

雷暴活动所引起的地球大气电场分布问题

李其琛 林持章

(北京大学地球物理系)

大气电学的研究已经有二百多年的历史了。长期以来的观测研究表明，坏天气和好天气地区都有电现象，好天气地区的大气电位电场往往统一变化，并与世界雷暴活动同步。由此可见大气电现象是全球性的，好天气和坏天气地区的电现象是彼此联系的^[1]。

对于上述全球性的大气电现象人们虽已获得了比较丰富的感性知识，但对于它的成因则一直未能作出圆满的理论解释。在这方面曾提出过两个比较重要的学说，即 Wilson 的球形电容器学说和 Френкель 的学说。Wilson 提出了对大气电学图景的看法^[2]，他把大气看作是以地球为一极，以电离层为另一极的球形电容器，而雷暴相当于发电机。由于把大气过份简单化了，就无法说明大气中的电荷是分布在对流层中而不是分布在电离层上这一事实，也难于根据他的模式进行比较严格的数学物理分析。在 Френкель 的理论中^[1,3]，由于引用了地面电位为零或全球地表面的总电量为零的定解条件，因此他解决的实际上是接“地”（零电位）的无穷大导体平面上的电现象问题，或者是中性导体球上的电现象问题，与大气的实际情况相差甚远，不可能由此得出正确的结论。

在这里，我们从球坐标电磁学方程出发，考虑了实际大气电导率的分布情况，并正确地选取定解条件，从而计算了雷暴活动所引起的大气电场分布，结果比 Wilson 及 Френкель 等人的工作有了进一步的改进。

一、基本方程和定解条件

从 Maxwell 的电磁学方程组出发分析大气电过程，按一般习惯用的符号，电磁学方程组是：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

电量守恒定律是：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (2)$$

大气中，除了服从欧姆定律的传导电流 \mathbf{j}_c 外，还有外来电动势引起的电流 \mathbf{j}' ，云中的电荷分离过程就构成不遵循欧姆定律的电流 \mathbf{j}' 。所以

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}', \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_c = \lambda \mathbf{E}, \quad (4)$$

此处 λ 是大气电导率.

应用上述方程分析地球大气中的电过程时,采用以地心为原点的球极坐标系 (r, θ, φ) 比较方便. 计算中还作了以下三个基本假定:

1. 准稳定: 在地球—大气这一体系中,电过程的松弛时间是比较小的^[4],因此可以认为每一时刻都处在准平衡状态,即 $\frac{\partial}{\partial t} \doteq 0$.

2. 根据观测事实,可设电导率随高度按指数规律变化^[2,5]:

$$\lambda(r, \theta, \varphi) = \lambda_0(\theta, \varphi) e^{\alpha(\theta, \varphi)(r-r_0)}, \quad (5)$$

此处 r_0 是地球半径.

3. 准水平均一: 大气电导率主要是高度的函数,它的数值在各地虽有所不同,但其水平梯度总是远小于垂直梯度. 因此方程中出现的关于 λ 的水平梯度项可以略去.

由假定 1, 有 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 故可引进电位 V , $\mathbf{E} = -\nabla V$. 又因为 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 故有

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\lambda \nabla^2 V - \nabla \lambda \cdot \nabla V + \nabla \cdot \mathbf{j}' = 0. \quad (6)$$

云中的电荷分离作用是一种外来电动势,它构成电流 \mathbf{j}' , 而 \mathbf{j}' 则在云中维持着几个电荷中心. 正(负)电荷中心 Q_i 所在处 $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ 对 \mathbf{j}' 来说是汇(源),但对 \mathbf{j}_c 来说却是源(汇),此处应有

$$-\nabla \cdot \mathbf{j}' = \nabla \cdot \mathbf{j}_c = -4\pi Q_i \lambda_i \delta(r - r_i) \delta(\theta - \theta_i) \delta(\varphi - \varphi_i), \quad (7)$$

式中 Q_i , λ_i 分别是某个电荷中心的电量和该处的电导率, $\delta(x)$ 是单位脉冲函数. 这里我们先把电荷中心当作点电荷来处理,以后再推广为更一般的电荷分布.

将(7)式代入(6)式,并考虑假设(2)和(3),即可得到:

$$\nabla^2 V + \alpha \frac{\partial V}{\partial r} = - \sum_i 4\pi Q_i \delta(r - r_i) \delta(\theta - \theta_i) \delta(\varphi - \varphi_i), \quad (8)$$

此处 \sum_i 代表对大气中的全部电荷中心 i 求和.

因为地球是良导体,所以在地球表面 $r = r_0$ 处应该是等电位的. 若我们按习惯将无穷远的电位规定为零,那么,地球表面的电位 V_0 就是待定的. Френкель^[3] 将 V_0 取为零,这是他所以不能取得成功的原因之一. 根据假设 1, 地球总电荷 Q_{\oplus} 的时间变化 $\frac{\partial Q_{\oplus}}{\partial t} \doteq 0$, 故知地球表面 S_0 处所有电流的总和应为零.

总结以上所述,可归结为求解下列边值问题:

$$\nabla^2 V + \alpha \frac{\partial V}{\partial r} = - \sum_i 4\pi Q_i \delta(r - r_i) \delta(\varphi - \varphi_i) \delta(\theta - \theta_i), \quad (8)$$

$$V(r_0, \theta, \varphi) = V_0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (9)$$

$$\oiint_{S_0} \left(\lambda \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{j}' \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (10)$$

二、方程的解和結論

作变数替换 $V(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta, \varphi)e^{-\frac{\alpha(\theta, \varphi)(r-r_0)}{2}}$, 再考虑到假设 2 和 $\frac{\alpha}{r} \ll \frac{\alpha^2}{4}$, 即可将方程(8)化为椭圆型偏微分方程的典型形式, 由此求得上述边值问题的解为^[5] (单位库伦-伏特-公里):

$$V(r, \theta, \varphi) = 3 \times 10^4 \sum_i Q_i e^{-\frac{1}{2}\alpha(\theta, \varphi)(r-r_i)} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha(\theta, \varphi)R_i}}{R_i} - \frac{r_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha(\theta, \varphi)R'_i}}{r_i R'_i} \right] + V_0 e^{-\alpha(\theta, \varphi)(r-r_0)}, \quad (11)$$

此处

$$r'_i = \frac{r_0^2}{r_i}, \quad R_i = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos \gamma}, \quad R'_i = \sqrt{r^2 + r_i'^2 - 2rr'_i \cos \gamma}$$

$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i)$, R_i, R'_i 分别代表由 $(r_i, \theta_i, \varphi_i), (r'_i, \theta_i, \varphi_i)$ 至观测点 (r, θ, φ) 的距离。

通过直接验算, 易知(11)式满足方程(8)。考虑到 $\frac{r'_i}{r_0} \approx 1$, 上式中的第一项当 $r = r_0$ 时近似为零, 而(11)式中的第二项 $r = r_0$ 时是 V_0 , 所以边条件(9)式得到满足。

(11)式右端的第一项代表了云中电荷中心所构成的场, 第二项代表荷电的导体球(地球)的场, 可以分别用 $V_1(r, \theta, \varphi), V_2(r, \theta, \varphi)$ 表示。为了定出 $V_2(r, \theta, \varphi)$ 中的系数 V_0 , 应将(11)式代入条件(10)式, 由此得到:

$$V_0 = - \frac{\iint_{S_0} \left[\lambda(r_0, \theta, \varphi) \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + j' \Big|_{r=r_0} \right] dS}{\iint_{S_0} \lambda(r_0, \theta, \varphi) \alpha(\theta, \varphi) dS} = - I_t R_t, \quad (12)$$

此处 R_t 代表地球大气的总电阻, 而 I_t 代表全球坏天气地区的传导电流、闪电电流、尖端放电电流、降水电流等的总和。根据文献[2, 6], I_t 约为 1530—1800 安培, R_t 约为 200 欧姆, 由此算得 V_0 为 $-3.06 - -3.6 \times 10^5$ 伏。

对于上面得到的结果, 可以作以下几点讨论。

1. 将 $V(r, \theta, \varphi)$ 对 r 求导, 即得到地面处的电位梯度:

$$\frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 2 \sum_i \theta_i (r_i - r_0) \cos \gamma \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{2}(r_i - r_0) - \frac{\alpha}{2}R_i}}{R_i^2} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{R} \right) \right] - \alpha(\theta, \varphi) V_0, \quad (13)$$

$V(r, \theta, \varphi)$ 和 $\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$ 的实例计算结果如图 1 所示。

2. (11)和(13)式的第一项是代表云中电荷的场, 此处得到的结果比静电问题的结果多一个因子 $\exp \left[+\frac{\alpha}{2}(r_i - r_0) - \frac{\alpha}{2}R_i \right]$ 。这说明在具有非均匀电导率的大气中, 点源的影响比无电导率的大气要随距离衰减得更快。这个结果或许是值得注意的, 因为根据雷暴周围的地面电位梯度估计云中电荷 Q_i 时, 忽略上述因子可能会低估子 Q_i 的数值。

3. 离点源几十公里以外的晴天地区, 电位分布是由(9)和(11)式中的第二项 $V_2(r, \theta,$

φ)所决定的,它代表了地球负电荷的场。因为 $r \rightarrow \infty$ 时, $V_2 \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ 时, $V \rightarrow V_0 < 0$, 所以高空和地面都是等电位的。二者的电位差 $\Delta V = -V_0 = I_t R_t$, 即高空的电位约比地面高大约 30 至 40 万伏。地面处 $\frac{\partial V_2}{\partial r} = -\alpha V_0 \sim 108$ 伏/米。这些数值都和观测值相合。

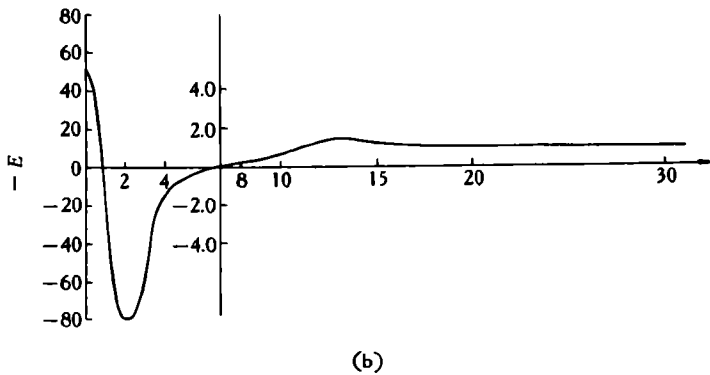
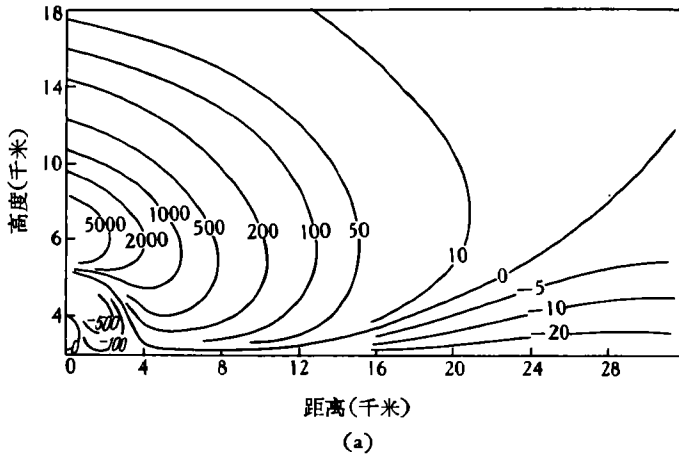


图 1 (a) 雷暴地区电位分布(单位: 万伏), (b) 雷暴地区地面电场分布(单位: 伏/厘米)

4. 全球雷暴活动愈强时, I_t 将愈大, 电位差 $-V_0$ 亦将相应地加大, 这就是所谓“统一变化”的成因。由于 $\alpha(\theta, \varphi)$ 随坐标 (θ, φ) 及时间都有一些变化, 所以一般说来地面电位梯度 $\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \alpha(\theta, \varphi) V_0$ 不是统一变化的, 只有在 α 近于常数的海上才可能是统一变化。

5. 在晴天地区, 电位 $V = V_0 e^{-\alpha(\theta, \varphi)(r-r_0)}$, 电位梯度 $\frac{\partial V}{\partial r} = -\alpha V_0 e^{-\alpha(r-r_0)} > 0$, 电荷密度 $\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{\alpha^2 V_0}{4\pi} e^{-\alpha(r-r_0)} > 0$, 地面总电荷 $Q_{\text{地}} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} dS < 0$ 。此处得到的电位随高度按指数加大, 电位梯度和电荷密度按指数减小的规律都和平均的观测资料相合。另外计算结果也说明了正电荷是分布在对流层中而地面是荷负电的事实。

在上面的计算中, 云中的电荷中心是当作点电荷来处理的, 这个结果不难推广到连续

的电荷分布, 这时有:

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta, \varphi) = & V_0 e^{-a(\theta, \varphi)(r-r_0)} + \\
 & + \sum_i \left\{ \iiint_{\tau_i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} \rho(\mathbf{r}_i) e^{\frac{a}{2}[(r_i-r) - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|]} d\mathbf{r}_i - \right. \\
 & \left. - \iiint_{\tau_i} \frac{1}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}|} \frac{r_0}{r_i} \rho(\mathbf{r}_i) e^{\frac{a}{2}[(r_i-r) - |\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}|]} d\mathbf{r}_i \right\}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

此处 \mathbf{r} 是位置矢量, $\rho(\mathbf{r}_i)$ 和 τ_i 分别是第 i 个电荷中心的电荷密度分布和总体积。讨论电荷中心附近的电场时, 精确地考虑电荷密度 $\rho(\mathbf{r}_i)$ 的分布情况是有必要的^[7], 不过这并不影响上面的那几点结论。

致谢: 陈受钧和毛节秦同志曾对本文提出了宝贵的建议, 作者谨向他们致深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] Имянитов, И. М., Шифрин, К. С., Современное состояние исследований атмосферного электричества, У. Ф. Н., том. LXXVI (1962), вып. 4.
- [2] Chalmers, J. A., Atmospheric electricity, 1957.
- [3] Френкель, Я. И., Теория явлений атмосферного электричества, 1949.
- [4] Mühleisen, R., Atmosphärische Elektrizität, Handbuch der Physik, 1957.
- [5] 吉洪诺夫, 数学物理方程(中译本, 下册), 高教出版社, 1957.
- [6] Israël, H., Atmosphärische Elektrizität, Teil II, 1961.
- [7] Красногорская, Н. В., Об. электрическом поле кучевых облаков, Сер. геоф. Изв. АН СССР, № 9, 1961.

(本文于 1964 年 8 月 5 日收到, 1965 年 12 月 20 日收到修改稿)