第 36 卷 第 2 期　　气 象 学 报　　Vol. 36, No. 2
1966 年 6 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　June, 1966

湿日与干日随机变化的概率

么 枕 生
(南京大学气象系)

提　　要

本文提出用正则马尔科夫链计算湿日与干日随机变化的概率，这些计算结果对于单站补充预报有一定用处。其次，本文还直接根据条件概率推导出高阶转移概率的循环公式，其计算结果和马尔科夫链计算结果是一样的。根据这些循环公式还可以求得计算高阶转移概率样本值的公式。根据高阶转移概率样本值的计算，可以检查马尔科夫链的计算结果是否符合于实际情况。

本文所讨论的问题是属于随机过程的范围。设 t 为时间参数，T 为所讨论的整个时间区间，x_t 为在时间 t 的观测值。于是，一个随机过程就是一个随机变数族 $\{x_t;\ t \in T\}$，以便对于 $t \in T$ 的每一选择的有限集(例如，$t_1, t_2, \cdots, t_n$)，随机变数的集 $x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}$ 就具有一个联合概率分布函数。简单的来讲，气象要素观测值的时间序列就代表这样的随机过程。粗略的来讲，马尔科夫过程(链)就是沒有后效的随机过程(序列)。本文所指的随机变化就是气象要素依时间的随机变化。

一、湿日与干日的轉移概率

设 D 代表干日(日降水量 < 0.1 毫米)，M 代表湿日(日降水量 ≥ 0.1 毫米)[1)]。为说明与示例方便起见，设有下列样本序列，此序列的初始记录为 D：

$$D\ \overset{1}{D}\ \overset{1}{D}\ \overset{1}{D}\ M\ \overset{2}{D}\ \overset{1}{D}\ M\ M\ \overset{3}{D}\ \overset{1}{D}\ \overset{1}{D}\ M\ M\ M\ \overset{4}{D}\ \overset{1}{D} \tag{1}$$

仿 W. Feller[1] (1957)，设初始记录为零次试验(即试验序号为零)，第二个记录的试验序号为 1，等等。

设 $p_0 = P(M|D)$ 代表在前一日为干日的条件下，现转移为湿日的条件概率，$q_0 = P(D|D)$ 则代表在前一日为干日的条件下，现仍为干日的条件概率，且 $p_0 + q_0 = 1$。$p_1 = P(M|DM)$ 代表在前面仅有一个湿日的条件下，现仍持续有一个湿日的条件概率，$q_1 = P(D|DM)$ 则代表在前面仅有一个湿日条件下，现转移为一个干日的条件概率，且 $p_1 + q_1 = 1$。$p_2 = P(M|DMM)$ 代表在前面已持续两个湿日的条件下，现仍持续有一个湿日的条件概率，$q_2 = P(D|DMM)$ 则代表在前面已持续两个湿日的条件下，现转移为一个干日的条件概率，且 $p_2 + q_2 = 1$，等等。p_k 代表在前面已持续 k 个湿日的条件下，现

1) 本文只是用湿日（雨日）与干日（无雨日）作为讨论示例。为了更能密切结合生产实际需要，我们还可以计算大雨日(例如，日降水量 ≥ 30 毫米)以及暴雨日（日降水量 ≥ 50 毫米）等的转移概率，其计算方法是一样的。

仍持续有一个湿日的条件概率. $q_k(=1-p_k)$ 代表前面已持续 k 个湿日的条件下,现转移为一个干日的条件概率. 此外,设 $f_k(k=1,2,\cdots)$代表干日在初始试验(干日)以后第一次在第 k 次试验出现的条件概率,即 $f_1=\frac{P(DD)}{P(D)}, f_2=\frac{P(DMD)}{P(D)}, f_3=\frac{P(DMMD)}{P(D)}$, $\cdots$. $f_1+f_2+\cdots=1$. 于是,我们根据条件概率求得

$$p_0=P(M|D)=\frac{P(D)-P(DD)}{P(D)}=1-f_1, \tag{2}$$

$$p_1=P(M|DM)=\frac{P(DM)-P(DMD)}{P(D)-P(DD)}=\frac{1-(f_1+f_2)}{1-f_1}, \tag{3}$$

$$p_2=P(M|DMM)=\frac{P(DMM)-P(DMMD)}{P(D)-P(DD)-P(DMD)}=\frac{1-(f_1+f_2+f_3)}{1-(f_1+f_2)}, \tag{4}$$

等等.

于是,

$$p_k=\frac{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{k+1})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_k)}, \tag{5}$$

而

$$q_k=1-p_k=\frac{f_{k+1}}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_k)}, \tag{6}$$

此处 $k=0,1,2,\cdots; f_0=0$.

W. Feller (1957) 曾根据循环事件的考虑求得(6)式的关系,然后求出(5)式,作者推导方法的优点,就是转移概率 (p_k, q_k) 意义明确,易于理解与计算.

如以湿日为初始试验也可以求得相似结果.

二、根据馬尔科夫鏈計算湿日与干日的高阶轉移概率

设有一个试验的序列,每一个试验的结果为有限或无限的可能结果 $S_0, S_1, \cdots$ 中一个结果. 在马尔科夫链的理论中,就是假设在某一试验中出现结果(状态) S_k 的概率仅和刚在前面的一次试验结果(状态) S_j 有关. 如设 $p_{jk}^{(n)}$ 代表由状态 S_j n 步以后转移成状态 S_k 的概率 $(j, k=0,1,2,\cdots; n=1,2,3,\cdots)$, 且这种转移概率符合马尔科夫性质,则转移概率就可以排列为矩阵 P^n:

$$P^n=\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

这里 $p_{jk}^{(1)}=p_{jk}$, $P^1=P$. (7)式就规定一个马尔科夫链,此链具有状态 $S_0, S_1, S_2, \cdots$,

而初始状态为 S_0.

现在我们把天气随机变化看作是一种试验. 在逐日干湿日的转移过程中所构成的天气变化序列,就可以根据某种标准把它划成不同的状态(如 S_0, S_1, S_2, $\cdots$), 然后仿(7)式把各状态的转移概率组成转移矩阵. 我们知道, 在马尔科夫过程中并不考虑任何过去的试验结果,仅借前一试验结果去预测将来,所以马尔科夫链只代表简单的随机过程. 为了改进这种简单的近似假设,我们可以在划分状态时就考虑过去任何试验结果,然后根据马尔科夫链理论计算各个状态转移与持续的概率. 为了方便起见, 我们可分别以干日与湿日为初始状态, 组成二个马尔科夫链, 以便分别计算湿日与干日转移与持续的概率. 在这里只是以干日为初始状态,去计算干湿日转移的概率. 首先以干日为固定的初始状态. 在序列中凡干日都划为状态 S_0; 干日以后具有一个湿日的状态划为 S_1; 当 S_1 出现以后又继续一个湿日的状态划为 S_2, $\cdots$; 当 S_ν 出现以后又继续一个湿日的状态划为 $S_{\nu+1}$. 例如, 在上述样本序列中[(1)式]依次可以划出下列各状态 $S_0S_0S_0S_0S_1S_0S_0S_1S_2S_0S_0S_0S_1S_2S_3S_0S_0$. 因此, 在各个状态 S_1, S_2, $\cdots$ 以内就已考虑了其历史演变情况. 状态 S_0 可由 S_0, S_1, S_2, $\cdots$ 转移而来,其概率也是不同的.

此外,我们认为湿日序列的长度是有限的,那末 S_∞ 就代表不可能的事件,其出现概率为零. 我们设湿日序列长度并不大于有限数值 $\nu+1$.

根据上面的推导我们知道, q_0 就代表 $S_0 \to S_0$ 的概率 p_{00}, p_0 代表 $S_0 \to S_1$ 的概率 p_{01}, q_1 代表 $S_1 \to S_0$ 的概率 p_{10}, p_1 代表 $S_1 \to S_2$ 的概率 p_{12}, q_2 代表 $S_2 \to S_0$ 的概率 p_{20}, p_2 代表 $S_2 \to S_3$ 的概率 p_{23}, $\cdots$. 于是, 根据上面的考虑,我们可以把湿日与干日逐日随机变化的概率组成下列形式的转移矩阵:

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_\nu \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(8)式链应当认为是 W. Feller (1957) 提出的. 不过,作者在这里是用和 Feller 不同的概念提出的,而且 Feller 提出的是一个具有无限多元素的矩阵. 这个无限矩阵并非方阵,只能作为示例,不便作进一步的计算.

根据(7)式计算高阶转移矩阵时,可以应用循环公式

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_\nu p_{j\nu}p_{\nu k}^{(n)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

计算各元素,或直接根据矩阵乘法去计算 $P^{n+1} = PP^n$.

如 $n \geqslant 2$,作者根据(9)式求得高阶转移矩阵的一般形式如下:

$$P^n=\left(\begin{array}{c}\overbrace{\begin{matrix}(q_0p_{00}^{(n-1)}+p_0p_{10}^{(n-1)}) & p_0p_{00}^{(n-1)} & (q_0p_{02}^{(n-1)}+p_0p_{12}^{(n-1)}) & \cdots & (q_0p_{0,n-2}^{(n-1)}+p_0p_{1,n-2}^{(n-1)}) & q_0p_{0,n-1}^{(n-1)}\\ (q_1p_{00}^{(n-1)}+p_1p_{20}^{(n-1)}) & p_0p_{10}^{(n-1)} & (q_1p_{02}^{(n-1)}+p_1p_{22}^{(n-1)}) & \cdots & (q_1p_{0,n-2}^{(n-1)}+p_1p_{2,n-2}^{(n-1)}) & q_1p_{0,n-1}^{(n-1)}\\ (q_2p_{00}^{(n-1)}+p_2p_{30}^{(n-1)}) & p_0p_{20}^{(n-1)} & (q_2p_{02}^{(n-1)}+p_2p_{32}^{(n-1)}) & \cdots & (q_2p_{0,n-2}^{(n-1)}+p_2p_{3,n-2}^{(n-1)}) & q_2p_{0,n-1}^{(n-1)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ (q_\nu p_{00}^{(n-1)}+p_\nu p_{\nu+1,0}^{(n-1)}) & p_0p_{\nu 0}^{(n-1)} & (q_\nu p_{02}^{(n-1)}+p_\nu p_{\nu+1,2}^{(n-1)}) & \cdots & (q_\nu p_{0,n-2}^{(n-1)}+p_\nu p_{\nu+1,n-2}^{(n-1)}) & q_\nu p_{0,n-1}^{(n-1)}\\ p_{00}^{(n-1)} & p_{01}^{(n-1)} & p_{02}^{(n-1)} & \cdots & p_{0,n-2}^{(n-1)} & p_{0,n-1}^{(n-1)}\end{matrix}}\end{array}\begin{matrix}p_0p_{1,n}^{(n-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & p_1p_{2,n+1}^{(n-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & p_2p_{3,n+2}^{(n-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}\right) \tag{10}$$

(10)式并非显式,仍为循环公式,不过该式因不需矩阵乘法,所以逐步计算较为方便.在矩阵(8)式中共有 $\nu+1$ 个有零纵行. 在逐次高一阶的转移矩阵中,则无零纵行逐次增加,即有零纵行逐次减少. 最后,在 $n=\nu+1$ 步的转移矩阵中各纵行就都已无零,这个矩阵就如(10)式中有大括弧所表示的部分.

我们可以由(10)式看出,(8)式应为正则马尔科夫链[2]. 很多作者[3]也称之为不可约非周期的正循环马尔科夫链.

现在我们根据(5),(6),(8)与(10)式,利用上海 40 年(1919—1958) 5—9 月逐日降水资料计算出各阶正则马尔科夫链列如(11)—(14)式. 计算时应用 5 位有效数字, 计算结果则采用 4 位1). 在上面我们已经说明干湿日的变化是一个有限马尔科夫链, 在上海 5—9 月状态空间即为 $\{S_0, S_1, \cdots, S_{16}\}$, 具有转移矩阵(11)式, 各高阶转移矩阵在这里只给出 P^2, P^3 与 P^5. 如需要更高阶转移矩阵,仍可继续根据(10)式计算.

由(8)与(11)式我们知道: 在上海 5—9 月, 干日 (其前面可为干日, 也可为湿日) 以后,仍为干日的概率为 72%; 干日以后,现转移为湿日的概率则为 28%. 一个湿日(其前面为干日)以后,现转移为干日的概率为 36%; 一个湿日以后, 仍持续有一个湿日的概率为 64%. 已经持续两个湿日 (其前面为干日) 以后, 转移为干日的概率为 42%; 已经持续两个湿日以后, 仍持续有一个湿日的概率为 58%. 这说明在上海 5—9 月已有两个持续雨日,次日仍降雨的概率还是较大的. 其他以此类推. 此外,由(11)式我们知道, p_{11} 最大. 换句话说,在上海 5—9 月如已持续 11 日为湿日,可预报第 12 日仍有降水,报错的概

1) 实际应用时只采用两位小数就已足够,这里是为了以后的精确计算采用了四位小数.

$$P^1=\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0.7206 & 0.2794 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3644 & 0 & 0.6356 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4186 & 0 & 0 & 0.5814 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4375 & 0 & 0 & 0 & 0.5625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3729 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6271 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3542 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6458 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3548 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6452 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8889 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2499 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7501 & 0 & 0 & 0 \\
0.1666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8334 & 0 & 0 \\
0.3998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6002 & 0 \\
0.3331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6669 \\
1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{11}$$

$$P^2=\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0.6211 & 0.2013 & 0.1776 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5287 & 0.1018 & 0 & 0.3695 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5560 & 0.1170 & 0 & 0 & 0.3270 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5571 & 0.1222 & 0 & 0 & 0 & 0.3206 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5224 & 0.1201 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3575 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4890 & 0.1042 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4829 & 0.09816 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4844 & 0.09894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5137 & 0.09913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3871 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4382 & 0.1117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2634 & 0.06983 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3022 & 0.03103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6668 & 0 & 0 & 0 \\
0.3051 & 0.06982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6251 & 0 & 0 \\
0.4533 & 0.04654 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5002 & 0 \\
0.4880 & 0.1117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4003 \\
0.9070 & 0.09305 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.7206 & 0.2794 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{12}$$

$$P^3=\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0.5953 & 0.1735 & 0.1280 & 0.1032 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5797 & 0.1477 & 0.06471 & 0 & 0.2078 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5839 & 0.1553 & 0.07433 & 0 & 0 & 0.1864 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5656 & 0.1556 & 0.07768 & 0 & 0 & 0 & 0.2011 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5458 & 0.1459 & 0.07634 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5344 & 0.1366 & 0.06621 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2627 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5324 & 0.1349 & 0.06238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2703 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5518 & 0.1353 & 0.06288 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5031 & 0.1435 & 0.06300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4065 & 0.1224 & 0.07102 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3819 & 0.07360 & 0.04438 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5001 & 0 & 0 & 0 \\
0.3402 & 0.08443 & 0.01972 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5557 & 0 & 0 \\
0.4952 & 0.08523 & 0.04438 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3752 & 0 \\
0.5102 & 0.1266 & 0.02958 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3336 \\
0.7927 & 0.1363 & 0.07099 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6875 & 0.2534 & 0.05914 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6211 & 0.2013 & 0.1776 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{13}$$

$$P^5=\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0.5901 & 0.1651 & 0.1057 & 0.06411 & 0.04184 & 0.03310 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5827 & 0.1643 & 0.1029 & 0.05457 & 0.02116 & 0 & 0.07430 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5773 & 0.1615 & 0.1037 & 0.05739 & 0.02431 & 0 & 0 & 0.07583 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5739 & 0.1585 & 0.1004 & 0.05751 & 0.02540 & 0 & 0 & 0 & 0.08425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5709 & 0.1566 & 0.09691 & 0.05392 & 0.02496 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09663 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5760 & 0.1553 & 0.09489 & 0.05048 & 0.02165 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1017 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5551 & 0.1584 & 0.09453 & 0.04984 & 0.02040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5151 & 0.1497 & 0.09797 & 0.05000 & 0.02056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5112 & 0.1323 & 0.08933 & 0.05303 & 0.02060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1936 & 0 & 0 & 0 \\
0.4787 & 0.1305 & 0.07217 & 0.04523 & 0.02322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2501 & 0 & 0 \\
0.5275 & 0.1128 & 0.06781 & 0.02719 & 0.01451 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2501 & 0 \\
0.5381 & 0.1415 & 0.06040 & 0.03119 & 0.006450 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2224 \\
0.7176 & 0.1485 & 0.08793 & 0.03149 & 0.01451 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6407 & 0.2123 & 0.09059 & 0.04678 & 0.009674 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.6039 & 0.1818 & 0.1407 & 0.05037 & 0.02322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5938 & 0.1711 & 0.1221 & 0.09362 & 0.01934 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5910 & 0.1663 & 0.1103 & 0.07438 & 0.05807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{14}$$

率只有 11%．在上海 5—9 月，p_{10}—p_{13} 都在 75% 以上，所以在上海在这个期间如湿日已持续至 10 日以上，则可参考其状态空间预报次日仍有降水，报错的概率在 25% 以下.

由(12)式我们知道，在上海 5—9 月，干日 2 日以后，仍为干日的概率为 62%；干日 2 日以后转移成仅有一个湿日的概率为 20%；干日 2 日以后转移成已有二个持续湿日的概率为 18%．其他以此类推．在(12)式中我们看出另外一个特点，这个特点对于单站补充预报具有一定的应用价值．这个特点就是在(12)式中第二纵行一致很小．这说明在上海 5—9 月一个湿日或多日持续为湿日以后，突然成为干日，然后再转为湿日的概率都很小，尤其是已持续 11 日为雨日以后，突然有 1 日转为干日天气，然后再转为雨日的概率很小，其机会只有 100 次中出现 3 次而已．

以下都可以仿上面去理解干湿日在若干步以后如何转移的概率．

三、高阶轉移概率的样本值与理論值

根据马尔科夫链所计算的湿日与干日高阶转移概率，是否符合于实际资料呢？这个很重要的问题可由下面的推导与计算去回答．现在为方便起见，更设 $f_{1,1}=\dfrac{P(DDD)}{P(D)}$，$f_{1,2}=\dfrac{P(DDMD)}{P(D)}$，$f_{2,1}=\dfrac{P(DMDD)}{P(D)}$，$f_{3,1}=\dfrac{P(DMMDD)}{P(D)}$，$f_{1,1,1}=\dfrac{P(DDDD)}{P(D)}$，$f_{1,3,1}=\dfrac{P(DDMMDD)}{P(D)}$，… 等等．此外，设 $p_{jk}^{*(n)}$ 代表由 $S_j n$ 日以后转移成 S_k 的样本概率，$p_{jk}^{(n)}$ 则代表其相应的马尔科夫模式理论值．于是，根据上面规定的符号，推得

$$p_{00}^{*(2)}=\frac{P(DDD)}{P(D)}+\frac{P(DMD)}{P(D)}=f_{1,1}+f_2. \tag{15}$$

根据马尔科夫性质，

$$P(DDD)=P(D)\frac{P(DD)}{P(D)}\frac{P(DD)}{P(D)},$$

所以和(15)式相应的马尔科夫模式理论值为：

$$p_{00}^{(2)}=\frac{P(DD)}{P(D)}\frac{P(DD)}{P(D)}+\frac{P(DMD)}{P(D)}=f_1^2+f_2. \tag{16}$$

此外，

$$p_{10}^{*(2)}=\frac{P(DMDD)}{P(DM)}+\frac{P(DMMD)}{P(DM)}=\frac{f_{2,1}+f_3}{1-f_1}. \tag{17}$$

根据马尔科夫性质，

$$P(DMDD)=P(D)\frac{P(DMD)}{P(D)}\frac{P(DD)}{P(D)},$$

所以和(17)式相应的马尔科夫模式理论值为：

$$p_{10}^{(2)}=\frac{f_2\cdot f_1+f_3}{1-f_1}. \tag{18}$$

作者根据一系列和(15)与(17)式同样的推导结果，写出下列关于 2 阶转移概率的一般计算公式：

$$\left.\begin{aligned}
&p_{j0}^{*(2)}=\frac{f_{j+2}+f_{j+1,1}}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\ p_{j1}^{*(2)}=\frac{f_{j+1}-f_{j+1,1}}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&\quad p_{j,j+2}^{*(2)}=\frac{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{j+2})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)}\quad (j=0,1,2,\cdots;f_0=0),\\
&\quad p_{j,j+3}^{*(2)}=p_{j,j+4}^{*(2)}=\cdots=0\quad (j=0,1,2,\cdots),\\
&\quad p_{j2}^{*(2)}=p_{j3}^{*(2)}=\cdots=p_{j,j+1}^{*(2)}=0\quad (j=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

相应的马尔科夫模式理论值为:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{j0}^{(2)}=\frac{f_{j+2}+f_{j+1}\cdot f_1}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\ p_{j1}^{(2)}=\frac{f_{j+1}-f_{j+1}\cdot f_1}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&\quad p_{j,j+2}^{(2)}=\frac{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{j+2})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\quad (j=0,1,2,\cdots;f_0=0),\\
&\quad p_{j,j+3}^{(2)}=p_{j,j+4}^{(2)}=\cdots=0\quad (j=0,1,2,\cdots),\\
&\quad p_{j2}^{(2)}=p_{j3}^{(2)}=\cdots=p_{j,j+1}^{(2)}=0\quad (j=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

3 阶转移概率的一般计算公式:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{j0}^{*(3)}=\frac{f_{j+3}+f_{j+2,1}+f_{j+1,2}+f_{j+1,1,1}}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\ p_{j1}^{*(3)}=\frac{f_{j+2}+f_{j+1,1}-(f_{j+2,1}+f_{j+1,1,1})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&\quad p_{j2}^{*(3)}=\frac{f_{j+1}-(f_{j+1,1}+f_{j+1,2})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\ p_{j,j+3}^{*(3)}=\frac{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{j+3})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)}\\
&\qquad\qquad (j=0,1,2,\cdots;f_0=0),\\
&\quad p_{j,j+4}^{*(3)}=p_{j,j+5}^{*(3)}=\cdots=0\quad (j=0,1,2,\cdots),\\
&\quad p_{j3}^{*(3)}=p_{j4}^{*(3)}=\cdots=p_{j,j+2}^{*(3)}=0\quad (j=0,1,2,\cdots).
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

相应的马尔科夫模式理论值为:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{j0}^{(3)}=\frac{f_{j+3}+f_{j+2}\cdot f_1+f_{j+1}\cdot f_2+f_{j+1}\cdot f_1^2}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&\quad p_{j1}^{(3)}=\frac{f_{j+2}+f_{j+1}\cdot f_1-(f_{j+2}+f_{j+1}\cdot f_1)f_1}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&\quad p_{j2}^{(3)}=\frac{f_{j+1}-(f_{j+1}\cdot f_1+f_{j+1}\cdot f_2)}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\quad p_{j,j+3}^{(3)}=\frac{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{j+3})}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)}\\
&\qquad\qquad (j=0,1,2,\cdots;f_0=0)\\
&\quad p_{j,j+4}^{(3)}=p_{j,j+5}^{(3)}=\cdots=0\quad (j=0,1,2,\cdots),\\
&\quad p_{j3}^{(3)}=p_{j4}^{(3)}=\cdots=p_{j,j+2}^{(3)}=0\quad (j=1,2,3,\cdots),\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

根据一系列和上面同样的推导结果，作者求得下列马尔科夫模式高阶($n>1$)转移概率(理论值)的循环公式:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{j0}^{(n)}=\frac{(p_{j+1,0}^{(n-1)})_N+f_{j+1}(p_{00}^{(n-1)})_N}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_j)},\\
&p_{j1}^{(n)}=p_{j0}^{(n-1)}-p_{j0}^{(n-1)}\cdot f_1,\\
&p_{jk}^{(n)}=p_{j,k-1}^{(n-1)}-(p_{j,k-1}^{(n-1)})_p\cdot f_k\quad (j=0,1,2,\cdots;k=2,3,4,\cdots),
\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

此处 $(p_{j+1,0}^{(n-1)})_N$ 与 $(p_{00}^{(n-1)})_N$ 各代表 $p_{j+1,0}^{(n-1)}$ 与 $p_{00}^{(n-1)}$ 式的分子部分，$(p_{j,k-1}^{(n-1)})_p$ 则代表 $p_{j,k-1}^{(n-1)}$ 式的正值部分。

在上面的推导过程中，根据符号的排列我们知道：如命 $f_{j,k,l,\cdots}=f_j\cdot f_k\cdot f_l\cdots$ $(j,k,l=1,2,3,\cdots)$，则由(23)式可以直接写出高阶转移概率样本值的一般计算公式，不过在(23)式中前乘(从前面乘)与后乘(从后面乘)的次序不能变换．例如，根据(23)式可以写出下列计算公式：

$$p_{00}^{(2)}=\frac{(p_{10}^{(1)})_N+f_1(p_{00}^{(1)})_N}{1-f_0}=f_2+f_1\cdot f_1=f_2+f_1^2,\ 且\ p_{00}^{*(2)}=f_2+f_{1,1},$$

$$p_{10}^{(2)}=\frac{(p_{20}^{(1)})_N+f_2(p_{00}^{(1)})_N}{1-f_1}=\frac{f_3+f_2\cdot f_1}{1-f_1},\ 且\ p_{10}^{*(2)}=\frac{f_3+f_{2,1}}{1-f_1},$$

$$p_{11}^{(3)}=p_{10}^{(2)}-p_{10}^{(2)}\cdot f_1=\frac{f_3+f_2\cdot f_1-(f_3+f_2\cdot f_1)f_1}{1-f_1},\ 且$$

$$p_{11}^{*(3)}=\frac{f_3+f_{2,1}-(f_{3,1}+f_{2,1,1})}{1-f_1},$$

$$p_{12}^{(4)}=p_{11}^{(3)}-(p_{11}^{(3)})_p\cdot f_2=\frac{f_3+f_2\cdot f_1-(f_3+f_2\cdot f_1)f_1-(f_3+f_2\cdot f_1)f_2}{1-f_1}=$$

$$=\frac{f_3+f_2\cdot f_1-(f_3\cdot f_1+f_2\cdot f_1\cdot f_1+f_3\cdot f_2+f_2\cdot f_1\cdot f_2)}{1-f_1},$$

且

$$p_{12}^{*(4)}=\frac{f_3+f_{2,1}-(f_{3,1}+f_{2,1,1}+f_{3,2}+f_{2,1,2})}{1-f_1}.$$

又如我们根据(23)式求得

$$p_{\nu+1,0}^{(n)}=\frac{(p_{\nu+2,0}^{(n-1)})_N+f_{\nu+2}(p_{00}^{(n-1)})_N}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{\nu+1})}=\frac{f_{\nu+2}(p_{00}^{(n-1)})_N}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{\nu+1})}.$$

因为我们在(8)式中假设 $\dfrac{f_{\nu+2}}{1-(f_1+f_2+\cdots+f_{\nu+1})}=q_{\nu+1}=1$，所以

$$p_{\nu+1,0}^{(n)}=(p_{00}^{(n-1)})_N=p_{00}^{(n-1)}.$$

同样可以证明

$$p_{\nu+1,1}^{(n)}=p_{01}^{(n-1)},\cdots,p_{\nu+1,n-1}^{(n)}=p_{0,n-1}^{(n-1)}.$$

这和(10)式中所求得的结果是一样的．这些结果是很有趣的．在(8)式我们知道，$p_{\nu+1,0}=1$，即湿日已持续 $\nu+1$ 日以后必然转移成为一个干日 (S_0)，所以由状态 $S_{\nu+1}$ 用 n 步转移为各个状态的概率，就相当由状态 S_0 用 $n-1$ 步转移到各状态的概率．

因为(23)式是根据马尔科夫性质推导的，所以用(23)式计算的理论值和用(10)式计算的理论值完全相同．这一点我们可以直接证明，也可以用资料去验证．(23)式和(10)式相比具有很大的优点，即由(23)式可以直接写出计算样本值的计算公式．

为了说明计算方法的具体步骤，以便易于广大气象工作者应用起见，我们可以上面的样本序列[(1)式]作为简单的计算示例．这个序列共有连续 17 天的记录，按各日晴雨的规定代成(1)式的符号．序列上面的数字是根据上述 f 的定义记于序列旁边的，如 1 即指 f_1，以此类推．如以相对频数代替概率，则在上面样本序列中，$f_1=\dfrac{7}{10}$，$f_2=\dfrac{1}{10}$，$f_3=\dfrac{1}{10}$，$f_4=\dfrac{1}{10}$，$f_{1,1}=\dfrac{3}{10}$，$f_{1,2}=\dfrac{1}{10}$，$f_{2,1}=\dfrac{1}{10}$，$f_{3,1}=\dfrac{1}{10}$，$f_{1,1,1}=\dfrac{1}{10}$，$f_{1,2,1}=\dfrac{1}{10}$，$\cdots$ 等等．于

是

$$p_{12}^{*(4)}=\frac{f_3+f_{2,1}-(f_{3,1}+f_{3,2}+f_{2,1,1}+f_{2,1,2})}{1-f_1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{10}+0+0+0\right)}{1-\frac{7}{10}}=\frac{1}{10}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{3}.$$

在上述样本序列中也恰好是在 S_1 出现三次的情况下，有一次由 S_1 4 步转移到 S_2。同样，求得 $p_{00}^{*(2)}=\frac{4}{10}$, $p_{10}^{*(2)}=\frac{2}{3}$, $p_{11}^{*(3)}=\frac{1}{3}$. 这些数值都代表实际情况，虽然样本是很短的。但是，

$$p_{12}^{(4)}=\frac{f_3+f_2\cdot f_1-(f_3\cdot f_1+f_3\cdot f_2+f_2\cdot f_1^2+f_1\cdot f_2^2)}{1-f_1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}-\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{49}{100}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{100}\right)}{1-\frac{7}{10}}=$$

$$=\frac{17}{50}\times\frac{1}{3}=\frac{17}{150}.$$

同样，$p_{00}^{(2)}=\frac{59}{100}$, $p_{10}^{(2)}=\frac{17}{30}$, $p_{11}^{(3)}=\frac{51}{300}$. 这些概率值是上述样本序列很加长（随机地）以后应有的理论值。

在上面推导的过程中我们知道，如样本相当长，则高阶转移概率的样本值和马尔科夫模式的理论值可以相差很小。根据上面的示例计算我们又知道，样本值代表实际情况。

表 1 上海 5—9 月 f 的计算值

	20 年	40 年	80 年		20 年	40 年	80 年
f_1	0.70672	0.72062	0.72152	$f_{1,1}$	0.50911	0.51978	0.52511
f_2	0.10820	0.10182	0.10168	$f_{2,1}$	0.076310	0.073212	0.072750
f_3	0.075171	0.074334	0.076784	$f_{3,1}$	0.048975	0.051893	0.052859
f_4	0.051253	0.045161	0.042286	$f_{4,1}$	0.029613	0.027209	0.025038
f_5	0.025057	0.024965	0.025456	$f_{5,1}$	0.016515	0.017391	0.017527
f_6	0.013098	0.012342	0.013076	$f_{6,1}$	0.0074032	0.0084151	0.0095980
f_7	0.0062642	0.0072931	0.0070942	$f_{7,1}$	0.0051253	0.0056101	0.0052859
f_8	0.0056948	0.0047686	0.0044512	$f_{8,1}$	0.0028474	0.0028050	0.0031993
f_9	0.0039863	0.0030856	0.0026429	$f_{9,1}$	0.0034169	0.0016830	0.0016692
f_{10}	0.0028474	0.0022440	0.0016692	$f_{10,1}$	0.0011390	0.0014025	0.0011128
f_{11}	0	0.00084151	0.0015301	$f_{11,1}$	0	0.00084151	0.00083461
f_{12}	0	0.00028050	0.00027820	$f_{12,1}$	0	0.00028050	0.00027820
f_{13}	0.00056948	0.00056101	0.00027820	$f_{13,1}$	0.00056948	0.00028050	0.00013910
f_{14}	0.00656948	0.00028050	0.00055641	$f_{14,1}$	0.00056948	0.00028050	0.00041730
f_{15}	0	0.00056101	0.00027820	$f_{15,1}$		0.00056101	0.00027820
f_{16}	0	0.00028050	0.00013910	$f_{16,1}$		0.00028050	0.00013910
f_{17}	0.00056948	0.00056101	0.00027820	$f_{17,1}$		0.00028050	0.00013910

表 2　上海 5—9 月 2 阶转移概率样本值的计算(括弧中数字为理论值)

	(1)							(2)							(3)					
	20 年		40 年		80 年			20 年		40 年		80 年			20 年		40 年		80 年	
$S_0 \to S_0$	0.6173	(0.6076)	0.6216	(0.6211)	0.6268	(0.6223)	$S_0 \to S_1$	0.1976	(0.2073)	0.2008	(0.2013)	0.1964	(0.2009)	$S_0 \to S_2$	0.1851	(0.1851)	0.1776	(0.1776)	0.1768	(0.1768)
$S_1 \to S_0$	0.5165	(0.5171)	0.5281	(0.5287)	0.5370	(0.5392)	$S_1 \to S_1$	0.1087	(0.1082)	0.1024	(0.1018)	0.1039	(0.1017)	$S_1 \to S_3$	0.3748	(0.3748)	0.3695	(0.3695)	0.3592	(0.3592)
$S_2 \to S_0$	0.5416	(0.5640)	0.5466	(0.5560)	0.5382	(0.5525)	$S_2 \to S_1$	0.1415	(0.1191)	0.1264	(0.1170)	0.1353	(0.1209)	$S_2 \to S_4$	0.3169	(0.3169)	0.3270	(0.3270)	0.3265	(0.3265)
$S_3 \to S_0$	0.4974	(0.5575)	0.5054	(0.5571)	0.5049	(0.5596)	$S_3 \to S_1$	0.1969	(0.1368)	0.1739	(0.1222)	0.1724	(0.1177)	$S_3 \to S_5$	0.3057	(0.3057)	0.3206	(0.3206)	0.3227	(0.3227)
$S_4 \to S_0$	0.5049	(0.5252)	0.5121	(0.5224)	0.5301	(0.5446)	$S_4 \to S_1$	0.1456	(0.1253)	0.1304	(0.1201)	0.1374	(0.1228)	$S_4 \to S_6$	0.3495	(0.3495)	0.3575	(0.3575)	0.3325	(0.3325)
$S_5 \to S_0$	0.4068	(0.4619)	0.4706	(0.4890)	0.5172	(0.5121)	$S_5 \to S_1$	0.1695	(0.1143)	0.1186	(0.1042)	0.1078	(0.1128)	$S_5 \to S_7$	0.4237	(0.4237)	0.4068	(0.4068)	0.3750	(0.3750)
$S_6 \to S_0$	0.5278	(0.4937)	0.5000	(0.4829)	0.5072	(0.4985)	$S_6 \to S_1$	0.05555	(0.08962)	0.08108	(0.09816)	0.09419	(0.1029)	$S_6 \to S_8$	0.4167	(0.4167)	0.4189	(0.4189)	0.3986	(0.3986)
$S_7 \to S_0$	0.4800	(0.5627)	0.4375	(0.4844)	0.4827	(0.4837)	$S_7 \to S_1$	0.2000	(0.1173)	0.1458	(0.09894)	0.1034	(0.1024)	$S_7 \to S_9$	0.3200	(0.3200)	0.4167	(0.4167)	0.4139	(0.4139)
$S_8 \to S_0$	0.7334	(0.6632)	0.4516	(0.5137)	0.4362	(0.4673)	$S_8 \to S_1$	0.06666	(0.1369)	0.1613	(0.09913)	0.1272	(0.09618)	$S_8 \to S_{10}$	0.2000	(0.2000)	0.3871	(0.3871)	0.4365	(0.4365)
$S_9 \to S_0$	0.2500	(0.4417)	0.4000	(0.4382)	0.5276	(0.5458)	$S_9 \to S_1$	0.3750	(0.1833)	0.1500	(0.1117)	0.1111	(0.09279)	$S_9 \to S_{11}$	0.3750	(0.3750)	0.4501	(0.4501)	0.3614	(0.3614)
$S_{10} \to S_0$	0	(0)	0.3333	(0.2634)	0.3331	(0.4138)	$S_{10} \to S_1$	0	(0)	0	(0.06983)	0.2082	(0.1276)	$S_{10} \to S_{12}$	1.0000	(1.0000)	0.6667	(0.6667)	0.4587	(0.4587)
$S_{11} \to S_0$	0.3334	(0.3334)	0.3332	(0.3022)	0.3073	(0.2646)	$S_{11} \to S_1$	0	(0)	0	(0.03103)	0	(0.04279)	$S_{11} \to S_{13}$	0.6666	(0.6666)	0.6668	(0.6668)	0.6927	(0.6927)
$S_{12} \to S_0$	0.6667	(0.5690)	0.2499	(0.3051)	0.4539	(0.4942)	$S_{12} \to S_1$	0	(0.09777)	0.1250	(0.06982)	0.09078	(0.05056)	$S_{12} \to S_{14}$	0.3333	(0.3333)	0.6251	(0.6251)	0.4553	(0.4553)
$S_{13} \to S_0$	0.5001	(0.3534)	0.4998	(0.4533)	0.5546	(0.5420)	$S_{13} \to S_1$	0	(0.1467)	0	(0.04654)	0.1109	(0.1236)	$S_{13} \to S_{15}$	0.4999	(0.4999)	0.5002	(0.5002)	0.3344	(0.3344)
$S_{14} \to S_0$	0	(0)	0.5997	(0.4880)	0.5982	(0.4871)	$S_{14} \to S_1$	0	(0)	0	(0.1117)	0	(0.1111)	$S_{14} \to S_{16}$	1.0000	(1.0000)	0.4003	(0.4003)	0.4018	(0.4018)
$S_{15} \to S_0$	1.0000	(1.0000)	0.9992	(0.9070)	0.9950	(0.9076)	$S_{15} \to S_1$	0	(0)	0	(0.09305)	0	(0.09236)							
$S_{16} \to S_0$	0	(0.7067)	0.4994	(0.7206)	0.4963	(0.7215)	$S_{16} \to S_1$	1.0000	(0.2933)	0.4994	(0.2794)	0.4963	(0.2785)							

因此，如选用的样本足够长，则根据(10)式或(23)式的计算结果是可以符合于实际情况的，并且样本愈长就愈符合于实际情况．为用实际资料说明这种情况起见，这里分别用上海 20 年(1939—1958)、40 年(1919—1958)与 80 年(1879—1958) 5—9 月逐日降水资料，计算出表 1 与表 2 的结果． 在统计过程中每年 5—9 月逐日干湿日变化的序列都如上述样本那样处理，即序列的第一天固定为干日，计算干日频数时该日不计．为了使湿日序列完整，时间范围可向后伸入 4 月底或向前伸入 10 月初，不过如序列延伸太远(多于 5 日)，则该湿日序列就不计入．

在表 2 的第一与第二部分中，我们可以看出，用 20 年资料所计算的 2 阶转移概率与实际情况出入较大，尤其是有关长序列的转移概率出入更大．当样本加长时，则理论值与样本值间的出入一般逐渐变小，尤其是有关长序列的转移概率间的出入变小更多．所谓概率是极限值，所以有关长序列的转移概率，就是 80 年资料所计算的概率样本值与理论值间尚有某些出入．其次，在表 2 的第三部分中我们可以看出，2 阶转移概率的理论值与样本值都是完全一样的，这是因为这种湿日序列的转移是在单一湿日序列以内的缘故．

2 阶以上的转移矩阵也具有和上面同样情况，这里不便详细给出统计结果．一般而论，根据实际计算结果知道，转移矩阵的阶愈高，则愈需较长记录才能符合于实际情况．

总的来讲，根据实际资料的分析与检查我们可以说，根据上海 40 年资料所计算的理论值已相当接近于实际情况，其计算结果在作短、中期补充预报时，已经可用．(11)—(14)式就是根据上海 5—9 月 40 年逐日降水资料计算的．如只利用短序列的转移概率，就是 20 年资料的计算值也相当符合于实际情况．

本文计算是由马宜珍与张银珍等同志反复多次计算的．

参　考　文　献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its application, New York, 1957.
[2] Kemeny, J. G. and Snell, J. L., Finite markov chain, New York, 1960.
[3] Parzen, E., Stochastic processes, Holden-Day, Inc., 1962.

(本文于 1965 年 6 月 30 日收到，1965 年 10 月 12 日收到修改稿)