对降水微观过程的影响. 中国科学院地球物理所集刊——云雾降水微物理的一些理论问

题, 科学出版社, 16—24, 1963.

[5] 徐华英、顾震潮, 起伏条件下重力碰并造成的暖性薄云降水, 气象学报, 33 (1), 108—114, 1963.

[6] 顾震潮, 云和降水物理, 科学出版社, (即将出版)。

[7] 雷雨顺、吴宝俊、吴正华, 冰雹概论, 科学出版社, 1978.

A STUDY ON THE FORMATION OF THE PRECIPITATION IN CONVECTIVE CLOUD WITH CELL STRUCTURE

Xu Hua-ying, Li Gui-chen

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The formation of precipitation in convective cloud with cell structure is investigated, based on the fact that a cloud consists of a great deal of cells in different phases. Considering that water content and speed of updraft in the cloud cells are larger than that in their environments, a cloud model in which droplets grow up by stochastic coalescence under the condition of simultaneous fluctuation in water content and updraft is designed.

According to the growth of precipitation particles by coalescence in clouds, a relationship between the droplet growth and its displacement in the cloud with cells is obtained and, we have also discussed the size distribution of precipitation particles after they have passed through the convective cells at random.

We have calculated the formation of rain and hail in different conditions. It can be shown from the spectrum of precipitation obtained when the above behaviours are considered that larger precipitation particles could be produced in shallow cloud in this case compared with the same situation (e. g. water content and updraft) in which no cells exist.

We have also calculated the effect of the various parameters of the cells on the formation of precipitation, and found that the more the fluctuation is, the larger the precipitation will be.

The results calculated show that the rainfall and hailfall in the model fit to realistic state.