

预报方程差分格式的构造方法*

王宗皓

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

本文用差分模拟绝对涡度守恒定律,构成正压涡度方程的两类差分格式:积分守恒型格式和相当于准拉格朗日型格式。前一类型格式的显式部分是条件稳定的,隐式部分是无条件稳定的。后者全为无条件稳定的显式格式。可以依据实际需要和可能,来放大无条件稳定格式的时间步长。

本文还根据格式的计算要求,讨论了“风”场的计算和平滑问题,以及差分方程的边、初条件(计算边、初条件)的给法。并通过理想场计算和实例预报,检验了几种显式格式的计算效果。

一、引 言

从实用出发,延长正压模式特别是斜压模式的预报时限,需要节省计算量和保证计算精确。在保证一定的精确度前提下,放大时间步长是减少计算量的最好方法。检查物理定律是否满足来识别差分格式,并通过简单计算检查格式的数学误差,是保证精确度的必要途径。可以预期,微分形式模式所具有的物理属性(如能量、动量等守恒性质),必将作为选择预报方程差分格式的条件,根据物理原则,经过数学加工,构造出计算用的差分格式,必将为差分方法数值求解预报方程的基本步骤。将新差分格式首先用来计算正压模式,是检查新格式能否用计算斜压模式的重要方式。本文拟从差分模拟绝对涡度守恒定律出发,构造正压涡度方程的几种差分格式。并用理想场和个例预报计算,初步检查其中一部分格式的预报效果,目的在于说明一种构造差分格式的方法,和所得格式在实际预报中应用的可能性。

为了后面叙述的需要,把正压涡度方程及其一种等价形式写出来。如所周知,正压准无水平辐散涡度方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

(其中 $\zeta = \Delta\phi + f$, $u = -\partial\phi/\partial y$, $v = \partial\phi/\partial x$, ϕ 是流函数, f 为地转参数, Δ 为水平拉普拉斯算符)是描写流体质点绝对涡度 ζ , 沿着轨线以质点本身运动速度 (u, v) 传播的单向波动方程,也是绝对涡度守恒定律的数学表达式。若在(1)式中考虑整层辐散作用,则 ζ 代之以 $\Delta\phi + f - \sigma\phi$, 其中 σ 是常数。而且,不论 σ 为零与否,方程(1)等价于下列形式的方程:

* 本文于1965年4月30日收到,于1965年8月13日收到第一次修改稿。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_B \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_B \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

式中

$$u_B = -\frac{1}{b} \frac{\partial B}{\partial y}, \quad v_B = \frac{1}{b} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad B = \zeta + b\phi. \quad (3)$$

依据气象流场的变化特点,适当选择常数 b ,可以使得 u_B, v_B 随着时间 t 变化缓慢,接近常定值。数值预报图解法实践证明,这样选取的 B -风场,对放大计算的时间步长是有利的。

二、绝对涡度守恒定律的差分模拟

能够正确描写涡度方程(1)的物理性质的差分格式,自然是一些模拟绝对涡度守恒的格式。为导出这种格式,我们进行了下列二方面运算。

1. 对方程(1)施以面积分运算:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_v \zeta d\sigma = - \iint_v \left(\frac{\partial u \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v \zeta}{\partial y} \right) d\sigma = - \oint_l u \zeta dy - \oint_l v \zeta dx, \quad (4)$$

这里 v 是半球(或有限)范围的预报区域, l 为其周界。在适当的边界条件下,周界积分可以为零,于是得出平均层上绝对涡度之和为常量,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_v \zeta d\sigma = 0. \quad (5)$$

将 v 分成相等的正方形(不必一定要正方形,矩形也可以,如图1所示)小区域之和 $\sum v_i$, 相应 v_i 的周界记为 l_i ; 将时间区间也分成若干相等的小区间 (t_{j-1}, t_j, t_{j+1}) 。于是(4)式可写成为:

$$\sum_{i,j} \iint_{v_i}^{t_{j+1}} \zeta d\sigma - \sum_{i,j} \iint_{v_i}^{t_{j-1}} \zeta d\sigma = - \sum_{i,j} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \left\{ \oint_{l_i} u \zeta dy + \oint_{l_i} v \zeta dx \right\} dt.$$

由此式看出,在每个 v_i 及 (t_{j-1}, t_{j+1}) 上,右边周界积分近似求积之后,如能保证出入 l_i 的涡度输送量保持抵消,没有涡度的净增或净减,则在 v 上求和之后,利用 l 上的边界条件,(5)式一定能够近似满足:

$$\sum_{i,j} \iint_{v_i}^{t_{j+1}} \zeta d\sigma - \sum_{i,j} \iint_{v_i}^{t_{j-1}} \zeta d\sigma = 0.$$

因而,可以近似积分下式,来构造保持涡度守恒的差分格式:

$$\iint_{v_i}^{t_{j+1}} \zeta d\sigma - \iint_{v_i}^{t_{j-1}} \zeta d\sigma = - \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \left\{ \oint_{l_i} u \zeta dy + \oint_{l_i} v \zeta dx \right\} dt. \quad (6)$$

从(6)式,可以得出逼近(1)式的若干种显式和隐式差分格式。比如在积分号下取平均值,可以得到:

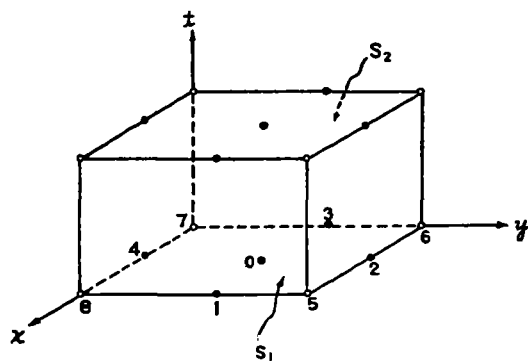


图 1

$$\zeta_0^{j+1} = \zeta_0^{j-1} - \frac{\tau}{h} \{(\nu \zeta)_1^j - (\nu \zeta)_3^j + (\nu \zeta)_2^j - (\nu \zeta)_4^j\}. \quad (7)$$

$$A_0 = \frac{1}{2}(\lambda - m)(\lambda - m + 1); \quad A_1 = -(\lambda - m + 1)(\lambda - m - 1);$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(\lambda - m - 1)(\lambda - m), \quad m < |\lambda| < m + 1,$$

$$B_0 = \frac{1}{2}(\eta - n + 1)(\eta - n); \quad B_1 = -(\eta - n + 1)(\eta - n - 1);$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(\eta - n - 1)(\eta - n), \quad n < |\eta| < n + 1.$$

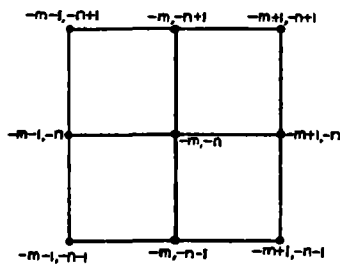


图 3

式中下角数字见图 3 所示的格点位置。

由以上所述,我们构造出了模拟绝对涡度守恒的两类格式。公式(7)和(8)称为积分守恒型格式。这类格式也可以通过积分运算 $\iiint () dx dy dt$ 后,再应用高斯公式而近似求积得出。公式(10)和(12)称为准拉格朗日型格式。这类格式可以依计算点上 u, v 的变化,自动调整取数点 (m, n) 的位置,使得计算稳定,因而均为无条件稳定格式。这种格式在有分离整数位指定的电子计算机(如 104 机器)上实现是很方便的。

三、风速计算和平滑

前面给出的公式(10)–(12)均可适当地放大时间步长,而不会引起计算的不稳定。但因质点运动的轨线并非直线,且沿着轨线的移动速度也不一定是固定不变的,只有在 τ 很小的情况下,轨线和移动速度变化所产生的误差才能忽略不计。这对采用较大时间步长作计算,必然会引起较大的计算误差。要在放大时间步长的同时,保证一定的计算精确度,看来引用 B -风场(或类似的风场)是必需的。为了说明引用 B -风场的重要性,首先讨论理想的 B -风场。

当 $f = \beta y + f_0$, f_0 为常数,方程(1)有单波解:

$$\begin{aligned} \psi &= -Uy + A \cos(\mu(x - ct) + \nu y), \\ C &= U - \beta/(\mu^2 + \nu^2). \end{aligned} \quad (13)$$

由此引出

$$B = \Delta\psi + \beta y + b\psi + f_0. \quad (14)$$

如欲 B 随时间变化是时间步长的二阶小量,可以从下式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = (b - \mu^2 - \nu^2)A\mu C \cdot \sin(\mu(x - Ct) + \nu y)$$

定出

$$\begin{cases} b = \mu^2 + \nu^2, \\ B = [\beta - (\mu^2 + \nu^2)U]y + f_0. \end{cases} \quad (15)$$

如此,对于理想场(13)式,得出方程(2)中的 B -风分量为:

$$\begin{cases} u_B = -\frac{1}{b} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{b}(\beta - (\mu^2 + \nu^2)U) = C, \\ v_B = 0. \end{cases} \quad (16)$$

这样,方程(2)对于理想场(13)变成以速度 $u_B = C$ 传播的单向波方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + C \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

式中 $\zeta = -A(\mu^2 + \nu^2) \cos[\mu(x - Ct) + \nu y] + \beta y$. 由此看出,对一定的流场适当选定 b 值,而引出 B -风场(或类似的风场)可以把二维非线性方程(1)简化成为等价的常系数线性方程,使问题简单化. 再来进一步分析选择常数 b 的实际效果,一般地由(3)式可以得到:

$$\begin{aligned} u_B &= -\frac{1}{b} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{1}{b} \left(\Delta \frac{\partial \phi}{\partial y} + b \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ v_B &= \frac{1}{b} \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{b} \left(\Delta \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

此二式中的拉普拉斯算符用正方形格网的五点差分格式代替,取 $b = 4/h^2$,则 u_B, v_B 等于四点上的 u, v 之平均值加 f 的微商项:

$$\begin{cases} u_B \cong -\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_i + \frac{h^2}{4} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 u_i + \frac{h^2}{4} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ v_B \cong \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{4} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 v_i + \frac{h^2}{4} \frac{\partial f}{\partial x}, \end{cases} \quad (19)$$

下角“ i ”见图1中所示的格点位置. 此式类似于文献[2]中用 $\bar{\phi} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \phi_i$ 计算 u^* 及 v^* . 对于实际流场如何有效地选取 b 值,使得 u_B 及 v_B 在每个时间步长之内接近常定值,而又能保证格式的守恒性质,是比较难做到的. 但从(19)式可以看出,用平滑(或平均)算子处理风场,对计算是有利的. 应用格式(10)和(11)式于实例预报,为了减小计算误差,除了采用类似如 u_B, v_B 的风场之外,还可以通过下述方式提高计算的精确度^[3]. 首先用 $u(t), v(t)$ 算出 $\zeta'(t + \tau)$,求 $\phi'(t + \tau)$,计算出相应的风速分量:

$$u'(t + \tau) = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad v'(t + \tau) = \frac{\partial \phi'}{\partial x}.$$

然后,由风场

$$\bar{u} = \frac{1}{2} [u(t) + u'(t + \tau)], \quad \bar{v} = \frac{1}{2} [v(t) + v'(t + \tau)]$$

算出涡度场,求出需要的 $\phi(t + \tau)$.

四、边界条件和边值误差的影响

要保证绝对涡度守恒,不仅对时间空间差分格式有限制,而边界条件的给法不适当,也可以破坏守恒性. 处理边界值我们还未得出完全肯定的方法. 这里只叙述应用格式(7),(10)–(12)来制作24小时实例预报和理想场计算的经验结果,这些结果对进一步研究边值处理方法,和解释实际计算中出现的边界值误差现象,可能有参考意义.

用 I_m, II_m 表示格式(10)和(12)应用到一维方程的形式,用 $III^{(1)}$ 表示普通时间空间一维中央差分格式. 取 $\zeta(x, 0) = \cos \mu x$, 这里 $\mu = 2\pi/3000$ 千米, $h = 300$ 千米. 用这三种格式计算方程(17)的下列流入边界值问题的数值解:

1. 固定边界值 $\zeta_i^j = \zeta(x, 0)$,

2. 外推边界值 $\zeta_i^j = \zeta(x, t_j)|_{r-1}$,

式中 $r-1$ 表示边界内一圈的格点, I_m , II_m 的计算结果分别给在图 4 和 5 中, $III^{(1)}$ 的计算结果和 II_m 类似, 图从略。由图中可以看出不同差分格式, 对同样的边界条件, 边值

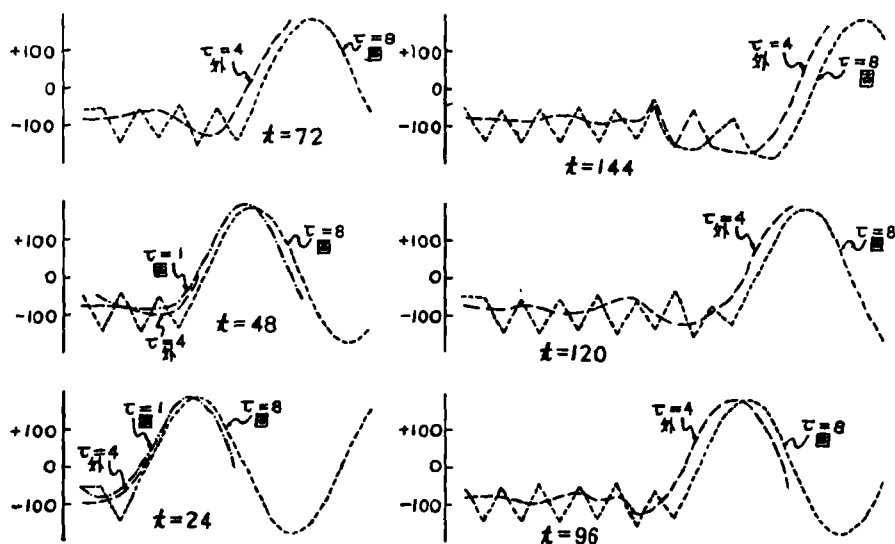


图 4 用 I_m 计算

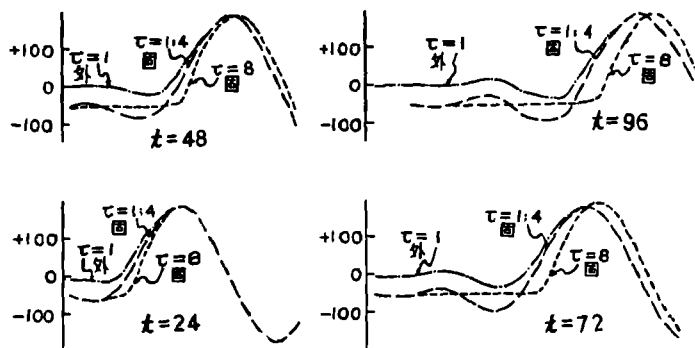


图 5 用 II_m 计算

误差影响的情况不尽相同。当时间步长减小, 边值误差影响没有得到明显改善, 影响范围仍然随着预报时限延长而扩大, 只是结果的分布曲线稍许光滑性。图中的边界点刚好位于余弦波的波谷深处, 因此, 使得边界点的下游波峰被削平。从此不难推测出, 在作实例预报时, 若上游边界位于低(高)压区, 则在边界之下的高(低)压, 必将被边界误差所减弱(堵塞)。这是在亚欧范围制作预报时常见的现象。在北半球范围的预报计算中, 也可以找到这种例子。

制作实例预报, 要用边界条件 $\partial H / \partial t = 0$ (H 表示高度) 和 $\zeta, u\zeta$ 等的边界条件, 后者由格式而定。应用格式(7)时, 以用边条件 $\partial u\zeta / \partial n = \partial v\zeta / \partial n = 0$ 的效果最好。这里 n 表示边界外法线方向, 好的原因可能与这种格式本身包含有广义解而要求固壁边条件有

关。应用格式(10)一(12)作实例预报,流出处 ζ 的边界条件不需要给出,可由格式本身算出边界值。这类格式对流入边条件误差比较敏感,这就是用前述理想场试验流入边条件误差的理由。对格式(10)采用固定流入处的边条件处理方法。当时间步长较长,法向速度较大时,除固定边界点上的 ζ 值之外,还需要固定几个内点上的 ζ 值。点数由 $\frac{\tau v_n}{h}$ 的大小确定。这可以依法向速度 v_n 的数值大小,用程序控制机器自动处理。预报结果表明这种处理边值的方法是可行的。

五、格式性能的数值检验

在第二节中,从模拟绝对涡度守恒出发,构造了几种差分格式,这些格式的性能如何,还需要用其他方法(如数值计算)进行检查。单凭差分格式模拟物理定律,不能完全保证格式的计算性能一定好。因为在作差分模拟时,多少还带有一些任意性,下面叙述数值检查结果。

1. 理想场计算。这里主要检查格式(7)和(10)一(12)的稳定性和精确度。格式(7)的线性化形式和普通中央差分 $III^{(1)}$ 完全一样;只有计算非线性方程(1)才能检查(7)的稳定性和精确度。为此,用 $t=0$,和 $t=-1$ 的(18)式作初始值,并由微分(13)式算得 u , v ;用 $\tau=1$ 小时, $h=300$ 千米,波长取为3000千米,用(7)和普通中央差分二维格式(以 III' 表示)计算方程(1)的初值问题。由计算结果(图6)比较看出,格式(7)是稳定的,而且精确度比 III' 高,计算时限愈长,两者的精确度差别愈大。由这里的简单计算结果,似乎可以看出格式(7)对非线性计算误差有一定的抑制能力。图6中 $\langle 0 \rangle$ 表示准确解(2.10)表示用文献[1]中的公式(28),(27)计算结果,(2.3)表示用本文的格式(7)所算出的结果。格式(10)一(12)可由计算线性方程(17)来检查。格式(11)的线性化形式和(10)式完全一样。用 $\zeta(x, 0) = \cos \mu x$ 作初值,计算检查结果给在表1中,其中 Δ 表示振幅,

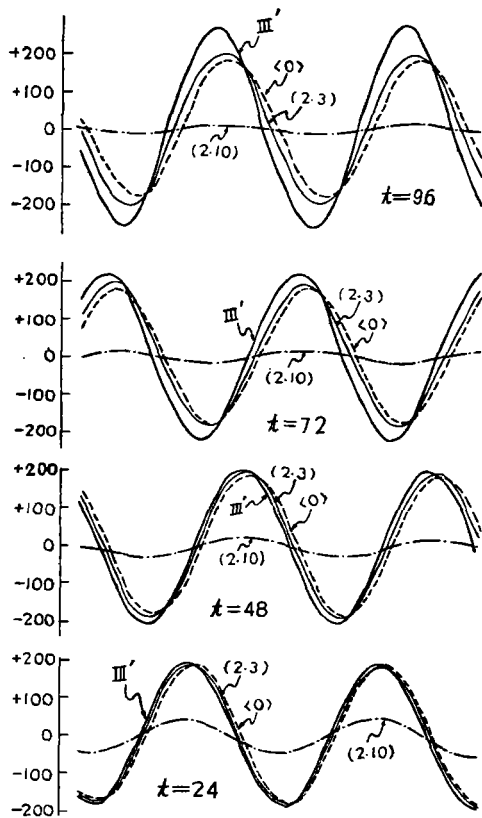


图 6

φ 表示位相。 $\tau \cdot C/h$ 表示稳定性条件, $\mu C \cdot \tau$ 为准确位相。为了比较在表中还给出 $III^{(1)}$ 的检查数据。由表中可见, I_m , II_m 是无条件稳定的,而且时间步长愈长,振幅和位相的精确度愈高。 I_m 的位相精确度较高,但振幅值严重偏低。 $III^{(1)}$ 的位相精确度最低,振幅值的精确度也不及 II_m 的精确度。比较看出,以格式 II_m 的计算性能最好。

2. 个例预报。选用1958年1月27日00时欧洲沿岸500毫巴高空阻塞形势发展作

为试报的个例。预报范围为 24×20 个格点, 格宽 400 千米, 时间步长取一小时, 用预报准确率 γ 、均方误差 Q 和相关系数 C 作为检查数据(表 2)。表中只给出格式(7)、格式 III' 和文献[1]中的公式(28)、(27)的预报检查数据。其余的格式试报结果尚需作进一步试报检验, 这里暂略。从表 2 中可以看出, 格式(7)的试报结果较好, 有可能在实际预报中应用。也可以看出, 文献[1]中的公式(28)和(27)预报意义不大。

表 1 振幅 A 和位相 φ 随 m 的变化
(其中 $C = 10.267$ 米/秒 $h = 300$ 千米, $\mu = 2\pi/3000$ 千米)

格 式	m	$m=0$			$m=1$		$m=2$	单 位
	τ	$\tau=1$	$\tau=4$	$\tau=8$	$\tau=9$	$\tau=16$	$\tau=17$	小 时
I_m	A	0.9792	0.9511	0.9973	0.9813	0.9947	0.9836	米
	φ	0.0770	0.3072	0.6196	0.6944	1.2318	1.3123	弧 度
II_m	A	0.9997	0.9966	0.9995	0.9999	0.9992	0.9990	米
	φ	0.0734	0.2950	0.6178	0.6919	1.2345	1.3122	弧 度
III'	A	0.9994	0.9913	0.9988				米
	φ	0.0681	0.2810	0.6178				弧 度
	$\mu C \cdot \tau$	0.0774	0.3099	0.6199	0.6973	1.2385	1.3169	弧 度
	$\frac{\tau \cdot C}{h}$	0.1232	0.4928	0.9856	1.1088	1.9713	2.0945	

表 2

格 式	准确率 γ	均方误差 Q (十米)	相关系数 C	边 界 值 处 理 方 法
格式(7)	60.2%	5.88	0.81	$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$
格式 III'	56.2%	5.86	0.79	
文献[1]中(28)和(27)	30.8%	8.61	0.64	
格式(7)	72.8%	4.22	0.86	$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{\partial u \xi}{\partial n} = \frac{\partial v \xi}{\partial n} = 0$

本文的主要计算结果, 在 1963 年全国计算技术经验交流会议上报告过, 在会上听取了许多宝贵意见; 廖洞贤同志对本文定稿也提了宝贵意见, 文中附图是刘元状同志代绘, 作者在此均表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Forsythe, G. E., Wasow, W. R., Finite-Difference Methods for Differential Equations, 1960.
- [2] Fjærtoft, R., *Tellus*, **3** (1952).
- [3] Sawyer, J. S., *Tellus*, **4** (1963).

ON THE METHOD OF SETTING UP DIFFERENCE SCHEME FOR THE WEATHER FORECASTING EQUATION

WANG CHUNG-HAO

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

The two types of difference schemes, the integrated conservative type and the equivalent semi-Lagrangian type, based on the analogue to the principle of conservation of the absolute vorticity by the finite difference, are presented. In the first type, the explicit scheme is conditionally stable and the implicit scheme non-conditionally stable. The second type is the non-conditionally stable explicit scheme. As a numerical test of the present schemes, equations (7), centred finite difference (III') and (28, 27) in the [1] were used in solving geostrophic barotropic model. Table 2 shows the examples of the calculate results.