第38卷 第1期　　气 象 学 报　　Vol. 38, No. 1
1980 年 3 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Mar., 1980

关于处理初始资料和取某些参数的问题*

廖洞贤　王　超

（中央气象局气象科学研究院天气气候研究所）

提　要

针对目前处理初始资料中存在的问题，提出了一个满足能量守恒和整层无辐散等约束条件的变分方案，并就风的调整进行了试验。结果表明，在严格满足约束条件的情况下，调整后的风及其分布比调整前改变并不大。调整值可以作为预报方程的初值。

文中还针对某些参数因人、因地而取值不同的问题，提出了一个可以随流场、温度场调整的方案。

一、问题的提出

数值天气预报往往作为初值问题来考虑。实践表明，直接用观测资料作为初值，容易导致高频振荡，使计算不稳定。其原因有人归之为风压场之间的不适应[1]。为此，他们提出了一些解决问题的方案，如恢复迭代法和某些变分的方法等，企图通过它们求出协调的、接近平衡状态的初值。

根据试验，这些方法都有一定的优点。如高频振荡大为削弱，预报效果较不处理的有所改进等。但它们也有缺点，如计算费时，一次处理往往相当于算一次 24 小时预报，而且，处理后，动能的损失也较大[2]。这问题仍有再研究的必要。

二、观测初值和预报模式的不协调

所谓初值，就是方程的解在初始时刻的值。显然，初值处理的问题，可以作为方程的解来讨论。如观测值没有任何观测和人为的误差，应当认为，它就是真正描写大气活动方程的初值。这方程和预报方程可能具有的解，在初始时刻的值是不一定相同的。其所以如此，是由于现用的流体动力和热力学方程还不能绝对准确地描写大气的活动，而常用的预报方程一般还要简化，或多或少地略去一些东西；即使不考虑计算的误差，预报方程的解和真正描写大气活动的方程的解之间总是有差别的。

考虑一般预报域大多为有限区，天气预报并不是单纯的初值问题，它还和边值有关。方程的解应满足初值、边值以及从方程和定解条件导出来的一切关系式或方程（包括带时间微商和不带时间微商的关系式或方程）。如对于一个整层无辐散的模式，其解就必须

* 本文于 1979 年 1 月 26 日收到，1979 年 7 月收到修改稿。

满足在整层无辐散条件下导出来的风压场平衡关系(如文献[3],方程(27)),而一般观测值则是不满足的。对于其他模式,也可能有类似的情况,比如,在很多模式中,都设水平侧边界法向速度为零,这时,对任一物理量 A,其通量 $\nabla\cdot A\vec{V}$ 在整个计算域内的积分为零。这个结果,显然一般观测值是不满足的。用数学语言来说,这是个不适定的问题。这和所谓"适应问题"不同,因为在后一问题中,问题的提法是适定的,满足定解条件的解是存在的。对于这两类不同的问题,应该用不同的方法来解决。

另一方面,处理初值也不是单纯的过滤高频振荡的问题。我们认为,产生大振幅的高频振荡,主要是观测值和模式的性质的不协调所致。根据经验,一个能量守恒的计算模式对抑制计算不稳定有显著的作用[4]。所以,如果一个模式具有能量守恒和其他一次或二次守恒的性质,通过某种方法,使观测值经过修改,也具有这种性质,那么,高频振荡就会受到抑制,就不必人为地用一些可以起过滤作用的因素来处理了。也就是说,处理初值的方案应当建立在使观测值和模式的协调上,不同的模式可能处理的方法有所不同。

为了讨论方便,下面我们称初值具有模式性质的为"适应的",只具有其主要性质的为"近似适应的"。处理初值,则是使观测值处理为"适应的"或"近似适应的"值。

三、现用方法存在的一些问题

为了解决上面提到的问题,有必要回顾一下目前常用的一些方法。

最常用的一种方法是所谓"恢复迭代法"。这种方法有个特点:在时间积分时,积分的方向交替变化。从理论上说,这要求方程是可逆的,否则就会出现原则性的错误。一般来说,预报方程是不可逆的。笼统地不加区别地使用这种方法没有根据。至于具体的方程,则需要作具体的分析。比如,对于平流方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-u\frac{\partial A}{\partial x} \tag{3.1}$$

来说,如令 $\hat{t}=-t$, $\hat{x}=x$, $\hat{u}=d\hat{x}/d\hat{t}$,则 $u=-\hat{u}$, $\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial \hat{t}}$, $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \hat{x}}$,故方程(3.1)成为

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{t}}=-\hat{u}\frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \tag{3.2}$$

(3.1)和(3.2)两方程在形式上是完全一样的。其特征线相同,但传播方向相反。所以,在上述坐标变换下,方程所描述的是可逆过程。

如考虑粘性项,如

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-u\frac{\partial A}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \tag{3.3}$$

在上述坐标变换下,方程成为

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{t}}=-\hat{u}\frac{\partial A}{\partial \hat{x}}-\mu\frac{\partial^2 A}{\partial \hat{x}^2}, \tag{3.4}$$

即描述一不可逆过程。

而且，即使方程是可逆的，其相应的差分方程也可能是不可逆的。比如，对于方程(3.1)，如采用 Euler 向后差，容易证明，经过向前推一个时间步长，再向后推一个时间步长，得到的初值 $A_i^{1(0)}$ 是

$$A_i^{1(0)}=A_i^{(0)}+\alpha^2\nabla_x^2A_i^{(0)}+\alpha^4\nabla_x^4A_i^{(0)} \tag{3.5}$$

其中 $A_i^{(0)}$ 是 A 在 $t=t_0$ 时，在 $x=id$(d 是网格距)点上的值，$\alpha=u\Delta t/d$，∇_x^2、∇_x^4 是 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ 相应的差商。从(3.5)式可见，这个过程是不可逆的。也许有人认为，我们所需要的正是不可逆过程；如果过程可逆，就不可能起到削弱高频波的作用了。当然，通过 Euler 向后差可以把高频波削弱，但这不一定是预报方程所固有的［如方程(3.1)］。在大多数情况，只可能是截断误差的结果。利用这种特性，企图解决初值和预报模式之间的不协调的问题，看来是不能令人信服的。

至于一些用变分处理初值的方法，则有两个方面的问题：一是构造的泛函数不是从模式出发的。这样通过变分处理的初值，一般并不具有模式的主要特性，因而，也和模式不协调；另一个问题是，经过这样处理，还不能认为观测值已完全适应模式，顶多只能看作近似适应。在时间积分过程中，其不适应部分仍有可能随时间增长。所以，这样作仍然是不够的。

在一次讨论会上，石宗宝同志提出，可以用预报方程来适应资料。这在某一瞬间是可以的。但这样作还不能对预报起作用。要起作用，就要考虑在整个时间积分中，资料和方程之间的不适应随时间和空间的变化。这需要添加新的资料，从而，就使可预报的时限受到了限制。

因此，要使资料和模式达到完全的适应很难。我们的要求有必要放宽。如使观测值和模式近似适应，而且，在时间积分过程中，预报值也一直和模式近似适应等。

四、一个处理初始资料的方案

作为一个例子，现在我们提出实现上述想法的初步方案。

在 P-坐标系中，如不考虑加热、摩擦，或二者在整个预报域内的积分之和为零，在整层无辐散条件下，可以证明：大气的总能量是守恒的[5]。因此，我们可以构造如下的泛函数 J，即

$$J=\sum_{i,j}\Bigg\{\sum_k\Big[\alpha(u_{i,j,k}-\tilde{u}_{i,j,k})^2+\alpha(v_{i,j,k}-\tilde{v}_{i,j,k})^2+\beta(T'_{i,j,k}-\widetilde{T}'_{i,j,k})^2+$$

$$\lambda_1\Big(\frac{u_{i,j,k}^2+v_{i,jk,}^2}{2}+c_pT'_{i,j,k}-E_0\Big)\Big]+\lambda_{i,j}\sum_k\frac{1}{2d}(\delta_xu+\delta_yv)_{i,j,k}\Bigg\} \tag{4.1}$$

其中 α、β 是权重系数；$\widetilde{(\ )}$ 为观测值，不带"～"的为调整后的值；$T_{i,j,k}=\hat{T}+T'_{i,j,k}$，$\hat{T}$ 是常数；λ_1、$\lambda_{i,j}$ 为 Lagrange 乘数；$E_0=\sum_{i,j,k}\Big[\frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j,k}^2+\tilde{v}_{i,j,k}^2)+c_p\widetilde{T}'_{i,j,k}\Big]$；$\delta_x(\ )=(\ )_{i+1,jk}-(\ )_{i-1,jk}$，$\delta_y(\ )=(\ )_{i,j+1,k}-(\ )_{i,j-1,k}$；其他都是气象上常用的符号。

令 $\partial J/\partial u_{ijk}, \partial J/\partial v_{i,j,k}, \partial J/\partial T'_{i,j,k}, \partial J/\partial \lambda_1, \partial J/\partial \lambda_{i,j}=0$，则可以得到

$$2\alpha(u_{i,j,k}-\tilde{u}_{i,j,k})+\lambda_1 u_{i,j,k}-\frac{1}{2d}(\delta_x\lambda)_{i,j}=0 \tag{4.2}$$

$$2\alpha(v_{i,j,k}-\tilde{v}_{i,j,k})+\lambda_1 v_{i,j,k}-\frac{1}{2d}(\delta_y\lambda)_{i,j}=0 \tag{4.3}$$

$$2\beta(T'_{i,j,k}-\tilde{T}'_{i,j,k})+\lambda_1 c_p=0 \tag{4.4}$$

$$\sum_{i,j,k}\left(\frac{u^2_{i,j,k}+v^2_{i,j,k}}{2}+c_pT'_{i,j,k}\right)=E_0 \tag{4.5}$$

$$\sum_k(\delta_x u+\delta_y v)_{i,j,k}=0 \tag{4.6}$$

对上面诸方程进行简单的运算和整理，则

$$u_{i,j,k}=\frac{2\alpha}{2\alpha+\lambda_1}\tilde{u}_{i,j,k}+\frac{1}{2(2\alpha+\lambda_1)d}\delta_x\lambda_1 \tag{4.7}$$

$$v_{i,j,k}=\frac{2\alpha}{2\alpha+\lambda_1}\tilde{v}_{i,j,k}+\frac{1}{2(2\alpha+\lambda_1)d}\delta_y\lambda_1 \tag{4.8}$$

$$T'_{i,j,k}=\tilde{T}'_{i,j,k}-\frac{c_p}{2\beta}\lambda_1 \tag{4.9}$$

$$(\nabla^2\lambda)_{ij}=-4\alpha d\sum_k(\delta_x\tilde{u}+\delta_y\tilde{v})_{ijk} \tag{4.10}$$

在一定边界条件下，解方程(4.10)，用求得的 λ_{ij} 值代入(4.7)和(4.8)，再代入(4.5)式，则有

$$\sum_{i,j,k}\left[\left(\frac{2\alpha}{2\alpha+\lambda_1}\right)^2\left(\frac{u^{*2}+v^{*2}}{2}\right)+c_p\tilde{T}'-\frac{c_p^2}{2\beta}\lambda_1\right]=E_0$$

用 $(2\alpha+\lambda_1)^2$ 乘两端，则有

$$a_0\lambda_1^3+a_1\lambda_1^2+a_2\lambda_1+a_3=0 \tag{4.11}$$

其中 $\nabla^2(\quad)=\lambda_{i+2,jk}+\lambda_{i-2,jk}+\lambda_{i,j+2,k}+\lambda_{i,j-2,k}-4\lambda_{i,j,k}$；

$$a_0=\frac{c_p^2}{2\beta};$$

$$a_1=\frac{2\alpha c_p^2}{\beta}-\frac{c_p}{LMN}\sum_{i,j,k}\tilde{T}'_{i,j,k}+\frac{1}{LMN}E_0;$$

$$a_2=\frac{2\alpha^2c_p^2}{\beta}-\frac{4\alpha}{LMN}\left(c_p\sum_{i,j,k}\tilde{T}'_{i,j,k}-E_0\right);$$

$$a_3=\frac{2\alpha^2}{LMN}\left[2\left(E_0-c_p\sum_{i,j,k}\tilde{T}'_{i,j,k}\right)-\sum_{i,j,k}(u^{*2}+v^{*2})_{i,j,k}\right.;$$

$$u^*_{i,j,k}=\tilde{u}_{i,j,k}+\frac{1}{4\alpha d}\delta_x\lambda_{i,j};$$

$$v^{*}_{i,j,k}=\tilde{v}_{i,j,k}+\frac{1}{4\,\alpha d}\delta_y\lambda_{i,j};$$

L、M、N各是沿 x、y 和 p 方向总的点数。

解方程(4.11)，可以得到三个根，取其中绝对值最小的实根，记为 $\lambda_1^{(1)}$。再把 $\lambda_{i,j}$、$\lambda_1^{(1)}$的值代入(4.7)—(4.9)式，即求得调整后的 $u_{i,j,k}$、$v_{i,j,k}$ 和 $T'_{i,j,k}$ 的值。

但是，必须注意，用上述方案求得的初值，并不严格适应模式。为了防止在时间积分的过程中，这种不适应有可能增大，还须不断进行如上的调整工作。比如，用预报值 $u^{(\tau)}$、$v^{(\tau)}$、$T'^{(\tau)}$等代替(4.7)—(4.10) 诸方程中的 $\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{T}'$求出 $\lambda_1^{(1)}$，从而，求出 u、v、T'等。以后，再用这些调整了的值分别代替 $u^{(\tau)}$、$v^{(\tau)}$、$T'^{(\tau)}$ 制作下一步的预报。如此，一步一步地调整、预报、调整，一直进行下去，直到得到所需要的预报为止。显然，在这个过程中，初值和方程之间的不协调，不断得到调整，不会无限制地发展下去，而大气的总能量总是准守恒或近似守恒的。这看来对制作短期预报，甚至中期预报也是有好处的。

当然，也可以不必每个时间步长都作如上的调整。为了节省工作量，可以每几步作一次，就好象一般进行平滑运算一样。但在现在的情况下，这和后者是有本质的差别的。比如，前者是根据一定的物理规律进行的，而后者则比较任意；前者可以近似保持某些物理量的守恒，而后者则不可能，甚至各个波段的波幅都或多或少地要衰减一些。至于几个步长作一次调整，则最好根据试验决定，因为这还和所用模式的性质、计算方法的精度、网格疏密和步长的大小有关。

为了说明问题，下面我们举一个例子。

根据 1978 年 6 月 8 日 20 时（北京时）100、300、500、700 和 900 毫巴五个等压面上风的资料，我们对各网格点上的整个空气柱的水平辐散进行了计算。求得其最大值为 4.4×10^{-5} 秒$^{-1}$（图略）。如只对风进行调整，调整后在网格点上整个空气柱的水平辐散的最大值仅 1.0×10^{-14}秒$^{-1}$。因为调整不牵涉天气过程，计算时用总动能守恒代替了总能量守恒。根据计算，调整前总动能$\left(\text{用}\sum_{i,j,k}\frac{1}{2}(u^2_{i,j,k}+v^2_{i,j,k})\text{ 表示}\right)$和调整后的均是 0.58×10^{10}c.g.s 单位，没有变化。图 1 和图 2 各是 u 和 v，当 $j=0$ 时沿 x 方向的分布。实线是调整前的值，虚线是调整后的值。易见，二者之差不大，一般不到 2 米/秒。其风速的均方根偏差如表 1 所示。

表 1

等压面（毫巴）		100	300	500	700	900
均方根偏差	u	1.33	1.31	1.32	1.32	1.32
（米/秒）	v	1.17	1.17	1.17	1.18	1.19

当然，只作这样的调整是不够的，还须象(4.7)—(4.10)式那样，把风场和温度场等一起考虑。这个试验只能说是初步的，是前述方案的一部分。

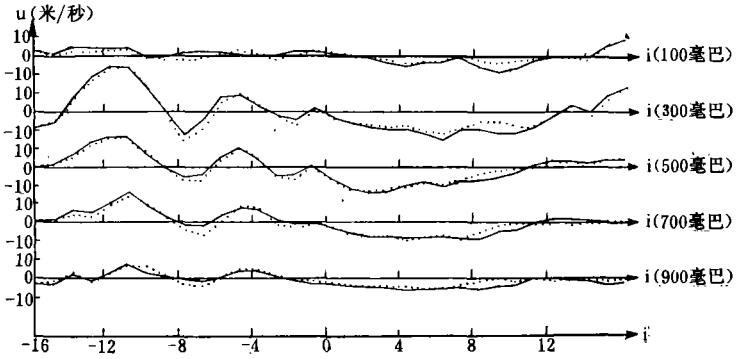


图 1 u 沿 $j=0$ 线的分布
(实线是调整前的值，虚线是调整后的值)

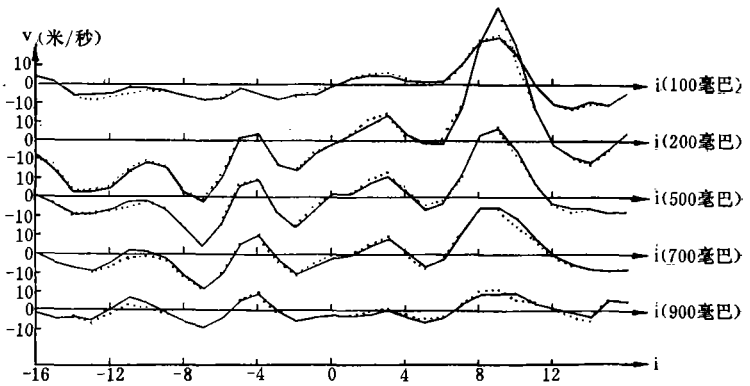


图 2 v 沿 $j=0$ 线的分布
(说明同图 1)

五、关于取某些参数的问题

上面的方法也可以用来调整某些参数。

在模式设计中，由于加热和摩擦的物理过程复杂，不少模式的设计者，把不同作者在不同情况下，不同地区得到的结果或数据引用到同一模式中，有些甚至是互相矛盾的（比如，定常的边界层理论和预报问题的提法就是）。如果没有适当的约束来协调它们，难免会引起加热和摩擦的总的持续的不平衡，使模式大气的环流发生大范围的虚假的异常，而这是和气候上，大气环流总处在准定常的状态不符的。这样，积分时间一长，这个问题就会显得突出，甚至预报有作不下去的可能。这不能不引起我们的注意。这也说明，对于非绝热不可逆的大气，还需要另外的约束。

考虑在这种情况下，虽然加热和摩擦一般都不为零，但对于大范围，如全球来说，南北半球的加热往往相反。季节、流场的变化也相反。加之大气环流的准定常性，看来，加热和摩擦对能量的总的贡献在比较长的时间内近于抵销。为此，我们不妨就令它们的总和为零，即

$$\sum_{i,j,k}\left(uF_x+vF_y+\frac{dQ}{dt}\right)_{i,j,k}=0 \tag{5.1}$$

这里 F_x、F_y 各是沿 x 和 y 方向的摩擦力；$\frac{dQ}{dt}$是加热率。以后，我们就把(5.1) 式作为预报问题的积分约束。

如果令

$$F_x=K_H\nabla^2u-g\frac{\partial\tau_x}{\partial p} \tag{5.2}$$

$$F_y=K_H\nabla^2v-g\frac{\partial\tau_y}{\partial p} \tag{5.3}$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ_1}{dt}+\frac{dQ_2}{dt} \tag{5.4}$$

而

$$(\tau_x)_s=\rho_sC_D|\vec{V}_s|u_s \tag{5.5}$$

$$(\tau_y)_s=\rho_sC_D|\vec{V}_s|v_s \tag{5.6}$$

$$\tau_x=\tau_y=0,\ \text{当}\ p\leqslant p_s-2\Delta p \tag{5.7}$$

$$\frac{dQ_1}{dt}=\begin{cases}-LM,\ \text{当}\ q\geqslant q_s & (5.8)\\ 0,\quad \text{当}\ q<q_s & (5.9)\end{cases}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=g\frac{\partial H}{\partial p}+K_H\nabla^2T \tag{5.10}$$

$$H_s=\rho_sC_Dc_p|\vec{V}_s|(T_0-T_s) \tag{5.11}$$

$$H=0,\quad \text{当}\ p\leqslant p_s-2\Delta p \tag{5.12}$$

则仍可用前面的方法来调整参数。这里 τ_x、τ_y 是粘性应力；C_D 是拖曳系数；$\vec{V}_s$、u_s、v_s 各是在地面观测高度的全风速和沿 x 和 y 方向的分速；p_s 是地面气压，取作常数；L 是凝结潜热；M 是凝结量；H是感热通量；K_H 是水平扩散系数；T_0 是地球表面的温度；T_s 是地面观测高度的温度；ρ_s 是地面空气的密度。令

$$\begin{aligned}J=&\sum_{i,j}a_0(C_D-\tilde{C}_D)^2+\sum_{i,j,k}a_1(K_H-\tilde{K}_H)^2+\lambda\Bigg\{\sum_{i,j}\frac{g\rho_s}{2\Delta p}\\&\cdot C_D\sqrt{u_s^2+v_s^2}\left[-(u_su_{s-\Delta p}+v_sv_{s-\Delta p})+c_p(T_0-T_s)\right]\\&+\sum_{i,j,k}\left[K_H(u\nabla^2u+v\nabla^2v+c_p\nabla^2T)-\delta LM\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.13}$$

其中 $u_{s-\Delta p}, v_{s-\Delta p}$ 是 $p=p_s-\Delta p$ 面上的 u 和 v；$\nabla^2(\ \ )=\frac{1}{d^2}[(\ \ )_{i+1,j,k}+(\ \ )_{i-1,j,k}+(\ \ )_{i,j+1,k}+(\ \ )_{i,j-1,k}-4(\ \ )_{i,j,k}]$；$\rho_s$ 取作 1.293×10^3 克/米^3；$C_D, \tilde{C}_D, u_s, v_s, T_0, T_s$都是 i, j 的函数；$K_H, \tilde{K}_H, u, v, T, M$ 都是 i, j, k 的函数；$(\tilde{\ })$表示初步估值；当 $q\geqslant q_s$ 时，$\delta=1$，当 $q<q_s$ 时，$\delta=0$，其中 q 是比湿，q_s 是饱和比湿。令 $\partial J/\partial C_D$，$\partial J/\partial K_H$，$\partial J/\partial\lambda=0$，则可以得到

$$C_D=\tilde{C}_D-\frac{g\lambda\sqrt{u_s^2+v_s^2}\rho_s}{4\,a_0\Delta p}[-(u_su_{s-\Delta p}+v_sv_{s-\Delta p})+c_p(T_0-T_s)] \tag{5.14}$$

$$K_H=\tilde{K}_H-\frac{\lambda}{2\,a_1}(u\nabla^2u+v\nabla^2v+c_p\nabla^2T) \tag{5.15}$$

$$\lambda=\frac{2}{B}\left\{\sum_{i,j}\frac{g\rho_s\sqrt{u_s^2+u_s^2}}{2\,\Delta p}[-(u_su_{s-\Delta p}+v_sv_{s-\Delta p})+c_p(T_0-T_s)]\tilde{C}_D\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j,k}(u\nabla^2u+v\nabla^2v+c_p\nabla^2T)\tilde{K}_H-\delta LM\right\} \tag{5.16}$$

其中

$$B=\sum_{i,j}\frac{g^2\rho_s^2(u_s^2+v_s^2)}{4\,a_0(\Delta p)^2}[-(u_su_{s-\Delta p}+v_sv_{s-\Delta p})+c_p(T_0-T_s)]^2$$
$$+\sum_{i,j,k}\frac{1}{a_1}(u\nabla^2u+v\nabla^2v+c_p\nabla^2T)^2$$

把求得的 λ 代入(5.14)式和(5.15)式，即可求得调整后的 C_D 和 K_H。容易看出，参数 C_D 和 K_H 随流场、温度场的不同而不同，因而，它们也是可以随时间、空间而变的。

这种调整参数的方法还可以和前面的方法结合起来使用。比如，在整层无辐散的情况，可以先用前面的方法调整风和温度；以后再用上面调整参数的方法。这样，就可能避免或减少一些人为的误差。当然，这两种方法还可以合併为一，使风、温度和 K_H、C_D 等的调整一次完成，但那样会使方案复杂化，使计算量大为增加，虽然在理论上更优越一些。不过，最后的结论仍有待于实践。

参 考 文 献

[1] 哈廷纳，G. J.，数值天气预报，294—295，科学出版社，1975。
[2] 廖洞贤，美国国家气象中心的数值预报业务，气象科技资料，1977 年第 5 期。
[3] 陈雄山等，初始方程三层模式，数值预报和数理统计预报会议文集，科学出版社，1974。
[4] Sasaki,Y. K., Variational design of finite difference schemes for initial-value problems with an integral invariant, Simulation of Largescale Atmospheric Processes, Annalen der Meteorologie (Neue Folge) Nr. 11, 194—197, 1976.
[5] 廖洞贤，论半球预报的水平侧边界条件，第二次全国数值预报会议文集(即将出版)，科学出版社，1977。

SOME PROBLEMS CONCERNING INITIALIZATION AND CHOICE OF PARAMETERS IN NUMERICAL WEATHER PREDICTION

Liao Dong-xian (Liao Tung-hsien) and Wang Chao

(Research Institue of Weather and Climate, Central Meteorological Service)

Abstract

In this paper, the causes of the inconsistencies between the initial data and the prognostic model, are discussed. One of the preliminary conclusions reached is that the inconsistencies are in many cases, primarily caused by the disagreement between the assumptions (or the treatments) made in the model and the observations taken as initial values. A scheme for initialization, constrained to total energy conservation and non-divergence of the whole air column, is proposed. Finally, a scheme for choice of certain parameters, subject to the global integral constrain

$$\int_E \int_0^{P_s} \left(uF_x + vF_y + \frac{dQ}{dt} \right) dA dp = 0$$

is suggested.