第34卷 第2期 气象学报 Vol. 34, No. 2
1964年5月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1964

大地形与正压扰动的移行*

伍荣生
(南京大学气象系)

提要

本文研究了坡度为常数的大地形对于正压扰动移行的影响，并且討論了周晓平、顾震潮两人所得的結果。

一、問題的提出

在研究无限长的南北坡对于长波的影响时，經过一些簡化，导得正压位面(或平均位面)上的綫性化涡度方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v(\beta-\bar{u}'')=-fvAh', \tag{1}$$

其中 $\bar{u}(y)$ 是基流，u, v 为扰动风速，h 为地形高度，“$'$”号表示对 y 的一次微分，余类推，f 为科氏参数，$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}$, $A=\frac{\rho_0 g}{p_0}\kappa$, p_0, ρ_0 分别表示地面气压与密度，κ 为地面风速与平均位面上风速之比。連續方程亦可以化为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=Avh'. \tag{2}$$

从(1)与(2)式消去 u，便得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-Ah'\frac{\partial v}{\partial y}-Ah''v\right)+(\beta-\bar{u}''+fAh')\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{3}$$

这些公式的推导，詳見文献[1, 2]。

如果不考虑基流水平切变，而且令 h' 为常数，則(3)式可以化簡为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-Ah'\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(\beta+fAh')\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{4}$$

这一式子是由周晓平，顾震潮两人首先推得的，他們取上式的形式解为：

$$v=Me^{i(kx+\mu y-\nu t)}. \tag{5}$$

其中 M 表示振幅，$k=\frac{2\pi}{L}$, L 为波长，$\mu=\frac{2\pi}{m}$, m 为寬度，$\nu=ck$, c 为相速，将(5)式代入(4)式，便得：

$$\nu=\bar{u}k-\frac{k(\beta+f\alpha)}{(k^2+\mu^2)^2+(\alpha\mu)^2}((k^2+\mu^2)-i\alpha\mu). \tag{6}$$

其中 $\alpha=Ah'$，我們可以看到，在(6)式中右側出現了虛部，这就意味扰动是不稳定的，尽管虛部量值較之实部是可略的，但从数学結果来看，在无基流水平切变的正压大气中，如

* 本文1962年12月16日收到，1963年6月收到修改稿。

果地形坡度是常数，则扰动总是不稳定的。

但是作者在另一文中[2]，利用(3)式及下述边界条件

$$y = y_1, \quad y = y_2, \quad v = 0 \tag{7}$$

得出产生不稳定扰动的必要条件是：在 (y_1, y_2) 区間內，若在某一点 y_s 上，满足：

$$(\bar{u}'' - \beta - fAh')|_{y_s} = 0, \tag{8}$$

则扰动可能是不稳定的，否则稳定必将是中性的。在无基流水平切变情况下，上式可化为：

$$(\beta + fAh')|_{y_s} = 0. \tag{9}$$

当 h' 为常数时，只有当 $h' = -\dfrac{\beta}{fA}$ 时，才能满足此关系式，但此时，整个区間內均成立 $\beta + fAh' = 0$（因为 h' 是常数），从(6)式可以知道，扰动是中性的。如果，$h' \neq -\dfrac{\beta}{fA}$，此时，显然不满足(9)式，因之扰动亦必然是中性的。

从此我們可以看到，对于同一問題却得出二种相反的結論，造成这种差异的原因何在？这就是本文所要討論的問題，此外，在本文中，尚推导了在定值坡度情况下长波移行公式。

二、解的討論

在沒有基流水平切变的正压大气中，如坡度是常数，则所用的方程該是(4)式。

地形廓綫如右图所示，顶峯位在 y_k 处，山麓分别位在 y_a，y_b 处，在 y_i 点上 $(i = a, k, b)$，h' 有界，但其两側 h' 不等，即 h' 在 y_i 点上是不連續的。因此，对于(4)式，我們必須首先对它的解作一些討論，然后才能导得有意义的解。

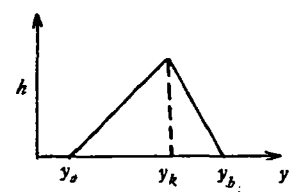

图 1　地形廓綫图

現分两种情况来討論：

(1) 如果 v 及 v 的导数是連續的，那么依微分方程中的 Picard 定理可以知道在这些点上解是不定的，因为(4)式的系数在这些点上是不連續的，即它不满足 Lipschitz 条件。

从物理方面来看，这也是很明显的；从(6)式中略去微量項的虚部，可得波速公式：

$$c = \bar{u} - \frac{\beta + fa}{(k^2 + \mu^2)^2 + a\mu^2}(k^2 + \mu^2). \tag{10}$$

由于在 y_k 点上 h' 値南北不同，所以从(10)式便得出了二个不同値的 c 来，这便与物理意义不相一致了，而且与 v 的連續性假定亦有矛盾。

因为(4)式在 (y_a, y_k) 或者 (y_k, y_b) 区間內，满足解的存在定理，因此，它只能在这些区間內找到合理的解，也就是說，我們只能假定扰动只出現在北坡或只出現在南坡，实际上，周、顾二人亦是只就这种情形进行討論的，但是在此情形下，对(4)式必須提出以下的边界条件，即：

$$y = y_a, \quad y = y_k, \quad v = 0 \tag{11}$$

或者：

$$y = y_k, \quad y = y_b, \quad v = 0. \tag{12}$$

我們可以看到,(5)式是不能满足这些边界条件的,因为(5)式的实部为:

$$\operatorname{Re} v = M\cos(kx + \mu y - \nu t) = M(\cos(kx - \nu t)\cos\mu y - \sin(kx - \nu t)\sin\mu y), \tag{13}$$

其中 Re 表示实部. 当我們討論北坡扰动时,为了方便起見可将原点移到 y_k 点上, 如此,边界条件之一便化为 $y=0$, $v=0$,但此时,从(13)式可知:

$$\operatorname{Re} v = M\cos(kx - \nu t), \quad y = 0 \tag{14}$$

它并不恆为零.

(2) 如 v 是連續的, 由于从物理上来看, 对于某一单波言, 波长与波速均为定値, 但是(4)式中 h' 在 y_i 点上不連續,如此必須要求在这些点上 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 不連續, 这一点可以用以下方法来加以証明.

如将(4)式解写成:

$$v = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}, \tag{15}$$

則可导得下式:

$$\varphi'' - Ah'\varphi' - \left(\frac{\beta + fAh'}{c - \bar{u}} + k^2\right)\varphi = 0. \tag{16}$$

将上式在不連續点 y_i 附近对 y 积分,即得:

$$\varphi'\Big|_{y_i-\varepsilon}^{y_i+\varepsilon} - Ah'\varphi\Big|_{y_i-\varepsilon}^{y_i+\varepsilon} - \int_{y_i-\varepsilon}^{y_i+\varepsilon}\left(\frac{\beta + fAh'}{c - \bar{u}} + k^2\right)\varphi dy = 0. \tag{17}$$

由于 h' 有界, φ 連續,所以当 ε 趋于零时,积分项亦趋于零,如此有:

$$[\varphi']_{y_i} - [Ah'\varphi]_{y_i} = 0. \tag{18}$$

方括号表示括号内的量在 y_i 点上的跳跃. 从此式可以知道,在 h' 不連續点上, 不仅要求 v' 不連續, 而且要求满足此式, Rayleigh[3] Drazin[4] 等人曾先后利用这些关系来討論流体力学中扰动方程的近似解法.

我們于此亦可以看到,(5)式在此情况下亦不能作为(4)式的解,因为它在任一点上都是連續的,而且其任意阶导数亦都是連續的.

从以上两种情况的討論,可以知道以(5)式作为(4)式的解是不合适的, (6)式中的虚部就由此而引入的.

三、边値問題的解

現仅以北坡扰动为例来加以推导,南坡扰动完全同此.

此时,方程(16)的边界条件是:

$$y = y_k, \quad y = y_b, \quad \varphi = 0. \tag{19}$$

令 φ 的形式为:

$$\varphi = e^{\lambda(y-y_k)} \tag{20}$$

代入(16)式,便得:

$$\lambda^2 - Ah'\lambda - \left(\frac{\beta + fAh'}{c - \bar{u}} + k^2\right) = 0. \tag{21}$$

因此有:

$$\lambda = \frac{Ah'}{2} \pm \left(\left(\frac{Ah'}{2}\right)^2 + \frac{\beta + fAh'}{c - \bar{u}} + k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

相应的φ可以写成：

$$\varphi = e^{\frac{Ah'}{2}(y-y_k)}(\mathscr{D}\cosh b(y-y_k) + B\sinh b(y-y_k)). \tag{23}$$

其中$\mathscr{D}$, B为待定系数，可由边界条件来决定，而

$$b^2 = \left(\frac{Ah'}{2}\right)^2 + \frac{\beta + fAh'}{c-\bar{u}} + k^2. \tag{24}$$

利用(19)式，可知$\mathscr{D} = 0$，如B不为零，则须：

$$\sinh b(y_b - y_k) = 0. \tag{25}$$

因为$y_b - y_k$为实数且不为零，如此依双曲綫正弦函数的性質可知只有当b为虛值时，才能滿足上式，卽須：

$$b(y_b - y_k) = n\pi i \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{26}$$

从此式可得：

$$b^2 = -\left(\frac{n\pi}{y_b - y_k}\right)^2. \tag{27}$$

将此式代入(24)式，便得：

$$c = \bar{u} - \frac{\beta + fAh'}{\left(\frac{n\pi}{y_b - y_k}\right)^2 + k^2 + \left(\frac{Ah'}{2}\right)^2}. \tag{28}$$

这就是在边界問題下求得的北坡扰动移速公式，从此亦可証实这个結論，卽在h'为常数的情况下，c为实值，卽扰动是中性的。

关于在这种情况下，扰动是中性的这一事实，我們还可以从物理方面来加以解釋。

将(26)式代入(23)式，便得到：

$$\varphi = Be^{\frac{Ah'}{2}(y-y_k)}\sinh\left(\frac{in\pi}{\delta}(y-y_k)\right), \tag{29}$$

其中$\delta = y_b - y_k$，依双曲綫三角函数性質[1]，我們又可将上式写成：

$$\varphi = iBe^{\frac{Ah'}{2}(y-y_k)}\sin\left(\frac{n\pi}{\delta}(y-y_k)\right). \tag{30}$$

因此从(15)式，有

$$v = \mathrm{Re}(\varphi e^{ik(x-ct)}) = -Be^{\frac{Ah'}{2}(y-y_k)}\sin\left(\frac{n\pi}{\delta}(y-y_k)\right)\sin k(x-ct). \tag{31}$$

因为在槽脊处，$v = 0$，所以从上式可知槽脊綫方程为：

$$k(x-ct) = 2n\pi, \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{32}$$

也就是說槽脊綫是正南北向的。另一方面，将(31)式代入連續方程(2)，可得：

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = -Ah'Be^{\frac{Ah'}{2}(y-y_k)}\sin\left(\frac{n\pi}{\delta}(y-y_k)\right)\sin k(x-ct). \tag{33}$$

在槽脊处，散度等于零，这就規定了槽脊的不发展，此外，由于散度的分布在$(x-ct)$方向是呈正弦曲綫，它的分布对槽(脊)綫来說位置与大小是对称的，但符号相反，譬如說，槽

---

1) $\sinh x$在x为实值时，只有在$x = 0$时才等于零，但在$x = iy$ (y为实数)时，它有：$\sinh x = \sinh iy = i\sin y$，所以当$x = n\pi i$时$(n = 1, 2, \cdots)$可以使它为零。

前如为幅散则槽后为輻合,因之,由散度所引起的气压变化亦是对称的,但符号亦相反,这就規定了扰动的形状不变而向东移动,这就是說扰动是中性的.

如果我們忽視了边界条件,用(5)式来作(4)式的解,除了上述的不合适原因之外, 我們还可以看到,此时槽脊綫是傾斜的,而散度及因之所引起的变压亦不是对称的, 这就引起了扰动的变形,因之,扰动便不再是中性了.

四、φ' 不連續时的解

为了使問題的处理簡单起見,假定扰动只呈現在 (y_a, y_b) 区間內, 此时, 只出現頂峯 y_k 这一个不連續点. 至于包括三个不連續点的处理, 与此完全相似, 但在計算上要繁杂得多.

从第二节的討論中,可知此时的問題是求解(16)式,滿足下述条件:

$$\left.\begin{aligned} &y = y_a,\ y = y_b,\ \varphi = 0,\\ &y = y_k,\ \ [\varphi]_{y_k} = 0,\\ &\qquad\qquad [\varphi']_{y_k} = [Ah'\varphi]_{y_k}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

为了方便起見,将坐标原点移到 y_a 点上, 即令南麓位置为 0 , 而北麓及頂峯位置仍以 y_b, y_k 来表示, 以 h_1', h_2' 分别表示南坡或北坡的坡度, 此时, 在 $(0, y_k)$ 区間內, 解可写成下式:

$$\varphi_1 = B_1(e^{\gamma_2 y} - e^{\gamma_1 y}). \tag{35}$$

在 (y_k, y_b) 区間內,解可写成:

$$\varphi_2 = B_2(e^{\gamma_4(y-y_k)} - e^{(\gamma_4-\gamma_3)\delta+\gamma_3(y-y_k)}), \tag{36}$$

其中:

$$\delta = y_b - y_k,$$

$$\gamma_1,\ \gamma_2 = \frac{Ah_1'}{2} \pm b_1, \quad b_1 = \left[\left(\frac{Ah_1'}{2}\right)^2 + \frac{\beta + fAh_1'}{c - \bar{u}} + k^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_3,\ \gamma_4 = \frac{Ah_2'}{2} \pm b_2, \quad b_2 = \left[\left(\frac{Ah_2'}{2}\right)^2 + \frac{\beta + fAh_2'}{c - \bar{u}} + k^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

其中 B_1, B_2 为待定系数, 它可利用(34)式来决定. 将(35),(36)两式代入(34)式中的第二式,便得:

$$(e^{\gamma_2 y_k} - e^{\gamma_1 y_k})B_1 - (1 - e^{(\gamma_4-\gamma_3)\delta})B_2 = 0, \tag{37}$$

$$-(\gamma_2 e^{\gamma_2 y_k} - \gamma_1 e^{\gamma_1 y_k})B_1 + (\gamma_4 - \gamma_3 e^{(\gamma_4-\gamma_3)\delta} - A(h_2' - h_1')(1 - e^{(\gamma_4-\gamma_3)\delta}))B_2 = 0. \tag{38}$$

若 B_1, B_2 不同时为零,則須使其系数所构成的行列式为零,經过整理以后,便得:

$$(e^{-b_1 y_k} - e^{b_1 y_k})\left(-b_2 - \frac{Ah_2'}{2} + Ah_1' - \left(b_2 - \frac{Ah_2'}{2} + Ah_1'\right)e^{-2b_2\delta}\right) -$$

$$-(1 - e^{-2b_2\delta})\left(e^{-b_1 y_k}\left(\frac{Ah_1'}{2} - b_1\right) - e^{b_1 y_k}\left(\frac{Ah_1'}{2} + b_1\right)\right) = 0. \tag{39}$$

对于长波来說, $k \sim 10^{-8}$c.g.s., b_1, b_2 的概量相同于 k,如 y_k, δ 的尺度較波长 L 为小,例如它們相当于 3×10^7 c.g.s.(这已相当于西藏高原那么大的尺度了),則 $b_1 y_k$, $b_2 y_k$ 的概量約为 10^{-1}, 尤其是当波长更长一些时, $b_1 y_k$, $b_2 y_k$ 的概量还要小些,如此,我們可以于(39)式中,将指数項展成級数, 而且收斂得較快, 在粗略的近似下, 可取首二項来計算,如此可

得：

$$b_2 \simeq \frac{\delta + y_k}{\delta y_k} + \frac{1}{2}(Ah_2' - Ah_1'). \tag{40}$$

将 b_2 的表达式代入，即得：

$$c = \bar{u} - (\beta + fAh_2')\left[k^2 - \left(\frac{\delta + y_k}{\delta y_k}\right)^2 + (Ah_1' - Ah_2')\frac{\delta + y_k}{\delta y_k} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{Ah_1'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}A^2 h_1' h_2'\right]^{-1}. \tag{41}$$

因为在地形作用不可忽略的情况下，fAh_2' 的概量須与 β 的概量相同，所以，Ah_2' 的概量該为 10^{-9}c.g.s. 左右，如果南坡的坡度大小与北坡具有相同概量，那么在(41)式中，我們尚可以将一些小項略去，最后有：

$$c = \bar{u} - \frac{\beta + fAh_2'}{k^2 - \left(\frac{\delta + y_k}{\delta y_k}\right)^2 + (Ah_1' - Ah_2')\frac{\delta + y_k}{\delta y_k}}.$$

这就是在 v' 在 y_k 处不連續时所导得的移行公式，若要考虑扰动的稳定性，則須在級数展开式中取首三項或更多項，如此，問題便趋于复杂了。实际上，坡度为常数的地形并不存在，所以反不如假定坡度为連續可变好些，而且在处理上亦要簡便得多。

参　考　文　献

[1] 周曉平，顧震潮，大地形对高空行星波传播的影响，气象学报，**29** (1958)，99—103.
[2] 伍荣生，大地形与扰动的不稳定，气象学报，**34** (1964)，第 1 期.
[3] Rayleigh, Lord., *The theory of sound*, **2** (1945), 382—400.
[4] Drazin, P. G., *J. Fluid Mech.* **10** (1961), 571—583.

ON THE INFLUENCE OF LARGE MOUNTAIN ON THE DISPLACEMENT OF BAROTROPIC DISTURBANCE

Wu Jung-sen
(*Department of Meteorology, Nanking University*)

Abstract

In this paper the displacement of barotropic disturbance under the influence of a mountain with constant slope is studied. The results which were first obtained by Chow and Koo are discussed in detail.