第37卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 37, No. 2
1979 年 9 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Sept., 1979

斜压球面螺旋行星波和角动量输送*

季 劲 钧**

（中国科学院地理研究所）

提 要

本文分析了斜压大气中球面螺旋行星波的三维结构，讨论了这类行星波对大气运动角动量的输送过程。结果表明：在基本流场中存在着水平和垂直切变的急流区，在水平方向它使西风角动量向急流中心辐合；在垂直方向上，西风急流区角动量下传，以补偿地面摩擦；在低纬和极地，东风带角动量向上传递。

在绕极行星风带中，一个显著特点是存在着倾斜的波状扰动，很早就有人指出这种“斜槽”对行星风带中角动量输送的作用。巢纪平、叶笃正(1977)[1]首次阐明了这种南北倾斜的波状扰动，是气流绕极点运动的 β 效应和由较差转动而产生的螺旋行星波，并以正压模式分析了这种波动的动力学性质。

我们知道这类倾斜的波状扰动，特别在中、高纬度它常常是和急流、锋区联系在一起的。在低纬度，上、下层也有显著的差异，这就是说它们存在着复杂的垂直结构。同时，随着这类波动的发展和变化，将伴随着角动量和能量的输送和转换，这些都有待进一步的分析讨论。

需要提出的是，这类波动不仅出现在瞬时的天气图上，而且在月平均、多年月平均的等压面图上都能看到。所以它不仅是具有天气意义，而且也具有气候意义的一类波动。

下面，我们将正压模式的方法直接推广到斜压大气中去，着重讨论这类波状扰动的三维结构和在大气环流中对角动量平衡所起的作用。

一、球面螺旋行星波的控制方程

绝热、无粘性的行星尺度大气运动，在静力学、准不可压缩、准无辐散等近似下有如下准地转斜压大气的无量纲位势涡度方程[2,3]：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\left[\nabla^2\psi+\frac{1}{R_0}\sin\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\rho_s\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=0 \tag{1}$$

式中 $\mathbf{V}$ 是无辐散风速，ψ 是水平地转流函数，并有

$$w=-\sin\varphi\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] \tag{2}$$

$$\zeta=\mathbf{k}\cdot\nabla\times\mathbf{V}=\nabla^2\psi \tag{3}$$

* 本文于1979年1月11日收到。

** 现在大气物理研究所工作。

$F_r=(R_0^2R_i)^{-1}$ 是转动内 Froude 数，式中 R_0，R_i 分别是 Rossby 数和 Richardson 数，方程中的变量皆是无量纲数。其他符号如通常所用(下同)。

把流函数 ψ 分为两部分，即基本流函数 $\overline{\psi}$ 和扰动流函数 ψ'

$$\psi=\overline{\psi}+\psi',\qquad \psi'\ll\overline{\psi} \tag{4}$$

并有

$$\mathbf{V}=\overline{\mathbf{U}}+\mathbf{V}' \tag{5}$$

$$\mathbf{U}=-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\varphi}=\cos\varphi\omega(\varphi,z) \tag{6}$$

$$\mathbf{V}'=\mathbf{k}\times\nabla\psi' \tag{7}$$

其中 ω 是基本气流转动角速度，代入(1)式得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\mathbf{U}}\cdot\nabla\right)\left[\nabla^2\psi'+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\cdot\rho_s\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right]+\mathbf{V}'\cdot\nabla\left[\nabla^2\overline{\psi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\cdot\rho_s\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)+\frac{1}{R_0}\sin\varphi\right]=0 \tag{8}$$

将上式在(λ,φ,z)球坐标中展开，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial\lambda^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\rho_s\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{-1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\overline{U})+\frac{\sin^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\rho_s\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}\right)+\frac{1}{R_0}\sin\varphi\right]=0 \tag{9}$$

作变量替换，令

$$\xi=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{10}$$

并记

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial\lambda} \tag{11}$$

代入(9)，就得到了球面行星波的控制方程：

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\cdot\rho_s\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial\zeta_a}{\partial\xi}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(F_r\cdot\rho_s\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\right]=0 \tag{12}$$

其中，绝对涡度的纬向变化是：

$$\frac{\partial\zeta_a}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\cos^2\varphi\omega)\right]-\frac{\cos^2\varphi}{R_0} \tag{13}$$

当层结很强时，$F_r\ll1$，(12)式简化为：

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}\right)-\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\zeta_a}{\partial\xi}=0 \tag{14}$$

这是正压大气球面螺旋行星波方程。可见强层结时，即使基本气流存在着垂直切变，但对波的结构没有影响。所以，下面我们只讨论一般层结的情况，即：

$$F_r\sim0(1).$$

二、球面行星波的三维结构

控制方程(12)是变系数的偏微分方程，不能简单地表示成沿三个坐标轴的简谐运动。有关这个方程，最近已作了较详细的分析。[4] 但是，现在我们把讨论暂时限定于系数是时间和空间的缓变函数，这只要风的切变不是很强。可以这样假定，我们认为扰动是局地的简谐波动，于是有

$$\psi' \sim e^{i(l\lambda+m\xi+nz-\sigma t)} \tag{15}$$

l, m, n 分别为 λ, ξ, z 方向上的波数，σ 是频率，它们都是坐标和时间的一阶缓变函数。

就某一个纬度带而言，$L/a \sim 0(R_0) \ll 1$，a是地球半径，则可近似地认为：

$$g^2(\xi)=\cos^2\varphi\sin^2\varphi=\cos^2\varphi_0\sin^2\varphi_0=\text{常数}$$

并假定 $F_r=$常数，则(12)式可改写为

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2}+g^2F_r\frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right]+\frac{D}{Dt}\left(g^2F_r\eta\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)-$$
$$-\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial\zeta_a}{\partial\xi}+g^2F_r\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+g^2F_r\cdot\eta\frac{\partial\omega}{\partial z}\right]=0 \tag{16}$$

其中 $\eta=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}=-\frac{D}{H_s}$，$D$ 是运动的垂直尺度，H_s 是标准大气高度。因 g^2F_r 是常数，令

$$z=z_1gF_r^{1/2}$$

代入(16)式，就得到：

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial z_1^2}\right]+\frac{D}{Dt}\left(\eta gF_r^{1/2}\frac{\partial\psi'}{\partial z_1}\right)-$$
$$-\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial\zeta_a}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z_1^2}+gF_r^{1/2}\eta\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right]=0 \tag{17}$$

我们有兴趣的是波在行进中的性态，所以可以作为无界空间中的周期解来看待，这只要运动远离地面就行。于是把(15)式写成：

$$\psi'=R_eGe^{i(l\lambda+m\xi+n_1z_1-\sigma t)}\equiv R_eGe^{is} \tag{18}$$

式中：

$$\sigma=-\frac{\partial s}{\partial t},\quad l=\frac{\partial s}{\partial\lambda}=\text{常数},\quad m=\frac{\partial s}{\partial\xi},\quad n_1=\frac{\partial s}{\partial z_1} \tag{19}$$

缓变函数用小参数 ε 量度

$$\varepsilon=\frac{\omega}{\Omega} \tag{20}$$

式中：ω 为基本气流角速度，Ω 为地球自转角速度

$\varepsilon \ll 1$，且：

$$T=\varepsilon t,\ \theta=\varepsilon\xi,\ Z=\varepsilon z_1 \tag{21}$$

G, m, n_1, σ 都是 T, θ, Z 的函数。(18)式是运动方程的波动解，s 为常数即等位相面。对某一时刻 t_0 有

$$l\lambda+m\xi+n_1z_1=C(t_0) \tag{22}$$

在(λ, ξ)面上，$z_1=z_{10}$，则

$$\lambda=-\frac{m}{l}\xi+C_1(t_0, z_{10})$$

或

$$\lambda=-\frac{m}{l}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1(t_0, z_{10}) \tag{23}$$

这是一簇球面上的螺旋线，在某一固定高度的球面上，等位相线即通常天气图上的槽脊线。当 $l>0$，$m>0$ 时，槽脊线走向是西北一东南向，即导式波；当 $l>0$，$m<0$ 时，槽脊线走向是东北一西南向，即曳式波。一般说来，当波长较长，l 比较小，m 变化不大时，槽脊线倾斜度大；短波 l 较大，倾斜度较小。而当 m 较小(如平流层，风系比较单一)，槽脊倾斜度小。相反在对流层中、下层，风向水平切变很大时，则槽脊倾斜度较大。

在(ξ, z)平面上，即 $\lambda=\lambda_0$ 的子午面上

$$m\xi+n_1z_1=C_2(t_0, \lambda_0)$$

或

$$z=-\frac{m}{n_1}\cos\varphi_0\sin\varphi_0F_r^{1/2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_2'(t_0, \lambda_0) \tag{24}$$

这也是一簇螺旋线。以导式波为例($n_1>0$，$m<0$)，由下向上等位相线向高纬倾斜。层结越不稳定(F_r 越大)，倾斜越大，这和锋面的结构是很相似的。

在(λ, z)面上，$\varphi=\varphi_0(\xi=\xi_0)$即纬圈平面

$$l\lambda+n_1z_1=C_3(t_0, \varphi_0)$$

或

$$z=-\frac{l}{n_1}\lambda\cos\varphi_0\sin\varphi_0F_r^{1/2}+C_3'(t_0, \varphi_0) \tag{25}$$

这是纬圈平面上的一簇直线，在空间里它是圆锥面上的螺旋线。当 $l>0$，$n_1>0$，槽脊线向上、向西倾斜，斜压大气中行星波就是这种结构。槽脊线倾斜的程度，将随着层结稳定度的减小而增大。

三、螺旋行星波对角动量的输送

绕极气流的绝对角动量 M^*是

$$M^*=\Omega r^{*2}\cos^2\varphi+r^*\cos\varphi\cdot u^* \tag{26}$$

由运动方程，

$$\frac{dM^*}{dt^*}=-\frac{1}{\rho_s}\cdot\frac{\partial p^*}{\partial\lambda}+a\cos\varphi\cdot F_\lambda \tag{27}$$

$a\cos\varphi\cdot F_\lambda$ 是摩擦力矩，带"*"的是有量纲变量(下同)。此后，我们都用 a 近似代替 r^*。将纬向气流分解为基本气流和扰动部分[见(8)式]，M^*可写成

$$M^*=a\cos\varphi(a\cos\varphi\Omega+\bar{U}^*+u'^*) \tag{28}$$

把(28)式代入(27)式，得

$$a\cos\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial t^*}+\frac{\partial u'^*}{\partial t^*}\right)+a\Omega\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\lambda}(\bar{u}^*+u'^*)+\frac{\partial\bar{u}^{*2}}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar{u}u'}{\partial\lambda}+\frac{\partial u'^{*2}}{\partial\lambda}+$$

$$+a\Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}(v'\cos^2\varphi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\bar{u}^*\cdot v'^*)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\cdot u'\cdot v')+$$

$$+a^2\cos^2\varphi\frac{\partial\omega'^*}{\partial z}+a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}'^*w'^*)+a\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z}u'^*w'^*=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p^*}{\partial\lambda}\qquad(29)$$

若 u'^*, v'^*, w'^* 是迭加在基本纬向气流上的波状扰动，对(29)式取一个纬向波长上的平均，并记作"$\overline{\ }^{\lambda}$"，

$$a\cos\varphi\left(\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial t^*}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial t^*}}^{\lambda}\right)+a\Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{(v'^*\cos^2\varphi)}^{\lambda}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{(\cos\varphi\bar{u}^*v'^*)}^{\lambda}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{(\cos\varphi u'^*v'^*)}^{\lambda}+a^2\cos^2\varphi\overline{\frac{\partial w'^*}{\partial z^*}}^{\lambda}+a\cos\varphi\overline{\frac{\partial}{\partial z^*}(\bar{u}^*w'^*)}^{\lambda}+a\cos\varphi\overline{\frac{\partial}{\partial z^*}(u'^*w'^*)}^{\lambda}=0\qquad(30)$$

将上式写成无量纲形式

$$\cos\varphi\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial t}+\overline{\frac{\partial u'}{\partial t}}^{\lambda}\right)+\frac{1}{R_0}\overline{\frac{\partial}{\partial\varphi}(v'\cos^2\varphi)}^{\lambda}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{(\cos\varphi\bar{u}\cdot v')}^{\lambda}+\overline{\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi u'v')}^{\lambda}+$$

$$+F_r\cos^2\varphi\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}^{\lambda}+R_0F_r\overline{\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\cdot w')}^{\lambda}\cos\varphi+\cos\varphi\overline{\frac{\partial}{\partial z}(u'\cdot w')}^{\lambda}\cdot R_0F_r=0.\qquad(31)$$

对于球面螺旋行星波，可以将(18)式写成下列形式

$$\psi'=G_0\sin(l\lambda+m\xi+n_1z_1-\sigma t)\equiv G_0\sin S\qquad(32)$$

由(2)，(7)算出 u', v', w'

$$u'=-\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}=-\frac{\varepsilon}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta}$$

$$=-\frac{m\cos S}{\cos\varphi}G_0-\frac{\varepsilon}{\cos\varphi}\left[\frac{\partial G_0}{\partial\theta}\sin S+G_0\cos S\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\xi-\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}t\right)\right]\qquad(33)$$

$$v'=\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}=\frac{lG_0}{\cos\varphi}\cos S\qquad(34)$$

$$w'=-\sin\varphi\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right]$$

$$=-\sin\varphi\left[\varepsilon\left(\omega\frac{\partial G_0}{\partial Z}l-\frac{\partial G_0}{\partial Z}\sigma+\frac{\partial G_0}{\partial T}n_1\right)\cos S+\right.$$

$$\left.+G_0\sin S\sigma\cdot n_1-\omega ln_1G_0\sin S-l\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial z}G_0\cos S\right]\qquad(35)$$

文献[5]中指出：Starr 等人曾用实测风计算了大气中角动量的输送，指出起主要作用的是涡动输送。而这种涡动输送是可以由基本风带中的"斜槽"来完成的。现在，我们知道所谓"斜槽"就是螺旋行星波。下面就来估算一下螺旋行星波的角动量的涡动输送。由(33)，(34)式，略去高阶小项，得

$$\overline{u'v'}^{\lambda}=-\frac{mlG_0^2}{2\cos^2\varphi}\qquad(36)$$

可见这种输送是存在的，而对称的正弦波却不能完成。输送的大小与扰动的振幅和纬度有关，输送的方向取决于螺旋波的形式(导式或曳式)。

例如，我们考察西风急流区，天气事实表明，急流之南常为曳式波，扰动向东南方

向移行。此时

$$m<0,\ l>0,\ \overline{u'v'}^{\lambda}>0$$

角动量向北输送。在急流之北常为导式波，扰动向东北方向移动。此时

$$m>0,\ l>0,\ \overline{u'v'}^{\lambda}<0$$

角动量向南输送。

将(33)—(35)式代入(31)式，就得到螺旋形行星波情况下的角动量平衡方程：

$$\cos\varphi\frac{\partial\bar{U}}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\varphi\,\overline{u'v'}^{\lambda}\right)+R_0F_r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial Z}\left(\overline{u'w'}^{\lambda}\right)=0 \tag{37}$$

因 $R_0\sim0(10^{-1})$，$F_r\sim0(1)$，所以最后一项垂直方向上的角动量辐合要比水平辐合(第二项)小一个量级。但是，在较长的时间尺度上，在大气环流的角动量平衡过程中还是不可忽视的。

首先，讨论角动量的水平辐合。在一个跨越急流的纬度带上积分(37)式第二项，利用(36)式得

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\varphi\,\overline{u'v'}^{\lambda}\right)d\theta=-\frac{l}{2\cos\varphi}\left(m_2G_{02}^2-m_1G_{01}^2\right) \tag{38}$$

在急流中心附近，$G_{01}^2\sim G_{02}^2$，上式近似等于

$$\frac{-lG_0^2}{2\cos\varphi}(m_2-m_1)$$

前面已经提到，从南向北越过急流，m 由负变正，所以 $m_2>m_1$，因而(38)式的积分小于零。由(37)式可知，这使该纬度带内基本气流增强。

同样可以讨论垂直方向上的角动量输送。由(33)，(35)式得

$$\overline{u'w'}^{\lambda}=-\frac{1}{2}ml\sin\varphi\,G_0^2\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

显然，垂直方向上的输送与风的垂直切变有关。在中、高纬度西风带中，$\frac{\partial\omega}{\partial z}>0$

急流之南：　　$m<0,\ l>0,\ \overline{u'w'}^{\lambda}>0$

急流之北：　　$m>0,\ l>0,\ \overline{u'w'}^{\lambda}<0$

在低纬东风带中常为导式波，$m>0, l<0$，扰动一般是向西传播的。风的垂直切变为负，$\frac{\partial\omega}{\partial z}<0$，所以有

$$\overline{u'w'}^{\lambda}>0$$

在极地，低层东风向上增加，$\frac{\partial\omega}{\partial z}<0$，而 $m>0, l>0$，于是有

$$\overline{u'w'}^{\lambda}>0$$

由此可见，在中、高纬度西风带中，急流南侧角动量向上传，急流北侧角动量向下传。在低纬和极地东风带中，角动量是向上传送的。这些结果是和观测事实一致的。

四、结 语

以上我们分析了斜压大气球面螺旋行星波的三维结构，它与中、高纬度大尺度天气系统的结构很相似。在对流层西风带中常见的曳式波，在低层锋面插向低纬，高层槽脊线向西倾斜。这些与理论分析是一致的。

在低纬和极地东风带中，螺旋形行星波将把从地球得到的角动量送到对流层中，同时又进一步通过螺旋行星波向西风带中输送，并在急流中心汇合，加强基本西风。另一方面，在急流以北，又由导式行星波把角动量向下输送到对流层底部，以补偿地面摩擦的消耗。

致谢：本文是在巢纪平教授指导下完成的，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 巢纪平、叶笃正，大气科学，1977年，第2期，81—88.
[2] Charney, J. G., Stern, M. E., *J. Atmos. Sci.*, 19(1962), № 2, 159—172.
[3] Kuo, H. L., Dynamics of Quasigeostrophic Flows and Instability Theory "Advance in Applied Mechanics" Edi Chia Shun Yih Academic Press, New York, 1973.
[4] 刘式适、杨大升，地球大气行星波的螺旋结构，气象学报，37(1979)，14—27.
[5] 叶笃正、朱抱真，大气环流若干基本问题，科学出版社，1958年.