第34卷 第2期　　气 象 学 报　　Vol. 34, No. 2
1964 年 5 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　May, 1964

砧状积雨云发展的一个动力学分析*

李兴生　巢紀平　　胡隐樵
（中国科学院地球物理研究所）（北京大学地球物理系）

提　　要

本文在考虑了水汽凝結的反饋影响后，用近似方法求出了积云动力学方程組的解．对解的一个数值計算表明：积云强烈的发展最后必然会使云頂出現砧状結构，从而发展成砧状积雨云．

一、引　　言

观測表明，一块发展完整的对流云的生命史可以达 1—2 小时．当它发展到成熟阶段时，經常成为云頂有砧状結构的积雨云，強的积雨云一般都有強的陣性降水以及其他一些較为严重的天气現象．

近几年来，关于云泡和个体积云发展的动力学研究不少．如巢紀平[1]討論了在层結大气中，地面加热触发下热对流的发展問題．Malkus[2]、周晓平[3]和 Lilly[4] 用电子計算机对对流泡的发展、演变作了数值試驗．在这些工作中，大气层結是作为参数給定的，还沒有考虑水汽凝結潛热的释放对积云发展的影响．在另一方面，Haltiner[5] 应用一維定常模式考虑了水汽的影响，由于模式的限制，从这一工作只能对积云发展中期的垂直結构和強度有一定的了解，而不能了解积云的发展过程．最近，Squires[6] 等作了进一步的考虑后，討論了积雨云的形成問題．不过，問題实質上仍然是一維的．另外，Гутман[7] 曾給定过二維情况下常定对流的解，并討論了积雨云形成的原因．总的看来，到目前为止，研究积云的发展，特别是很好地考虑水汽凝結对积云的发展、演变的影响还是很不够的，有必要作进一步的研究．本文将在考虑了水汽凝結作用的基础上来研究积雨云发展的动力学过程．

二、基本方程組

在軸对称圓柱坐标系中，描写积云发展的运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p}{\partial r}+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p}{\partial z}+k\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\beta\vartheta. \tag{2}$$

連續性方程为

$$\frac{\partial ur}{\partial r}+\frac{\partial wr}{\partial z}=0. \tag{3}$$

* 本文 1963 年 9 月 11 日收到．

在以上方程中，t, r, z 分别为时間、經向和垂直坐标；u, w, ϑ, p 分别为水平速度、垂直速度、温度和气压的扰动量；k 为大气的湍流扩散系数；$\beta = g/\bar{\vartheta}$，其中 g 为重力加速度，$\bar{\vartheta}$ 为大气平均温度；$\bar{\rho}$ 为大气平均密度。

考虑了凝結潛热后的热流入量方程为

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -(\gamma_a - \gamma(z))w + k\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \delta\frac{L}{c_p}T\frac{d}{dt}\left(\frac{q_{\max}}{T}\right), \tag{4}$$

式中 L 为水汽凝結潛热，T 为大气絕对温度，γ_a 为干絕热递減率，$\gamma(z)$ 为大气温度分布的垂直递減率，$q_{\max}$ 为飽和比湿，并成立下面关系式

$$q_{\max} = 0.622\frac{e_{\max}}{P}, \tag{5}$$

其中 P 为大气总的气压，$e_{\max}$ 为飽和水汽压，它由 Magnus 公式决定[8]

$$e_{\max} = 6.10 \times 10^{\frac{7.45(T-273)}{T-38}}. \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 式可得

$$q_{\max} = \frac{3.80}{P}\exp\left[\frac{17.13(T-273)}{T-38}\right]. \tag{7}$$

应用 (7) 式并假定 $\frac{dp}{dt} \approx -\rho g w$，則 (4) 式可写成

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -a(z)w + k\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \tag{8}$$

其中

$$a(z) = \begin{cases} \gamma_a - \gamma(z), & \text{当 } q < q_{\max} \\ \gamma_b(T、P) - \gamma(z). & q \geqslant q_{\max} \end{cases} \tag{9}$$

而 γ_b 是湿絕热递減率，为

$$\gamma_b = \gamma_a \frac{1 + \frac{L}{c_p}\frac{K}{K-1}\frac{q_{\max}}{T}}{1 + \left(\frac{L}{RT} - 1\right)\frac{L}{c_p}\frac{q_{\max}}{T}}, \tag{10}$$

式中 $K = c_p/c_v$, c_p, c_v 分别为空气的定压和定容比热，R 为空气的气体常数。

为了考虑水汽和运动的相互影响，必須有水汽輸送方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial r} + w\frac{\partial q}{\partial z} + w\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = k\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \delta T\frac{d}{dt}\left(\frac{q_{\max}}{T}\right), \tag{11}$$

其中 q 为比湿，单位是克/千克；$\bar{q}$ 是大气平均比湿；而

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{当 } q < q_{\max} \\ 1. & q \geqslant q_{\max} \end{cases} \tag{12}$$

应用方程 (4) 和公式 (7)，則方程 (11) 可变成

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial r} + w\frac{\partial q}{\partial z} + w\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = k\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \delta C q_{\max} w, \tag{13}$$

其中

$$C = \frac{g}{RT} + \left[\frac{4026}{(T-38)^2} - \frac{1}{T}\right]\gamma_b. \tag{14}$$

现在，方程 (1)、(2)、(3)、(8)、(13)、(7) 及 (10) 对变量 u, w, ϑ, p, q, $q_{\max}$ 和 γ_b 构成闭合方程組.

初始条件及边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&t=0, && u=w=\vartheta=p=q=0;\\
&z=0, && w=0,\quad \vartheta=\Delta\vartheta_0 f(r,t),\quad q=0;\\
&z\to\infty, && w=\vartheta=p=q=0;\\
&r=0, && u=\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial\vartheta}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial q}{\partial r}=0;\\
&r^2\to\infty, && w=\vartheta=p=q=0.
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

我們指出，在以上有关的方程組中略去了水平湍流扩散項，因为考虑到在下垫面热量必需靠湍流向上传輸，因此保留了垂直湍流交换項.

引进无因次量

$$t'=\frac{k}{L_0^2}t,\quad r'=\frac{1}{L_0}r,\quad z'=\frac{1}{L_0}z,\quad u'=\frac{L_0}{k}u,$$

$$w'=\frac{L_0}{k}w,\quad \vartheta'=\frac{1}{\Delta\vartheta_0}\vartheta,\quad p'=\frac{L_0^2}{\bar{\rho}k^2}p,\quad q'=q,$$

式中 L_0 为加热源的水平尺度，$\Delta\vartheta_0$ 为热源強度. 以上的方程組可写成如下无因次形式

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial r'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}=-\frac{\partial p'}{\partial r'}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2},\tag{16}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t'}+u'\frac{\partial w'}{\partial r'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}=\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}+G\vartheta',\tag{17}$$

$$\frac{\partial u'r'}{\partial r'}+\frac{\partial w'r'}{\partial z'}=0,\tag{18}$$

$$\frac{\partial\vartheta'}{\partial t'}+u'\frac{\partial\vartheta'}{\partial r'}+w'\frac{\partial\vartheta'}{\partial z'}=(F_i+f_i)w'+\frac{\partial^2\vartheta'}{\partial z'^2},\tag{19}$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t'}+u'\frac{\partial q'}{\partial r'}+w'\frac{\partial q'}{\partial z'}=-\left(\frac{\partial\bar{q}}{\partial z'}+\delta C_i q'_{\max}\right)w'+\frac{\partial^2 q'}{\partial z'^2},\tag{20}$$

其中无因次参量为

$$G=\beta\Delta\vartheta_0 L_0^3/k^2,\qquad F_i=(\gamma-\gamma_a)L_0/\Delta\vartheta_0,$$

$$f_i=(\gamma_a-\gamma_b)L_0/\Delta\vartheta_0,\quad C_i=CL_0.$$

无因次初始条件及边界条件

$$\left.\begin{aligned}
&t'=0, && u'=w'=\vartheta'=p'=q'=0,\\
&z'=0, && w'=0,\quad \vartheta'=f(r',t'),\quad q'=0,\\
&z'\to\infty, && w'=\vartheta'=p'=q'=0,\\
&r'=0, && u'=\frac{\partial w'}{\partial r'}=\frac{\partial\vartheta'}{\partial r'}=\frac{\partial p'}{\partial r'}=\frac{\partial q'}{\partial r'}=0,\\
&r'^2\to\infty, && w'=\vartheta'=p'=q'=0.
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

在方程 (17) 中与文献 [1] 一样略去了垂直气压梯度力項.

三、方程的解法

可以看出，由于引进了凝結潛热后，增加了方程組求解的困难，这是因为，一方面凝結潛热的释放有不連續函数的性質；另一方面 (7)、(10)、(14) 式又是超越代数方程。为了能够求解，我們作了这样的近似：在求解时，把 γ_b, C 作为常数看待，对解作数值計算时，則又把它們看作是时間和空間的可变参数。

作了以上近似处理后，我們来求方程組(16)—(20)在条件(21)的解，将地面热源展成

$$f(r', t') = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r') t'^{\frac{n+1}{2}},$$

引进变换

$$s = \frac{z'}{2\sqrt{t'}}, \tag{22}$$

并取下面形式的解

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' &= \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(r', s) t'^{\frac{n+1}{2}}, \quad p' = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(r', s) t'^{\frac{n}{2}}, \\ u' &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r', s) t'^{\frac{n+2}{2}}, \quad w' = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r', s) t'^{\frac{n+3}{2}}, \\ q' &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(r', s) t'^{\frac{n+5}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

将 (23) 式代入方程 (16)—(20) 后，得

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1}(\vartheta_n) = &-4(F_i + f_i) w_{n-4} + 4\left(u_0 \frac{\partial \vartheta_{n-4}}{\partial r'} + \cdots + u_{n-4} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r'}\right) + \\ &+ 2\left(w_0 \frac{\partial \vartheta_{n-4}}{\partial s} + \cdots + w_{n-4} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial s}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+3}(w_n) = &-4G\vartheta_n + 4\left(u_0 \frac{\partial w_{n-4}}{\partial r'} + \cdots + u_{n-4} \frac{\partial w_0}{\partial r'}\right) + 2\left(w_0 \frac{\partial w_{n-4}}{\partial s} + \right. \\ &\left. + \cdots + w_{n-4} \frac{\partial w_0}{\partial s}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{\partial u_n r'}{\partial r'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial w_n r'}{\partial s}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+5}(q_n) = &4\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial s} + \delta C_i q_{\max}\right) w_n + \\ &+ 4\left(u_0 \frac{\partial q_{n-4}}{\partial r'} + \cdots + u_{n-4} \frac{\partial q_0}{\partial r'}\right) + \\ &+ 2\left(w_0 \frac{\partial q_{n-4}}{\partial s} + \cdots + w_{n-4} \frac{\partial q_0}{\partial s}\right), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_n}{\partial r'} = &\frac{1}{4} \Lambda_{n+2}(u_n) - \left(u_0 \frac{\partial u_{n-4}}{\partial r} + \cdots + u_{n-4} \frac{\partial u_0}{\partial r}\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(w_0 \frac{\partial u_{n-4}}{\partial s} + \cdots + w_{n-4} \frac{\partial u_0}{\partial s}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $n=0$、1、2、$\cdots$，算符 Λ_m 为：

$$\Lambda_m=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+2s\frac{\partial}{\partial s}-2m.$$

初始条件及边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}
&t'=0, \quad u_n=w_n=\pi_n=\vartheta_n=q_n=0;\\
&s=0, \quad w_n=0, \quad \vartheta_n=f_n(r'), \quad q_n=0;\\
&s\to\infty, \quad w_n=\vartheta_n=\pi_n=q_n=0;\\
&r'=0, \quad u_n=\frac{\partial w_n}{\partial r'}=\frac{\partial\vartheta_n}{\partial r'}=\frac{\partial\pi_n}{\partial r'}=\frac{\partial q_n}{\partial r'}=0;\\
&r'^2\to\infty, \quad w_n=\vartheta_n=\pi_n=q_n=0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

当 $n\leqslant 7$ 时，方程 (24)—(28) 滿足条件 (29) 的解可以采用 Мхитарян[9] 和 Зейтунян[10] 的方法方便地求得，解法見文献 [1].

我們可以清楚地看到，在方程 (24) 式右端各項中，对于任何一个 n，其中一部分是与水汽凝結直接有关的項；一部分是与水汽凝結沒有直接关系的項，由于方程是綫性的，因此可以将解分成二部分組成，而形式地写成

$$\vartheta_n=\vartheta_d+\vartheta_c. \tag{30}$$

其中 ϑ_d 是沒有凝結的干对流解，ϑ_c 是凝結发生后的反饋作用.

同理，方程 (25)—(28) 的解 w, u, q, p 同样可由两部分組成.

現在，我們采用下面的方法来計算这一組解的水汽凝結作用，首先給出大气的平均比湿場 $\bar{q}(z)$，这样当凝結发生前，方程 (24) 中 $f_i=0$，(27) 式中 $\delta=0$，由此可以算出扰动比湿場 $q(r', s)$ 及空間各点的飽和比湿 $q_{\max}$，然后比較各点的

$$q^*(r', s)=\bar{q}(s)+q(r', s) \text{ 及 } q_{\max},$$

倘使滿足条件

$$q^*\geqslant q_{\max} \text{ 和 } w\geqslant 0, \tag{31}$$

那么該点开始凝結. 如果凝結起始时刻为 t'_s，那么在 t'_{s+1} 时問題的解可近似地写成(以温度为例)

$$\begin{aligned}
\vartheta(r', s, t'_{s+1})&=\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_n(r', s)t'^{\frac{n+1}{2}}=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_{dn}(r', s)t'^{\frac{n+1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_{cn}(r', s)(t'_{s+1}-t'_s)^{\frac{n+1}{2}},
\end{aligned} \tag{32}$$

上式右端第一項为干对流的解，第二項是那些与凝結有关的項，即 t'_s 时刻产生的凝結对 t'_{s+1} 时的作用，由于凝結是从时刻 t'_s 开始的，因此到 t'_{s+1} 时凝結过程的总时間应該为 $(t'_{s+1}-t'_s)$. 在凝結发生以前，方程的解应該只有第一項. 值得指出，因这种实質上相当于时間向前差分的方法考虑凝結的影响时，只有当 $\Delta t'=t'_{s+1}-t'_s$ 很小时才能够得到比較好的精确度.

四、一个积雨云形成、发展的例子

在数值計算时，我們取地面加热函数的形式为

$$f(r', t')=t'^{\frac{3}{2}}e^{-r'^2}.$$

在实例中取无量綱参数为：

$$G = 426, \quad F_i = -0.5,$$

或相当于各特征量为：

$$k = 5 \times 10^2 \text{米}^2/\text{秒}, \quad \gamma - \gamma_s = -0.1℃/\text{公里},$$

$$\Delta\vartheta_0 = 0.4℃, \quad L_0 = 2 \times 10^3 \text{米},$$

$$\tau = 8 \times 10^3 \text{秒}, \quad V = 0.25 \text{米/秒}.$$

我們取地面温度为 $T_0 = 30℃$，平均湿度場的相对湿度整层为 85%，时間步长取 $\Delta t' = 0.1$。在这一例中的层結是接近中性的。

計算进行到 1 小时零 7 分鈡，結果如下：

在加热 13 分鈡后（图 1），对流高度达 3 公里，低层为輻合气流，高层为輻散气流，最大的垂直速度在 0.5 公里为 0.37 米/秒；温度場整层为正，从地面向上递減；湿度場与初始平均場比較变化不大，相对湿度最大在 0.5 公里处为 88%。

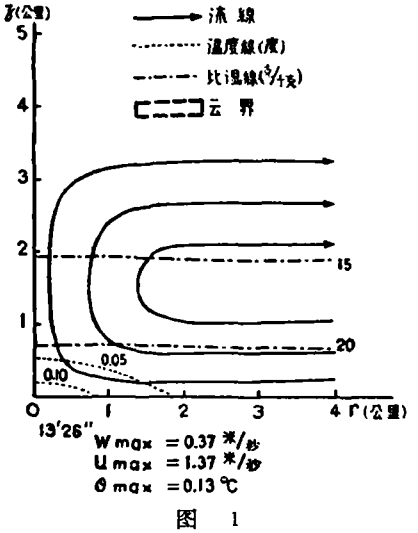

图 1

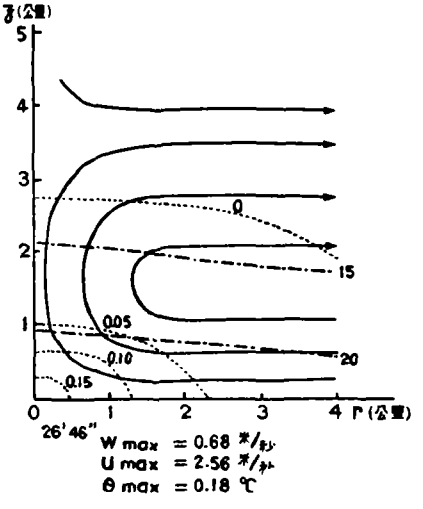

图 2

到 27 分鈡时（图 2），对流高度达 4.5 公里，低层为輻合气流，中层为輻散气流，在 4 公里以上出現补偿性下沉气流，最大上升速度在 0.72 公里为 0.68 米/秒；温度場在 2.7 公里以下为正，由地面向上递減，再往上为負；最大相对湿度在 0.7—1.7 公里处达 91%。

到 40 分鈡时（图 3），对流高度已达 5 公里，相对湿度場有显著变化，已形成寬 1.5 公里、厚 2 公里的积云（以相对湿度 100% 为云界），云頂高度为 2.8 公里，云成塔状。这时不仅在 4 公里以上为下沉气流，同时在中层輻散气流边緣也出現了下沉气流，低层仍为輻合气流，最大上升速度在 0.87 公里为 1.33 米/秒；温度梯度逐漸增大，負温区降低。

54 分鈡时（图 4），由于水汽凝結潛热的释放，使整个图象发生了显著的变化。此时积云逐漸进入成熟阶段，云頂向二側扩展成砧状的积雨云，云頂达 3.2 公里，云側产生系統性的补偿性下沉气流，整个流場已成閉合环流，最大上升速度迅速增強，有显著的"跃变"，在高度 1 公里处达 5.32 米/秒。同时很有意思，由于低层有冷空气从四側向中軸部切入，温度場成"蘑菇状"，且被切成两个中心，一个中心是地面的加热源，另一个中心主要是由

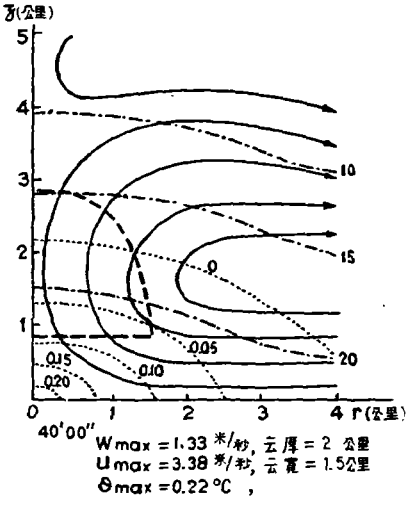

图　3

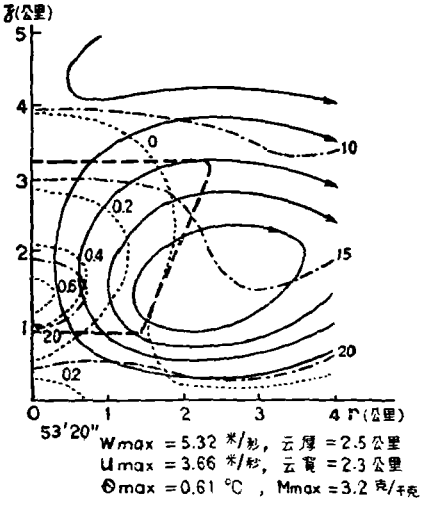

图　4

于水汽凝結潛热释放而形成的，其高度与最大垂直速度的位置接近，最高温度中心为 0.61 度，为該时地面加热温度的 2.44 倍．同样，湿度場也具有温度場那样的結构．在这时新凝結出来的液态水量的最大值 M_{max} 为 3.2 克/千克．

当发展到 1 小时零 7 分鈡时(图 5)，云頂高达 4 公里，砧状加強，最大垂直速度、温度中心到达 1.33 公里，中心強度分别发展到 8.30 米/秒、0.96 度，凝結出来的液态水量为 6.4 克/千克．

我們指出，如果在 54 分鈡时不計水汽凝結潛热的作用，那么最大垂直速度只有 1.67 米/秒；温度場不再出現两个中心，其分布仍然是从地面向上递減，最大温度中心在地面，中心为 0.25 度．1 小时零 7 分鈡时不計凝結潛热作用后，最大垂直速度只有 1.89 米/秒，温度分布与 54 分鈡相似，最高温度中心仍在地面，中心为 0.28 度．

由此可見，水汽凝結释放出来的潛热对积云发展是极为重要的，是积云发展強盛和持續的必要能源．

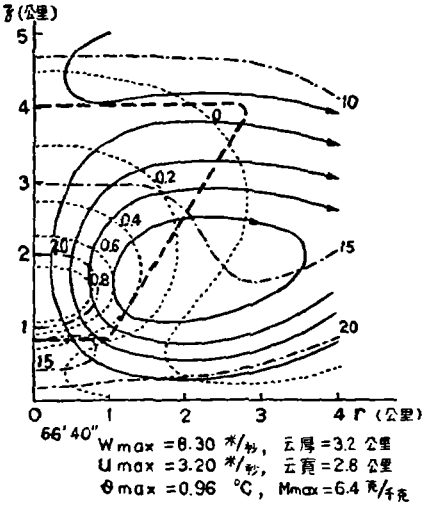

图　5

以上的計算結果中，因为凝結作用采用了时間的差分方法以及空間逐点訂正的方法，因此，水汽凝結所起的作用还偏小一些，垂直速度、温度、湿度中心值的位置也偏低了一些．

五、关于砧状积雨云形成机制的討論

积雨云是积云发展的最高阶段，由于云发展成积雨云后一般会产生較大的降水，因此分析一下作为积雨云一种形式的砧状积雨云的形成机制是有意义的．

根据現在的計算，砧状积雨云的形成过程如下：在对流发展的过程中，上升气流不断把水汽抬升，当到达凝結高度时，水汽凝結，潛热的释放大大地加大了云中的垂直速度。由于上升速度的加剧，要求低层有大量質量流入，同时造成上层大量質量的"堆积"，为了滿足質量連續性和动力学的要求，上层輻散气流也必然不断加強。于是，云頂向两側扩展而成砧状。

由此可見，积云能否发展成砧状积雨云，一方面决定于层結、湿度等环境条件，因为环境条件在一定程度上决定了对流的強度；另一方面，也决定于对流发展本身的动力学过程。

因此，象 Гутман 把砧状結构的出現单独归之为逆温层的抑制作用，看来并不是砧状积雨云形成的一个較普遍的机制。事实上在現在的計算中以及 Squires 等的計算中，环境并不存在逆温，而砧状同样形成。

最后，也值得指出，由于在現在的計算中，水平湍流扩散項是省略掉的。所以云頂向两側延展而呈砧状的原因，显然不一定与水平湍流的作用有关。

致謝：作者对周晓平同志提出的很多宝貴意見表示感謝。

参 考 文 献

[1] 巢紀平，气象学报，**31** (1961)，191—204.
[2] Malkus, J. S. and Witt, G., The Atmosphere and sea in motion, New York, Rockefeller Institute press, 1959, 425—439.
[3] 周晓平，*ИАН, СССР, Сер. Геофиз*, 1962, 548—557.
[4] Lilly, D. K., *Tellus*, **14** (1962), 148—172.
[5] Haltiner, G. J., *Tellus*, **11** (1959), 4—15.
[6] Squires, P. and Juruer, J. S., *Tellus*, **14** (1962), 422—434.
[7] Гутман, Л. Н., *ИАН, СССР, Сер. Геофиз*. 1961, 1040—1057.
[8] И. А. 基别尔著，短期天气預报的流体力学方法引論（中譯本）§ 1.5，科学出版社，1959 年.
[9] Мхитарян, А. М., Дан. Армяской ССР, 19 (2) 1954, 33—40.
[10] Зейтунян. Х. Н., *Док. АН СССР*, **133** (1960), 1319—1322.

A DYNAMICAL ANALYSIS OF DEVELOPMENT OF THE CUMULO NIMBUS INCUS

LI SHING-SHENG CHAO JIH-PING
(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

HWU YIIN-CHYAU
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, the development of the cumulonimbus incus is investigated by means of an approximate solution of the non-linear differential equations of cumulus dynamics in which the latent heat of condensation is considered. It is indicated that incus structure is a necessary consequence of strong development of cumulus.