

亚洲 500 毫巴月平均环流指数 (1939—1962 年)的谱分析*

李小泉 瞿栋根

(中央气象局气象科学研究所)

提 要

本文计算了亚洲 500 毫巴月平均环流指数的方差谱。结果指出：亚洲经向及纬向环流指数谱的分布是有一定差异的，前者以 5 个月左右为周期的谱和振动占有显著的地位，而后者则以 5 个月以上的长周期振动所占的成分较大。

一、前 言

近年来，平稳随机函数谱分析的方法在气象上的应用逐渐推广，不仅对大气湍流的研究方面，而且对某些气象参数时间序列的分析方面，都已经作了一些工作。如 H. A. Panofsky 对北半球西风指数的谱分析^[1]，丘万镇对北美若干站高空风及温度的谱分析^[2]，B. P. Harper 对 500 毫巴北半球经向环流指数的能谱分析^[3]等等，揭发了一些有兴趣的现象，使我们对于大气运动中的周期性振动获得了更多的认识。了解了气象参数的谱特征，还可以考虑应用平稳随机过程外推的理论来讨论它的预测问题^[4]。本文利用 1939—1962 年亚洲环流指数 (45°—65°N, 60°—150°E) 的资料，计算了经向分量 (I_M) 和纬向分量 (I_θ) 逐月变化中谱的分布，试图分析一下各种周期振动对总振动的贡献，并比较了两种指数的谱特征。

二、谱的定义和计算方法

根据随机过程理论，可以把任一平稳随机过程 $x(t)$ 看成是无穷多个频率无限接近的、且具有两两互不相关随机振幅的周期振动的迭合。 $x(t)$ 的相关函数 $R(\tau) = M x(t+\tau)\overline{x(t)}$ 亦能展成无穷多频率无限接近的周期振动的迭合，其振幅不是别的，正是相应的随机周期振动振幅平方的数学期望。

假设满足条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty,$$

且 $R(\tau)$ 可写成富里哀积分：

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda.$$

于是，

$$R(0) = M |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

* 本文 1963 年 6 月 3 日收到，1964 年 2 月收到修改稿。

$f(\lambda)$ 称为 $x(t)$ 的谱密度。这样, 平稳随机过程 $x(t)$ 的平均能量(即方差) $M|x(t)|^2$ 可以理解为无穷多频率无限接近的谱和振动的能量之和, 谱密度 $f(\lambda)$ 就是在频率 λ 附近, 单位频带宽度上随机振动分量的平均能量(方差)。因此, 平稳随机过程谱分解的物理意义就在于: 谱函数(或谱密度)决定了过程依照频率分谱的能量分布。可以通过 $R(\tau)$ 的富氏反变换来求得 $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} R(\tau) d\tau.$$

气象参数一般除具有日变化、年变化等有清楚物理原因的周期性振动之外, 还具有很复杂的随机扰动, 因此, 应视为时间的随机函数。在某些条件下, 气象参数的随机扰动可以粗略近似地视为是平稳的。为了认识这些扰动的性质, 看看各种频率的振动在总振动中所占的成分有多大, 可以应用谱分析的方法, 通过对气象参数时间序列相关函数的富氏反变换, 求得各种频率振动的谱密度分布。总振动的方差, 在 $f(\lambda) \sim \lambda$ 图上即等于曲线下的总面积。与每一个频率(周期)相应的谱密度的数值, 代表了该频率(周期)附近单位频带宽度的谱和振动的方差对总方差的贡献。因此, 如果某些频率(周期)附近曲线的峰值特别突出, 那么, 这些频率(周期)的谱和振动就越为重要。

但是, 我们实际所观测到的总是 $x(t)$ 的有限数目的离散的测值, 我们只能据此求得在离散频率上真正谱的估计值。J. W. Tukey 根据谱的抽样理论^[3,6], 给出了一种计算平稳随机过程谱的较好估计值(简称谱估值)的计算公式和步骤如下:

1. 给定时间序列 x_1, x_2, \dots, x_N , $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ 。先求自相关函数 R_p :

$$R_p = \frac{\sum_{i=1}^{N-p} x_i x_{i+p}}{N-p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

其中 m 为所取的最大后延。

2. 以 R_p 代入下式求谱的原始估计值 L_h :

$$L_h = \frac{1}{m} R_0 + \frac{2}{m} \sum_{p=1}^{m-1} R_p \cos \frac{p\pi h}{m} + \frac{(-1)^h}{m} R_m. \quad (2)$$

$h = 0, 1, \dots, m$ 。但对于 L_0 及 L_m , 按上式计算的结果尚需除以 2。 $\frac{m}{\pi} L_h$ 即为当

$\lambda = \frac{\pi}{m} h$ 时 $f(\lambda)$ 的原始估计值。

3. 由于有抽样变化的影响, L 往往随 h 有很大的振动。为求得对真实谱的较好估计值, Tukey 指出, 应通过下式加以平滑:

$$U_h = 0.23L_{h-1} + 0.54L_h + 0.23L_{h+1}, \quad (3)$$

其中

$$L_{-1} = L_1, \quad L_{m+1} = L_{m-1}.$$

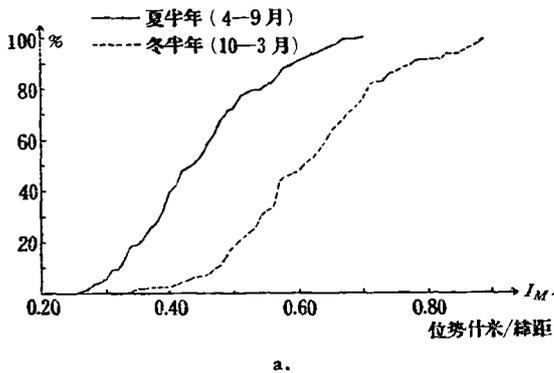
上述(1)–(3)式给出了可供实际应用的谱估值的计算公式, 当 m 比 N 小得很多时, 用上式计算比直接对原序列作富氏展开要简单得多。

对环流指数月平均值进行谱分析时, 根据么枕生的意见, 需要消除或减少原始数据中

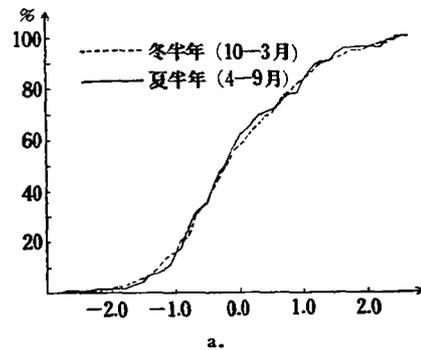
多年变化的趋势影响和有固定周期的季节变化的影响，以求得近于平稳的时间序列。经过计算试验，可以用环流指数年平均值两次三年滑动平均作为趋势^[4]，在月平均环流指数的原始数据中减去相应的趋势值，便可以消除多年趋势变化的影响。由于环流指数的一阶矩和两阶矩都有明显的季节变化^[1]，我们取消除趋势影响后的环流指数距平值除以相应月份的均方差 σ_d ，作为计算谱的初始数据，也就是说，在式(1)中我们取：

$$x_i = \frac{(I_i - \hat{I}_i)_{\text{距平}}}{\sigma_d}$$

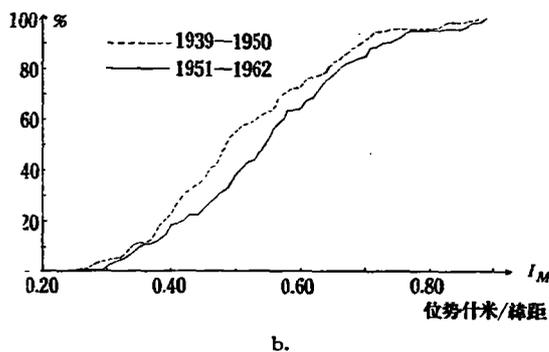
I_i 为某年某月的月平均环流指数， \hat{I}_i 为相应的趋势值， σ_d 为对应月份环流指数的标准离差。经过趋势订正后，序列的首尾要各短两年^[4]，故以下谱的计算中，所用资料的年代为 1941—1960 年。图 1 及图 2 分别给出在趋势影响和季节变化影响消除前后，冬、夏半年



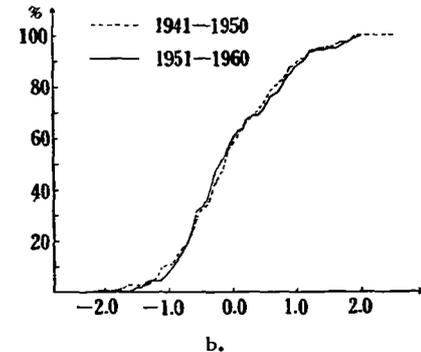
a.



a.



b.



b.

图 1 I_M 的经验分布函数图 2 $\frac{I_M(\text{去趋势后距平})}{\sigma_d}$ 的经验分布函数

(a图)及 1950 年前后两段时间(b图)经向环流指数的经验分布函数。显然，经过这样处理以后，冬、夏半年或 1950 年前后两段时间的经向环流指数的经验分布函数曲线是相当一致的，而在原始的环流指数情况下则有较大的差别。纬向环流指数的情况也相类似(图略)。

谱的计算，大部分是借用崔玉翼和史久恩编的程序，在电子计算机上进行的。

三、经向环流指数的谱估计

把经过趋势及季节变化订正后的 1941—1960 年亚洲 500 毫巴经向环流指数排成序列： x_1, x_2, \dots, x_{240} ($N = 240$)，应用公式(1)—(3)计算了它们的谱估值。我们先取最大

后延为一年半($m = 18$ 个月),则计算的结果如图3所示. 由图3可见,在基本周期为36

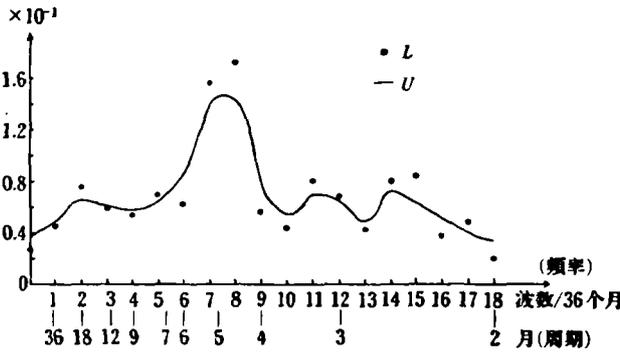


图3 经向环流指数的谱估计 ($N = 240, m = 18$)

个月¹⁾的第7—8个波,即相当于振动周期为4.5—5.1个月的时候,经向指数谱的分布有一个突出的高峰.它表示周期长度为5个月左右的谱和振动在经向指数总振动中所占的比重特别大,而其它长度的周期振动对总振动的贡献均不突出.

当 $m = 18$ 时, U 最大值所对应的周期长度并非整数,我们

尚不能确切地知道 I_M 谱的峰值出现在那里. 为此,我们按 С. А. Машкович 等曾用过的计算公式^[5],来推断那种周期的振动表现得最明显. Машкович 等所取的计算公式如下:

$$S(T) = R_0 + 2 \sum_{p=1}^m R_p \cos \frac{2\pi p T}{T} \quad (4)$$

T 为周期,取 $1, 2, \dots, m$ 的整数值; $S(T)$ 是相应于各整数周期 T 的谱的估计量,这样便可以看出各整数周期所对应的谱的分布情况²⁾.

用式(4)计算的结果见图4. 可以看到当周期长度为5个月的时候, $S(T)$ 的数值最大,比 T 为所有其它数值时的 $S(T)$ 值要大一倍以上. 这就表明,周期长度为5个月的振动是最显著的,在计算中取 m 为5的整倍数最为合适,这样,谱的峰值就会正好出现在周期长度为5个月的地方. 我们取 $m = 15$ 个月,重新计算了 I_M 的谱分布,得图5.

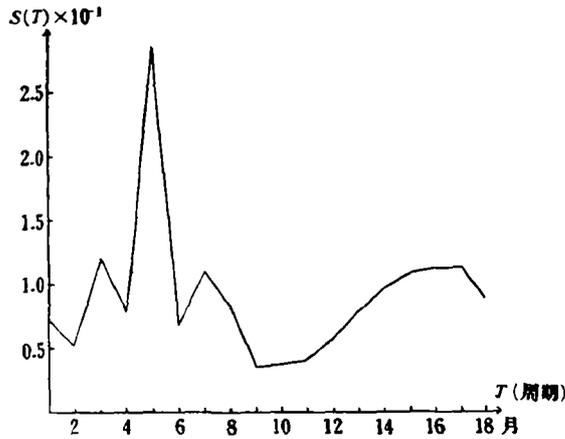


图4 经向环流指数的 $S(T) \sim T$ 曲线

可以看到,图5和图3上谱分布的形式几乎完全一样,但图5中部的峰表现得更突出些. 峰值出现在基本周期为30个月的第6个波的地方,即相当于周期长度为5个月.

可以检验这个峰值的出现是否显著^[3]. 可以证明,对于个别频率随机抽样的谱估计值,呈如下分布:个别频率的谱估计值与谱的平均值的比,呈 χ^2/k 分布,其中 k 为自由度,即

$$\frac{U}{\bar{U}} = \frac{\chi^2}{k}$$

1) 因为 R_p 是 p 的偶函数,故式(2)是以 $2m$ 为基本周期.

2) 式(4)相当于只计算 $\lambda = \frac{2\pi}{T}$ 的当 T 取整数值时的谱估计,但 $S(T) \sim T$ 曲线下的面积并不与总振动的方差成比例.

而

$$k = \frac{2N - \frac{3}{2}m}{m}$$

当 $N = 240, m = 15$ 时, $k \approx 31$.

应用近似公式^[7]計算得:

$$\chi_{0.05}^2 \approx k + 0.85 + 1.645\sqrt{2k - 1} \approx 44.70,$$

$$\chi_{0.01}^2 \approx k + 2.20 + 2.326\sqrt{2k - 1} \approx 51.37,$$

則

$$\frac{\chi_{0.05}^2}{k} = 1.44, \quad \frac{\chi_{0.01}^2}{k} = 1.66.$$

現假設真正的譜的分布是完全均一的, 而分別頻率上譜的峯值只是由于随机抽样而产生, 利用上述关系可以檢驗这个假定是否成立。今 $\bar{U} = 0.67 \times 10^{-1}$, 因此 U 峯值的 5% 和 1% 信度的置信界限分別为 0.96×10^{-1} 和 1.11×10^{-1} , 如图 5 中橫綫所示。可見, 周期为 5 个月的譜和振动的譜估值超过了 1% 的信度要求, 原假設应被否定, 因而这个峯值的出現是显著的。

我們把所用的經向指数距平序列中正值皆取为 +1, 負值皆取为 -1 (相当于只考虑符号), 重新进行譜估計, 得图 6。与

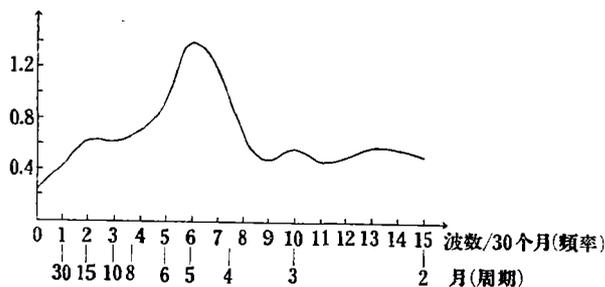


图 6 經向环流指数(符号)的譜估計 ($N = 240, m = 15$)

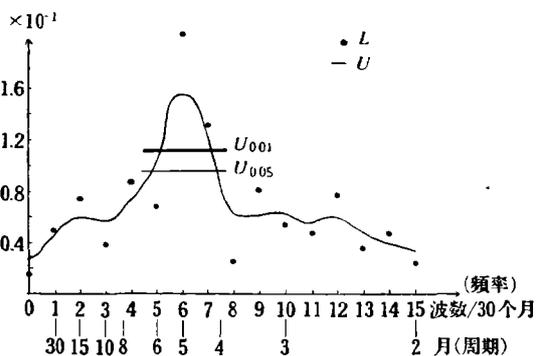


图 5 經向环流指数的譜估計 ($N = 240, m = 15$)

图 5 比較, 可見图形是十分相似的, 說明这种分布情况并非由某些特殊的数值所造成。由此可見, 在亚洲大气环流經向分量的逐月变化中, 周期长度为 5 个月左右的振动确实占着十分重要的地位。这种振动, 可能是亚洲大气环流所具有的一种特征。

Б. П. Мультиановский 早在三十年前就已經发现, 第一自然天气区内某些大气过程具有 5 个月的韵律活动^[7], 以后又为 Пагава, Блюмина, Шишков 等人的工作所进一步証实^[8]。大气过程的这种規律性, 已在苏联长期天气預报实践中加以应用, 获得了一定的效果。楊鉴初、巢紀平、史久恩等同志对东亚大气过程的研究工作中指出^[9,10], 东亚大气过程也具有韵律活动。作者对亚洲环流指数进行分析时亦曾指出, 亚洲大气环流可能存在 5 个月左右的周期性振动^[11]。現在本文用譜分析进一步証实了这个事实, 它明显地表现在亚洲大气环流經向分量的能譜分布之中。

我們把計算相关函数的公式(1)改写一下:

把序列 x_1, x_2, \dots, x_N 写成 $x_{1.1}, x_{1.2}, \dots, x_{1.12}, x_{2.1}, \dots, x_{i.j}, \dots, x_{l.11}, x_{l.12}$ 。其中 i 为年份序号, j 为月份序号, l 为总年数。在我們計算的例子中, $i = 1, 2, \dots, 20$; $j = 1, 2, \dots, 12$; $l = 20$ 。于是,

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{240 - 1} [x_{1.1}x_{1.2} + x_{1.2}x_{1.3} + \dots + x_{1.12}x_{2.1} + \dots + x_{20.11}x_{20.12}] = \\
&= \frac{1}{12 \times 20 - 1} \left[\sum_{i=1}^{20} x_{i.1} x_{i.2} + \sum_{i=1}^{20} x_{i.2} x_{i.3} + \dots + \sum_{i=1}^{20} x_{i.11} x_{i.12} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{20-1} x_{i.12} x_{i+1.1} \right] \approx \frac{1}{12} \left[\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_{i.1} x_{i.2} + \dots + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_{i.11} x_{i.12} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} x_{i.12} x_{i+1.1} \right] = \frac{1}{12} [R_1^1 + R_1^2 + \dots + R_1^{11} + R_1^{12}], \tag{5.1}
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
R_2 &\approx \frac{1}{12} \left[\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_{i.1} x_{i.3} + \dots + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_{i.10} x_{i.12} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} x_{i.11} x_{i+1.1} + \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} x_{i.12} x_{i+1.2} \right] = \\
&= \frac{1}{12} [R_2^1 + R_2^2 + \dots + R_2^{11} + R_2^{12}]. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

.....

这样, R_p 可以近似地看作是 12 个 R_p^d 的平均, 而每一个 R_p^d 可以类似地称为“ d 月份在后延为 p 时的相关函数”, 它等于所有 d 月份的 x 与 $d+p$ 月份 [当 $12(n+1) > d+p > 12n$ 时, 取下 n 年的第 $(d+p-12n)$ 个月] 的 x 值之积的平均值。因此, 它不同于一般的自相关函数, 而只表示 d 月份的变量 x 在以后第 p 个月平均重复出现的程度。富氏变换是线性变换, 所以, 可以形式上对每个月的 R_p^d 用公式(2)、(3)计算它的谱分布。但

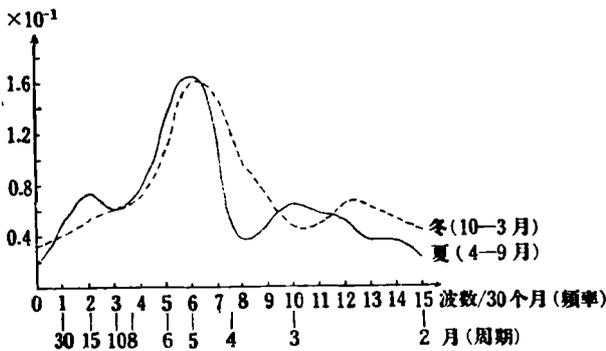


图 7 冬、夏半年经向环流指数的谱估计

这时的谱与一般的谱不完全相同, 而只应视为总的谱的分量(乘上 12 倍)。如果过程是平稳的而且已经消除了季节变化的影响, 则各个月的 R_p^d 应近似相等, 而谱的分布亦应相近; 否则, 就说明经过前述方法处理后的环流指数序列仍含有季节性的影响。由于我们只有 20 年的序列, 用来研究逐月环流指数谱的变化显然是不够

的。图 7 给出冬半年(10—3 月)及夏半年(4—9 月)的经向环流指数的谱分布, 可以看到两条曲线很相近, 而且 5 个月左右的峰都很突出。

四、纬向环流指数的谱估计

对于纬向环流指数, 我们同样进行了谱分析, 图 8 给出 $m = 15$ 个月时纬向环流指数 I_0 的谱估值 L 及 U 的分布。比较图 8 与图 5, 可以发现, I_0 与 I_N 谱的分布是有很大差异

的。 I_3 的譜在周期长度为 5 个月的地方并没有峰出现，而且长周期部分的譜估值要比短周期部分大得多。这就表明：亚洲环流緯向分量的逐月振动中，除去年变化外，5 个月以上的长周期振动占主要成分。虽然有两个浅峰，但并不突出。我们同样计算了緯向环流指数距平符号的譜分布，得图 9。图 9 与图 8

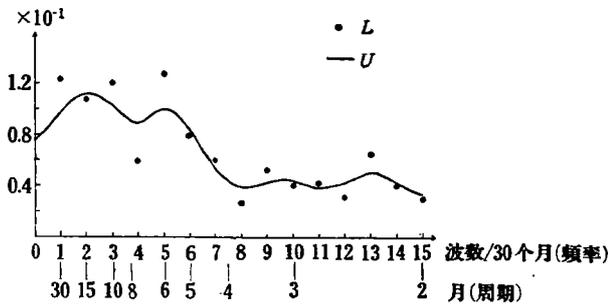


图 8 緯向环流指数的譜估計 ($N = 240, m = 15$)

的分布是相似的，只是波数为 4 时譜分布曲綫上的谷稍清楚一些。而与图 6 比較，則相差甚远。

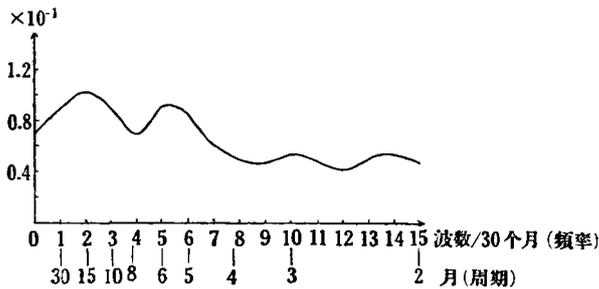


图 9 緯向环流指数(符号)的譜估計

我們曾經嘗試把环流指数序列分成两段，分別計算了它們的譜分布 ($N = 120, m = 15$)。两段时期經向指数的譜分布曲綫上，在周期长度为 5 个月的地方都有明显的高峯出现，不过其峯度尚有一定差别。这一方面可能是由于序列的长度減少了一半，最大后延已超过序列总

长度的 $1/10$ ，可能有較大抽样誤差的緣故；另一方面也暗示着序列中尚含有某种不平稳的成分。緯向指数的情况也类似。这个問題，还有待今后深入研究。

五、小 結

通过以上的分析，我們可以得到如下的几点認識：

1. 亚洲大气环流指数 I_M 和 I_3 逐月变化的譜分布是不相同的，表明由不同物理原因所形成的經向和緯向环流分量的长期变化是有区别的。
2. 亚洲經向环流指数的逐月变化中，以 5 个月左右为周期的譜和振动占有重要的地位。这种振动，当与大气过程 5 个月的韵律活动有关。
3. 亚洲緯向环流指数逐月变化中，5 个月以上的长周期振动占的成分較大，但未見有特別突出的优势。

致謝：本項工作是在楊鑑初先生亲切指导下进行的，并借用了崔玉璽、史久恩同志所編的程序进行計算，么枕生、文圣常先生曾提供了寶貴意見，张杏儒、刘鍾玲同志协助进行了許多試驗計算工作，刘鍾玲同志并代繪图表，作者謹致謝意。

参 考 文 献

- [1] Panofsky, H. A., Spectrum and cross spectrum analysis of hemispheric westerly index, *Tellus*, 9 (1957), No. 2.
- [2] Chiu Wan-cheng, The wind and temperature spectra of the upper troposphere and lower stratosphere

- over north America, *J. of Met.*, **17** (1960), No. 1.
- [3] Harper, B. P., Energy spectra of 500mb meridional circulation indexes, *J. of Met.*, **18** (1961), No. 4.
- [4] 雅格龙, 平稳随机函数导论, 数学进展, **2** (1956), 第1期.
- [5] Машкович, С. А., Добрышман, Е. М., Хейфец, Я. М., Характеристики занальной циркуляции, *Гидрометеоздат. М.*, 1958.
- [6] Panofsky, H. A. and Brier G. W., Some applications of statistics to Meteorology, University, Park, Pennsylvania, 1958.
- [7] 楊鉴初, 苏联天气图方法的长期天气预告, 中国科学院地球物理研究所专刊乙种第1号, 1953.
- [8] Гирс, А. А., Основы долгосрочных прогнозов погоды, *Гидрометеоздат*, 1960.
- [9] 楊鉴初、史久恩、袁子兴, 季节天气预报的一个方法, *气象学报*, **30** (1959).
- [10] 巢纪平, 东亚自然天气区域中超极地过程韵律作用的初步研究, *气象学报*, **27** (1956).
- [11] 李小泉, 亚洲 500 mb 环流指数的若干特征, *气象学报*, **33** (1963).
- [12] Кац, А. Л., Сезонные изменения общей циркуляции атмосферы и долгосрочные прогнозы, *Гидрометеоздат, Л.*, 1960.
- [13] Pierson, W. J., On the use of time series concepts and spectral and cross-spectral analysis in the study of long-range forecasting problems, *J. of Marine Research*, **18** (1960), No. 2.
- [14] Kendall, M. G., The advanced theory of statistics, London, 1946.
- [15] Landsberg, H. E., Mitchell, J. M., Power spectrum analysis of climatological data for woodstock college, Maryland, *Monthly Weather Review*, **87** (1959).

SPECTRAL ANALYSIS OF MONTHLY 500 MB CIRCULATION INDEX OVER ASIA

LEE SIAO-CHUAN, CHU TUNG-KAN

(Central Institute of Meteorological Research, Central Weather Bureau)

ABSTRACT

In this paper, the power spectrum of the monthly 500 mb circulation index over Asia has been calculated. The spectrum difference between meridional and latitudinal index is found to be significant. In the spectrum of meridional index there is a significant maximum harmonic component with a period of about five months, and the total variance of the latitudinal index is contributed chiefly by the oscillations with the periods longer than five months.