

饱和湿空气动力学的基本方程和主要特征*

王两铭 罗会邦

(中央气象局气象科学研究所天气气候研究所) (中山大学气象系)

提 要

本文从大气热力学的基本特征^[1]出发,引入了代表饱和湿空气焓的特征量的广义温度,并推导了一组饱和湿空气动力学方程组。还提出了湿平衡风(或称湿地转风)、假相当位温风(或称湿热成风)的概念;对低空急流等若干基本特征也作了探讨。

一、引 言

在研究台风、暴雨这样一类具有大量水汽凝结现象的大气运动时,人们从各种途径探讨湿空气的作用。谢义炳先生于1977年10月的全国能量天气会议上,提出了湿斜压性的问题,并于1978年5月的全国暴雨学术会议上,较系统地阐明了这个问题^[2]。与此同时,作者于1977年10月对同年5—7月,华南前汛期暴雨时期的结构所作的分析表明^[3],在大气低层的饱和湿空气内,于其平均假相当位温暖湿中心的右侧(背风而立,下同),存在着一支超地转的低空急流,风场并不具有地转特征;在空间结构方面,饱和层内的垂直切变风,同该层平均温度场的关系并不具有热成风的特征,而同该层平均假相当位温的关系密切,即垂直切变风的方向近似地平行于平均等假相当位温线,其量值近似地与平均等假相当位温线的梯度成比例。同时,用此结果分析了暴雨落区的原因^[4]。计算表明^[5],在饱和湿空气的斜压性(简称湿斜压性)中,感热部份与潜热部份之比为1:1.4至1:1.9。这个结果表明,当空气达到饱和后,其潜热部份在大气动力学中起主要作用,从而使大气动力学的许多基本特征发生重大变化,现给予分别讨论。

二、相当的干燥大气

在讨论饱和湿空气动力学之前,作者强调这样一个基本观点,即大气的凝结过程可以看作是饱和湿空气系统内部的一种广义热力过程;凝结潜热可以看作是系统总位能的一个部份。由此,可将热力学第一定律改写成如下的形式,即

$$\delta Q^* \cong c_{pd} dT - \frac{AR_d T}{p} dp + L dq \quad q \geq q_s^* \quad (2.1)$$

式中的 δQ^* 为系统外部的加热项; c_{pd} 为干空气定压比热; L 为凝结潜热; q_s 为饱和比湿; T 、 p 、 R_d 分别为饱和湿空气的温度、气压和干空气的比气体常数。在等焓过程中,在 L 和 c_{pd} 假定为常数的情况下有

$$dh^* = c_{pd} dT^* = 0 \quad (2.2)$$

* 本文于1979年3月29日收到;于1979年7月6日收到修改稿

1) 本文均讨论 $q \geq q_s$, $\omega < 0$,以后不再另加说明。

式中的 h^* 为单位质量饱和湿空气的焓（简称湿焓），其中

$$T^* = T + \frac{L}{c_{pd}} q \quad (2.3)$$

T^* 称为广义温度，或称为饱和湿空气的相当温度。

由饱和湿空气的基本特征^[1]可见，饱和湿空气的状态分布，可以通过某种广义的热力过程，如等焓或假绝热（本文以等焓过程为例）等热力过程。在等焓条件下，将饱和湿空气中焓的分布，用与参考态相当的干燥大气的焓来表示，相当干燥大气的温度为 T^* 。因为过程是等焓的，故气压 p 不变，并对系统外界绝热。这种类似于干空气的相当干燥大气，有它自己的动力学特征。

等压面上的位势场是由静力方程和状态方程通过垂直积分而得到的。在干空气和进行虚温订正的湿空气中，分别为

$$\varphi = \int_0^z g dz = - \int_{p_0}^p R_d T d \ln p \quad (2.4)$$

$$\varphi_v = \int_0^z g dq = - \int_{p_0}^p R_d T_v d \ln p \quad (2.5)$$

则在相当的干燥大气中，类似地可由广义温度 T^* 定义一个广义位势 φ^* ，即

$$\varphi^* = \int_0^z g dz = - \int_{p_0}^p R_d T^* d \ln p \quad (2.6)$$

为了区别于干空气的物理量，在相当的干燥大气中，其对应的物理量用“*”表示。

三、动力学基本方程组

1. 状态方程

假定在饱和湿空气中的状态方程仍然成立，即

$$p = \rho RT \quad (3.1)$$

其中 ρ 为饱和湿空气的密度。在等焓条件下，相当干燥大气中的状态方程为

$$p = \rho^* R T^* \quad (3.2)$$

其中

$$\rho^* = \rho / \left(1 + \frac{Lq}{c_{pd}T} \right) \quad (3.3)$$

为相当干燥大气密度。

2. 静力方程

两个等压面间的位势差是由该两个等压面间的密度决定的。故在相当的干燥大气中，静力方程应为

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial p} = - \frac{1}{\rho^*} \quad (3.4)$$

由 (3.4) 式通过 (3.2) 式对高度进行积分，并假定 $p = p_0$ 时， $\varphi^* = 0$ ，则可直接推得 (2.6) 式的定义。

将 (2.3) 代入 (2.6) 式得

$$\varphi^* = - \int_{p_0}^p R_d T d \ln p - \int_{p_0}^p R_d \frac{L}{c_{pd}} q d \ln p \quad (3.5)$$

由 (3.5) 可知，相当的干燥大气，其位势场由两部分组成，一部分是由测量温度

T 所确定, 另一部分则是由饱和湿空气中的比湿所确定。

3. 水平运动方程

由 (2.4)、(2.5) 分别定义的位势高度, 经坐标变换, 则在 p 坐标中其对应的水平运动方程分别为

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k}\wedge\vec{V} = -(\nabla\varphi)_p \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k}\wedge\vec{V} = -(\nabla\varphi_v)_p \quad (3.7)$$

在相当的干燥大气中, 类似地有对应的水平运动方程

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k}\wedge\vec{V} = -(\nabla\varphi^*)_p \quad (3.8)$$

(3.8) 式也可由等压面 $z=z^*$ 上的气压梯度通过一般坐标变换直接推得 (推导略)。(3.6)、(3.7) 分别讨论干空气和未饱和湿空气的大气运动, 而 (3.8) 式试图讨论已有凝结发生的饱和湿空气中的大气运动。

4. 连续方程

在 p 坐标中的连续方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_p = 0 \quad (3.9)$$

注意到在相当的干燥大气中, 由 z 坐标变换成 p 坐标有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{z=z^*} = \rho^* \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial s}\right)_p \quad (3.10)$$

式中的 s 是指变量 x, y, t , 则

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \rho^* \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - g\omega \right) \quad (3.11)$$

由 (3.4) 对 p 微商得

$$\frac{1}{\rho^{*2}} \frac{\partial \rho^*}{\partial p} = \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial p^2} \quad (3.12)$$

将 (3.11) 对 p 微分后代入 (3.9), 并利用坐标变换关系, 得 z 坐标的连续方程为

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z=z^*} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z=z^*} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z=z^*} = 0 \quad (3.13)$$

5. 热流量方程

假设饱和湿空气的绝热过程是假绝热过程, 则热流量方程 (2.1) 可近似地写成

$$\frac{d\theta_{se}}{\theta_{se}} \approx \frac{dT^*}{T^*} - \frac{AR_d}{c_{pd}} \frac{dp}{p} = 0 \quad (3.14)$$

饱和比湿 q_s 可近似地写成

$$q_s \approx 0.622 \frac{E(T)}{p} \quad (3.15)$$

式中的 E 为饱和水汽压。使用克拉拍龙-克劳修斯 (Clapeyron-Clausius) 定律, 在等压面上取对数微商后有

$$\nabla q_s = \frac{Lq_s}{R_s T^2} \nabla T \quad (3.16)$$

式中的 R_s 为单位质量水汽的气体常数。注意到由温度和位势随高度变化的关系, 则由 (3.4) 式得

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial p} = \left(1 + \frac{Lq}{c_{pd} T}\right) g \frac{\partial Z}{\partial p} \quad (3.17)$$

将 (3.16)、(3.17) 代入 (3.14) 并使用 (2.4) 的定义则热流量方程为

$$\left(1 + \frac{Lq}{c_{pd} T} \frac{L}{R_s T}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\right) \frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{c_s^2}{p^2 g} \omega = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{其中} \quad c_s^2 = \frac{R_d}{g} \left\{ \left(1 + \frac{Lq}{R_d T}\right) \gamma_d - \left(1 + \frac{Lq}{c_{pd} T} \frac{L}{R_s T}\right) \gamma \right\} R_d T \quad (3.19)$$

为饱和湿空气的静力稳定度。式中的 γ 为大气垂直减温率, γ_d 为干绝热递减率。

6. 动力学基本方程组

饱和湿空气动力学的基本方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \wedge \vec{V} = -(\nabla \varphi^*)_p \\ \nabla \cdot \vec{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\right) \frac{\partial \varphi^*}{\partial p} + \frac{c_s^2}{p^2} \omega = 0 \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial p} = -\frac{1}{\rho^*} \\ p = \rho^* R T^* \end{array} \right. \quad (3.20)$$

(3.20) 式也适用于干空气或未饱和湿空气, 只要在方程中去掉所有包括 q 的项, 即为通常所用的干空气动力学的基本方程组。

四、动力学方程组的基本特征

从 (3.20) 式可以看到, 它的基本形式同干空气或未饱和湿空气极为相似, 而且比后者更具有普遍形式, 故干空气或未饱和湿空气的基本动力学特征都将在饱和湿空气中得到对应的结果。现将其主要特征简述如下。

1. 湿平衡风——等压面上的广义位势梯度

在无水平加速和无摩擦的条件下, 由 (3.8) 式得饱和湿空气中的平衡风, 即湿平衡风 \vec{V}_{sg} (简称湿地转风)。

$$\vec{V}_{sg} = \frac{1}{f} \vec{k} \wedge \nabla \varphi^* \quad (4.1)$$

类似于干空气中的地转风, 在饱和湿空气中, 湿平衡风是由等压面上的广义位势梯度确定的, 它的方向平行于等广义位势线; 它的量值与广义位势梯度成正比。如果不考虑饱和比湿的作用, 则 (4.1) 式简化为地转风 \vec{V}_g

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f} \vec{k} \wedge \nabla \varphi \quad (4.2)$$

2. 假相当位温风——等压面上的水平广义温度梯度

将 (4.1) 对 p 微商得

$$\vec{V}_{ST} = -\frac{\partial \vec{V}_{s\bar{e}}}{\partial p} = -\frac{1}{f} \bar{k} \wedge \nabla \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial p} \right) \quad (4.3)$$

式中的 \vec{V}_{ST} 即为假相当位温风 (或称湿热成风)。将 (3.4) 式代入 (4.3) 式, 利用 (3.2)、(3.6) 式可得由平均温度梯度表示的假相当位温风的表达式为

$$\vec{V}_{ST} = \frac{1}{f\bar{\rho}} \left(1 + \frac{L\bar{q}}{c_{pd}\bar{T}} \frac{L}{R_s\bar{T}} \right) \bar{k} \wedge \frac{\nabla \bar{T}}{\bar{T}} \quad (4.4)$$

式中“—”表示饱和层内的平均值。或用由 (2.4) 定义的等压面间的厚度场表示有

$$\vec{V}_{ST} = -\frac{g}{f} \left(1 + \frac{L\bar{q}}{c_{pd}\bar{T}} \frac{L}{R_s\bar{T}} \right) \bar{k} \wedge \nabla \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right) \quad (4.5)$$

由 (4.4) 和 (4.5) 可见, 在饱和湿空气中, 假相当位温风是由两部分组成, 一部分是由温度场构成的热成风; 另一部分是由饱和比湿场构成的风的垂直切变, 暂称之为“饱和热成风”, 而假相当位温风即为热成风和饱和热成风之和。动力学分析表明^[5], 饱和热成风大约是热成风的 1.0 至 1.9 倍。由此可见, 由平均饱和比湿的分布不均而引起的饱和热成风比热成风更为显著。

在准常定、准水平运动中, 由 (3.14) 式在等压面上有

$$\frac{1}{\theta_{se}} \nabla \theta_{se} \cong \left(1 + \frac{Lq}{c_{pd}T} \frac{L}{R_s T} \right) \frac{\nabla T}{T} \quad (4.6)$$

将 (4.6) 代入 (4.4) 后得

$$\vec{V}_{ST} \cong \frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{1}{\bar{\theta}_{se}} \bar{k} \wedge \nabla \bar{\theta}_{se} \quad (4.7)$$

(4.7) 式表明, 饱和湿空气中的假相当位温风, 其风向平行于该层内平均假相当位温 (θ_{se}) 线, 其量值正比于该层内的平均假相当位温 $\bar{\theta}_{se}$ 的梯度。这同实际计算的经验结果^[3]是一致的。这也证实了[4]中所作的假定似乎是可行的。

当不考虑饱和比湿的作用时, 则 (4.4) 式便简化为热成风关系式。

上面的结果表明, 似乎存在着这样的机制, 即干空气中的准地转过程可以推广到饱和的湿空气中去。在饱和湿空气中, 似乎也存在着一种类似于地转风、热成风的平衡过程, 即湿平衡风和假相当位温风的平衡过程。

3. 温湿场和风场的分布特征

假设从 850 毫巴至 500 毫巴为饱和层 (这与华南前汛期雨季时大体是一致的)。在饱和层内, 当空气自未饱和和变为饱和的过程中, 该层内的厚度场 $\delta\varphi^*$ 增厚, 从而增加了该层内负的假相当位温风涡度。为讨论清楚起见, 假设 x 轴沿暖湿舌自西南指向东北, 与盛行气流一致, 则背风而立, 按 (4.7) 式, 在暖湿中心的右方, 风的垂直切变减小, 左侧加大。按照物理过程的分析, 此时垂直运动产生加速, 低层辐合、高层辐散以及在柯氏力的作用下, 低层气旋性环流、高层反气旋性环流发生加速。故在空气自未饱和到饱和的过程中, 在上述 x 轴的指向下, 下层右侧、上层左侧西南风速加大, 则在原来的

西南气流中容易形成西南低空急流，这同暴雨常形成在上、下两支急流之间的经验^[6]是一致的。按此分析，在平均暖湿中心的下层左侧和上层右侧，西南风将减小。

故在空气自未饱和到饱和的过程中，西风角动量的下传现象似乎只出现在暖湿中心的右侧，而其左侧则是东风角动量的下传（或西风角动量的上传），观测的结果也证实了这点^[3]。作者在暴雨过程的物理分析中表明，这似乎是涡度的下传现象。

上述讨论似乎还表明，凝结同低空急流是同时的现象。如果假设空气达到饱和即发生凝结，则当空气层达到饱和时，则也同时会出现低空急流。这同能量守恒的理论分析^[2]和数值模拟的结果^[7]是一致的，也同华南地区预报员的经验相一致。这提供了对低空急流的发生和维持的一种可能机制。

五、初步结果

1. 干空气中的地转风、热成风的平衡过程，似乎可以推广到饱和的湿空气中去，对应的是一种湿平衡风和假相当位温风的平衡过程。

2. 由广义温度 T^* 和广义位势 φ^* 推得的一组饱和湿空气动力学方程组，也可以适用于干空气，只要将所有方程中包含 q 的项去掉即可。故干空气动力学中的一系列特征，都可在饱和湿空气内有其对应的结果。

3. 饱和湿空气中的假相当位温风，是由温度水平分布不均而引起的热成风和由饱和湿空气的比湿水平分布不均而引起的饱和热成风两部分组成，两者有相同的数量级。

4. 饱和湿空气中的假相当位温风，它的方向同平均等假相当位温线平行，其量值正比于平均假相当位温 $\bar{\theta}_{se}$ 的梯度。

5. 在空气自未饱和和变为饱和的过程中，在低层暖湿中心的右方和上层暖湿中心的左方西南风速将增大，易于形成上下两支急流，这同观测的温湿场和风场结构是一致的。它提供了低空急流形成和维持的一种可能机制。

6. 通常观测到的暴雨地区的低空急流，其方向同地转风较一致，但风速偏大的所谓超地转现象，可能是在考虑了广义位势 φ^* 以后的一种饱和湿空气中的准平衡现象。

7. 分析表明，在空气自未饱和到达饱和的过程中，西风角动量的下传现象只出现在暖湿中心的右侧，而其左侧则是上传的。作者认为这可能是一种涡度的下传现象。

由上面的讨论可见，在饱和湿空气中，由于比湿的水平分布不均，反映了湿焔的水平分布不均，引起了饱和湿空气的斜压性，从而导致一些动力学基本特征的变化。本文在这方面只作了初步探讨，许多问题还有待于进一步的深入研究。

致谢：本文是在谢义炳、廖洞贤先生的热情支持、鼓励和帮助下进行的。杨大升先生对此工作也多次提出宝贵意见，并对本文进行了全面的审查。在此均表示深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] Iribarne, J. V. and Godson, W. L., Atmospheric Thermodynamics, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, BOSTON-U.S.A, 1973.
- [2] 谢义炳, 湿斜压天气动力学问题, 暴雨文集, 吉林人民出版社(即将出版)。
- [3] 王两铭、罗会邦, 暴雨天气动力学一些问题的探讨(Ⅰ)——分析工具, 中山大学学报, 1978年第1期。
- [4] 罗会邦、王两铭, 暴雨天气动力学一些问题的探讨(Ⅱ)——暴雨落区天气和动力学分析, 中山大学学报, 1978年第1期。

- [5] 王两铭、罗会邦, 暴雨的落区预报, 暴雨文集, 吉林人民出版社 (即将出版)。
[6] 王两铭等, 华南前汛期暴雨落区预报的初步探讨, 华南暴雨文集 (即将出版)。
[7] 朱抱真等, 一个切变线低槽降水形成的数值试验 (尚未发表)。

THE BASIC DYNAMIC EQUATIONS AND THE MAIN PROPERTIES OF THE SATURATED MOIST AIR

Wang Liang-ming

*(Research Institute of Weather and Climate, Central
Meteorological Service)*

Luo Hui-bang

(Department of Meteorology, Zhongshan University)

Abstract

By use of the so-called generalized temperature of the saturated moist air, a characteristic quantity representing the enthalpy of the air and a set of dynamic equations are derived. On the basis of them, the concept of the moistbalanced wind (or moist geostrophic wind) and that of pseudoequivalent temperature wind (or moist thermal wind) are suggested. Finally, some fundamental behaviours of low-level jet streams are studied.