第37卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 37, No. 2
1979 年 9 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Sept., 1979

统计-动力预报评述*

曹 鸿 兴

(中央气象局气象科学研究院)

1. 简要的回顾和评论

现代统计-动力预报，如果从1957年Sellers首次组成正压模式的统计-动力方案算起，已经历了20年的历史。至今，富有成效且投入业务使用的是，数值预报成品用于局地天气预告的统计法，即1959年由Klein提出的"完全的预报方法"和1970年由Glahn等提出的模式输出统计(MOS，以下简称模输)。目前，模输已能作降水、温度、云量、云高、能见度、风、雷暴、强风暴等多种要素和天气的预报，且有较好的预报效果，成为自动预报系统的一个重要环节。这是20年来，在统计-动力预报中有成效的一个方面。这种方法把数值预报资料加以统计，实际上是一种分两步走的办法，我们把这类方法称为统计-动力的外结合。另一条途径是从改造动力方程着手，或在动力方程中引进随机项、统计系数，或者按某种准则导出新的统计-动力方程，把这类方法称为统计-动力的内结合。内结合的方案不少，但理论上尚不成熟，在实际效果上也并没有比单用动力学方法或统计学方法有多少提高。在这一途径中值得注意的是，1969年Epstein[1]从初值的不确定性出发，提出了随机-动力(Stochastic dynamic)预报，在经过数年的理论探讨后，Pitcher[2]将其用于实际资料，为随机-动力预报的业务应用迈开了一步。

总之，20年来，统计-动力预报取得了进展。然而不是突飞猛进，虽提出了不同的方案和方法，但理论上尚处在探索之中。如果我们认为，大气运动既有决定型的一面，又有随机型的一面，那末统计-动力结合是一种理所当然的研究途径。可以预期，在20世纪未来的年代里，统计-动力预报的研究将成为一个活跃的富有生气的领域。但由于统计-动力结合问题的复杂性，理论上解决的困难性以及需要极其大的计算量等原因，能否取得突破性的进展尚难预测。

2. 统计-动力结合的着眼点

由于人们欲使统计和动力结合的着眼点的不一样，因此结合的方法是很不相同的。兹将其分述于下：

1) 用统计学方法预报动力学方法暂不能预报或预报效果很差的项目，这是模输的做法。如数值预报把高空形势和某些物理量报出来了，在这种形势下会有怎样的天气和要素值出现呢？这可以通过用迴归等统计预报方程使两者联系起来，使预报结果满足用

---

* 本文于1978年8月30日收到.

户的需要。现在，把数值预报成品变为用户要求的项目的这一过程称为“释用”(interpretation)。

2) 把大气运动视为在太阳辐射、地球自转等条件下的确定性运动中迭加有随机性运动，提出了随机-动力预报的概念。1957年Thompson探讨了初始场中存在的不确定性对大尺度环流预报的影响问题，引起了人们对初值化的研究。1965年Freiberger和Grenander[3]将线性扰动方程变换为关于物理量的一阶矩和二阶矩的演变方程，随后Epstein运用他们的思想，明确导出了随机-动力方程，把初始场视为随机的，而大气运动的演变仍遵守动力学方程。Glesson[4]从概率守恒出发，导出了概率密度ϕ的连续方程[5]：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial(\dot{x}_i\phi)}{\partial x_i}=0 \tag{2.1}$$

它类似于质量连续方程。式中：x_i是状态向量的第i个分量，$\dot{x}_i$是相点的第i个速度分量。

如果把大气运动的热力-动力方程组再加上(2.1)，就构成了统计-动力方程组。但由于(2.1)是变系数的线性方程，除最简单情况外无分析解。在相空间点上的数值解的计算量，即使在$N\sim10$的情况下也是极其大的，有人声称(2.1)的数值解超过了现有的计算机能力。因此，绕开(2.1)方程就引出了Epstein的随机-动力预报。

3) 按某一准则统计地订正动力预报误差。

一种直观的准则是使预报均方误差最小，即令

$$\delta E(Z-X)(Z-X)^T=\mathbf{0}$$

式中：X为动力模式的计算结果，Z为实测值，X,Z均为列向量，T表示转置，E表示估计，δ为变分算子。逐步校正的卡尔曼滤波模式，就是用此准则导出的。由于大气动力方程是一个场方程，当将其写在网格点上时，就会遇到所谓“维度灾难”。

除均方误差最小准则外，还可定义出现概率最小的准则，即

$$\delta_p(|Z-X|>\varepsilon)=\mathbf{0}$$

式中：$\varepsilon>0$，意即使大于某一界值的误差，出现的概率最小。

在郑庆林、杜行远的“多时刻预报模式”[6]中提出了，“一个好的动力系统的必要条件是它的输出信息与干扰无关”的准则。此准则的一般统计表达式如下：

随机列向量X,ε；X为输出，ε为干扰，X与ε不相关，即其协方差矩阵为零矩阵

$$\mathrm{COV}(X,\varepsilon)=E(X-EX)(\varepsilon-E\varepsilon)^T=\mathbf{0} \tag{2.2}$$

显然，对一个实际动力系统来说是满足不了(2.2)式的，但可以使

$$\delta E(X-EX)(\varepsilon-E\varepsilon)^T=\mathbf{0} \tag{2.3}$$

即使动力系统的信息与干扰尽可能不相关。注意，(2.2)、(2.3)中的$\mathbf{0}$均表示零矩阵。

若假定：

① X与ε的维数相等，$m=n$，即有一个输出(物理)分量，对应有一个能从实测资料计算出来的误差；

② X 与 ε 间成立 $x_i\varepsilon_j=\begin{cases} x_i\varepsilon_j & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j \end{cases}$，即一个输出分量仅仅与相应的误差有关。

考虑到

$$Et_r(X\varepsilon)^T=E(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_m\varepsilon_m)=EX^T\varepsilon$$

若令　　$\delta X^T\varepsilon=0$

此即文献[6]中的(3)式，显然是(2.3)式在条件①，②和假定 $EX=0$ 或 $E\varepsilon=0$ 时的特例。

象在最优控制论、微分对策等学科中所做的那样，如果引进一个关于变量的评价函数，在使评价函数取极值的条件下，导出统计-动力预报方程是有希望的途径。

4) 为使统计预报方程中所含的因子有明显的物理意义，在方程中引入动力因子。即把原始观测资料通过计算加工变为动力因子，如涡度、垂直速度、空气质点轨迹等等。但从看到的一些文献来看，并无实质性改进。尤金的"物理统计法"也可归入此类，从分析影响预报对象的物理原因来寻找因子。我国无锡站用此法作秋季逐日低温的预报，误差比模式输出统计的还小，可见本法还有潜力可挖。

5) 动力方程中省略的项(或因子)用统计项来替代，动力方程中的系数统计地求取。

上海台风协作组把影响台风的外力均视为随机过程加以统计处理，即在

$$\frac{dU}{dt}-f_0V=F_1,\quad \frac{dV}{dt}+f_0U=F_2$$

中，令　　$F_i=a_{1i}+2a_{2i}t+3a_{3i}t^2 \quad (i=1,2)$

式中t为时间，$a_{1i},a_{2i},a_{3i}(i=1,2)$为系数，通过迴归与初始场因子相联系。

Faller 等[7]用在动力方程中增加一些项的办法来试验统计订正效果，其格式为：

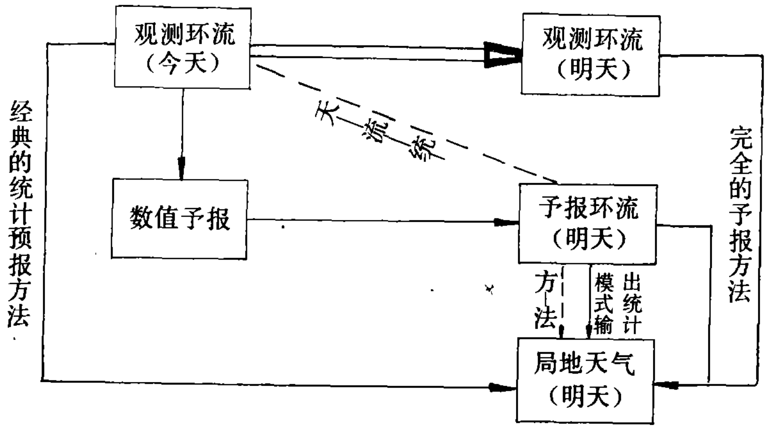
$$u_t+uu_x=\nu u_{xx}-ku+S(x,t,u)$$

$u=\dfrac{dx}{dt}$，ν 粘性系数，k 耗消常数，S 克服动能损耗的源函数。上式中靠右两项为加进去的统计订正项，除这两项外的其余项即构成一维的 Burger 方程。

丑纪范等提出，在长期数值预报模式中的物理参数如热传导系数、拖曳系数等，可以用实际资料来反求，并使它们在不同的月份和不同的地点取不同的值。这一方法，将比主观选定这些系数的常数好。

3．数值预报成品的统计释用

大尺度(broad-scale)数值预报已能较好地报出 1—3 天的环流形势，但对许多用户来说需要局地天气和要素的预告。这就发生了如何把数值预报成品用于局地天气预告的问题。一种是动力学方法，建立所谓应答(response)模式。即在已报出的环流背景下，对可能出现的天气，再用考虑了更多物理量和细网格的模式预报。但这类模式计算很费时间，有的甚至计算耗时比天气演变历时更长，失去了业务应用价值。另一种是统计学方法，即数值预报成品的统计释用。为直观起见，我们用下图来说明。



经典的统计预报方法，一种隔时性统计，使预报量与预报因子间有一时间滞后，目前为国内外普遍使用。国外最近研究表明，使用一个比较好的统计预报模式所做的 3 天预报准确率，已能追得上 6 层初始方程模式。而且，时效在 3 天以上时，其效果更能超过后者[8]。将 500 毫巴场用球谐函数展开后，用其展开系数的筛选迴归来作预报，其效果也可与正压模式相匹敌[9]。这说明，本法仍不失为一个有价值的方法。

完全的预报方法和模式输出统计方法都属于同时性的。前者，建立观测环流与局地天气的关系，使用时代之以数值预报环流，这样其预报效果必然十分依赖于数值预报的好坏。模输则用数值预报环流的历史资料，与局地天气的观测资料建立统计关系。它的优点是，数值模式的偏差和不精确性，如同局地气候一样，被自行构造在预报体系中，且能包含许多其他方法不易获取的因子，如垂直速度、边界层风和温度，三维空气轨迹等等。

苏联在中期预报中，使用了天气学-流体力学-统计学三者结合的方法，其概括性表达式为：

$$Q_{kt}=\bar{Q}_k+\sum_{h_1=1}^{H_1}a_{h_1k}T_{h_1}(H)_t+\sum_{h_2=1}^{H_2}a_{h_2k}T_{h_2}(H)_i+\sum_{h_3=1}^{H_3}a_{h_3k}T_{h_3}(Q)_i$$

Q_{kt} 为 k 点上某要素在时刻 t 的预报值，$\bar{Q}_k$ 为 k 点要素 Q 的样本平均值，$T_{h_1}(H)_t$ 为 t 时刻数值预报流场自然正交展开的第 h_1 项的时间项系数（共取了H_1 项），a_{h_1k} 为 Q_{kt} 与 T_{h_1} 的关联系数。第三、第四项符号的意义类同，第三项表示初始日或前期某日的其他要素场与 Q_{kt} 的依赖关系，第四项表示 Q_{kt} 对初始日本要素场的依赖关系。这样，既用了数值预报结果的信息，又用了初始场或过去时刻资料的信息。

实践表明，无论在模输中，或者在“天-流-统”中，初始场因子随着预报时效的延长而愈来愈不重要，说明隔时性统计在三天以上的预报中效能变低。

模输就方法论而言，并无多少吸引之处，所用的统计方法也很一般，如称为因子增加法的筛选迴归、事件概率迴归、两类线性判别和多类事件概率的非线性估计等。而那些看来在数学上较为严谨的统计-动力方法并没有改进多少预报效果， 这种情况是很 发

人深思的。

模输的两个缺点，一是不能报出尚未出现过的极值情况，预报偏向平均值，这是统计学方法的通病；另一个是数值模式一旦发生变动，就有中断预报的可能。这是因为按照国外模输的做法，把数年同一个季或同一个月的资料放在一起加以统计，要求样本数在数百个以上，就必然要求某数值模式积累几年资料后才能作模输。为了改进这一缺点，作者等[10]提出了适时更新资料的模输法。这一方法的观点，是认为大气最新一段时间内的统计规律对未来天气的预报最有价值，因此采取样本吐故纳新的办法，只用预报时刻前期数个月(如 3—4 个月)的样本资料，通过对资料的预先处理消除季节性差异，这样建立迴归系数、预报因子适时变化的统计预报方程。经初步研究，这一方法是可用的。这样，数值模式只要积累数个月就可运用模输报天气，模输法的第二个缺点在一定程度上得到克服。

4. 随机-动力预报

设表征大气的状态向量 X，其分量以 $x_i(i=1,2,\cdots N)$表示，一个强迫耗散系统的动力方程组可写为：

$$\dot{x}_i=\sum_j\sum_k a_{ijk}x_jx_k-\sum_j b_{ij}x_j+c_i \qquad i=1,2,\cdots N \tag{4.1}$$

其中：a_{ijk}, b_{ij}, c_i 为独立于 x_i 的系数，表示时间导数。

对(4.1)运用数学期望算子，经推演后得：

$$\dot{\mu}_i=\sum_j\sum_k a_{ijk}(\mu_j\mu_k+\sigma_{jk})-\sum_j b_{ij}\mu_j+c_i \tag{4.2}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=\sum_k\sum_l[a_{ikl}\ (\mu_k\sigma_{jl}+\mu_l\sigma_{jk}+\tau_{jkl})+a_{jkl}(\mu_k\sigma_{il}+ +\mu_l\sigma_{ik}+\tau_{ikl})]-\sum_k(b_{ik}\sigma_{jk}+b_{jk}\sigma_{ik}) \tag{4.3}$$

其中：μ 是均值，σ 是（协）方差，τ 是以均值为中心的三次矩。

(4.2)和(4.3)构成了随机-动力预报的基本方程，它是关于相空间中系综的期望和方差的演变方程。

由(4.2)知，制约一阶矩的方程中包含二阶矩，二阶矩的方程(4.3)中包含三阶矩，也即方程系统是不闭合的，这是当确定型方程为非线性时必然出现的结果。若假定均值和方差给定，当 t_0 时 $\tau_{ijk}=0$，但当 $t>t_0$ 时 τ_{ijk} 并不保持为 0，又在 τ_{ijk} 的表达式中会引进四阶矩，这样要解(4.2)和(4.3)就要引进闭合近似。一些研究指出，在小于 10 天的中、短期预报中，三阶矩可以忽略不计。

(4.2)的含意是，用均值作为系综真实状态的最好估计，而(4.1)则用来描述系综每个成员的演变。如令(4.2)中的 $\sigma_{jk}=0$，(4.2)就退化为(4.1)，因此确定型动力学方程可视为随机型动力方程的特例。

(4.3)的含意是，用 σ_{ij} 作为系综范围和形状的度量，它描述系综形态随时间的变化。用 σ_{ij} 来描述系综的不确定性以及关于不确定性的预报，是随机-动力预报对预报问题作出的最有意义的贡献。

下面叙述，随机-动力方法对实际问题的应用。

相当正压涡度方程为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta-\frac{\gamma^2}{a^2}\psi\right)=-\mathbf{V}\cdot\nabla(\zeta+f+ch) \tag{4.4}$$

其中：$\zeta=\nabla^2\psi$, ψ 是流函数，h 是平滑地形高度，$c=2.4\times10^{-9}$ 米$^{-1}$ 秒$^{-1}$ 反映地形垂直速度对 500 毫巴涡度倾向的作用，$\gamma=5.6$ 防止长波后退的经验参数，a 地球半径，其余符号为气象中常用的。

用球谐函数将(4.4)展为谱形式，得：

$$\dot{\psi}_n^m=D_n\left[\sum_{p,q,r,s}\psi_q^p\ (c_s\psi_s^r+ch_s^r)\ L_{qns}^{pmr}+2\,\omega m\psi_n^m\right] \tag{4.5}$$

D_n, c_s 均为常数，L_{qns}^{kmr} 为关于规一化勒让德函数的积分。

(4.5)类似于(4.1)，因此，同理可导出类似于(4.2)，(4.3)的方程。这样就可用来作预报，这时将给出两张图，一张是均值演变图，相当于确定型预报的高度场的演变图；另一张是标准差演变图，可以看到不确定性随时间变化的情况。Pitcher[2]给出了1969 年 12 月 1 日作 24 小时预报的 500 毫巴图，一些主要形势变化都能报出。

与随机-动力预报相配合的是随机-动力分析，这是一种基于对初始场作概率解释的客观分析方法。

随机-动力预报确实展现了天气预报的一种新途径，但目前只有为数不多的研究工作。在实际应用上能否与数值预报效果相比，还需要经过一段研究历程。

5. 问题与展望

首先，值得指出如下的历史事实。数值预报，几乎与现代系统科学——控制论、信息论同时发展起来的。1948 年前后，Charney 引伸了控制论中的滤波观点，组成了可求解的天气方程组。同年，Wiener 的«控制论»一书问世。Wiener 在书中明确指出，大气运动的统计特性，不同于天上星星的运动。数值预报的发展是建立在电子计算机的出现上的，而电子计算机又是控制论、信息论的产物。但是，天气预报的研究者并没有对控制论、信息论的数学基础——现代概率统计理论给予足够的重视。他们从经典流体力学来研究大气运动，在高空流场的预报上取得了一定的成功后，以为只要加进更多的物理内容和进行更准确的计算就能报准天气了。然而三十年来的实践说明，问题并非如此简单。最近，拉梅奇从流体动力学实验获得的湍流爆发的事实出发，提出了天气可预报性的限度问题，甚至提出了摒弃初始方程模式和数值模拟试验的极端性意见。这些看法，至少提醒我们应从基本观点上来探讨大气运动的性质，确定性，随机性？还是兼而有之。应探讨人们对天气预报的期望和实际可达水平的关系。

数值模式对大量的气象历史资料熟视无睹，只用了一个时次的观测资料——初始场，无疑是个大的缺陷。统计预报是从大量历史资料中提取预报信息的，但又对新、老资料等权看待。而一些统计方法只注意数学原理的直接引用，不大注意对大气运动的物理本质、物理过程的解释。在这种情况下，必然希望动力与统计结合起来取长补短，但如何结合？问题并不简单，要付出力气和代价。要从基本理论上着手探讨，而不是形式

地设计一个"结合"模式。

顾震潮从控制论观点讨论过数值模式性能的设计问题，但由于只用到自动调整原理，其结果是很有限的。目前，一个数值模式一旦设计定以后，它的预报能力也完全确定了。即一个模式报了一次和报了一百次，它的预报能力是等同的，也就是说数值模式并没有随着使用次数的增加而改进它的性能。所以，数值模式的预报能力和预报员的预报能力大不相同。一个人作一次预报，可能会因没有经验而失败；但作一百次预报时，如他能吸取前面若干次预报的经验，就有可能把天气报准。这就是说，数值模式并没有自行改进性能的能力。因此可以设想，人们应设计一种具有自增长能力的模式，即具有一定的学习能力，能处理不同的初始场和演变过程。这种模式的设计，也必须从统计-动力结合上进行。至少，如果把天气预报提为微分方程的柯西问题，那是不能解决上述课题的。

在数值预报中，人们已在初值化、参数化、四维同化等不同环节上，引用了统计数学，但都是各管各的。显然，应从模式设计的总体观点，统一地去处理各个环节上的统计方法，看来是十分必要的。在这方面，一种直观的考虑是从预报误差最小观点来统一处理。

统计-动力结合的内容很多，不是本短文所能概括的。但从上面的评述，可以得到如下综合看法：一方面，应在如模输这样有成效的统计-动力法上作出实用性的成果；另一方面，应加强统计-动力结合的基本理论研究，这样有可能在未来的年头取得重大进展。

参 考 文 献

[1] Epstein, E. S., *Tellus*, **21** (1969), №6, 739—759.
[2] Pitcher, E. J., *J. Atmos. Sci.*, **34** (1977), 3—21.
[3] Freiberger, W. and U. Grenander, *Rev. inter. stati. inst.* **33** (1965), №1.
[4] Gleeson, T. A., *J. Appl. Meteor.*, **9** (1970), 333—344.
[5] 王宗皓、李麦村等编著，天气预报中的概率统计方法，科学出版社，1974年.
[6] 郑庆林、杜行远，中国科学，**15** (1973)，№3.
[7] Faller, A. J. and D. K. Lee, *Mon. Wea. Rev.*, **103** (1975), №10.
[8] Bauer, K. G. and J. E. Kutzbach, *J. Appl. Meteor.*, **13** (1974), №4, 505—506.
[9] Lorentz, E. N., *Mon. Wea. Rev.*, **105** (1977), 590—602.
[10] 曹鸿兴，应显勋等，适时更新资料的模式输出统计法《数理统计天气预报文集》，农业出版社，1979年.