

## 带电水滴破碎临界电场的理论分析\*

周秀骥 秦仁忠

(中国科学院地球物理研究所) (中国科学技术大学)

### 提 要

给出了带电水滴不稳定形变时临界电场强度的理论公式,它和 Macky 的实验结果很符合。这结果表明,在雷雨云中电场强度值只要达到 5,000 伏/厘米,雨滴表面即可以产生火花放电,而可能触发云中闪电的形成。这时,由于雨滴表面放电,云中离子增加到  $10^{10}$  个/厘米<sup>3</sup>,而大大加强了云中导电率。最后,当云中场强达到临界值时,由于雨滴的不稳定形变,3.2 公分的雷达回波强度可以突然增强 20 倍。

### 一、前 言

1931 年 Macky<sup>[1]</sup> 在强电场中进行了水滴的形变与破碎的实验。他发现,在电场中水滴被拉长成沿场强方向的旋转椭圆体。当场强超过某一临界值以后,水滴形状就很不稳定,而被拉成细线状。此时水滴开始破碎,而从表面产生辉光放电以及火花放电。

Wilson 与 Taylor<sup>[1]</sup> 曾得到临界场强 ( $E^*$ ) 与水滴起始半径 ( $R$ ) 之间的理论公式:

$$E^* = k \sqrt{\frac{\sigma}{R}}. \quad (1)$$

这里  $\sigma$  是水滴表面张力系数,而  $k$  是一个未定的比例常数。Macky 则根据自己的实验结果确定了  $k$  值,而得到以下公式:

$$E^* \sqrt{R} = 3875. \quad (2)$$

这里  $E^*$  单位是伏/厘米,  $R$  单位是厘米。

这个结果,对了解雷雨云中放电条件有一定意义。因为假如云中存在有半径 0.25 厘米的雨滴,则当场强达到临界值  $E^* = 8.3$  仟伏/厘米时,水滴就形成火花放电。而这比起干空气中火花放电的临界场强  $E^* \approx 30$  仟伏/厘米,则小了近 4 倍。但是, Macky 的实验公式(2)一直未得到理论上的定量证实,而且其中也未考虑到水滴荷电时的情况。

1882 年 Rayleigh<sup>[2]</sup> 以及 1962 年 G. Ailam 与 I. Gallily<sup>[3]</sup> 等人都考虑过带电水滴形状的稳定性问题。他们得到同样结果:当水滴电荷超过临界值  $q^*$  时,它的形状就不稳定而破碎:

$$q^{*2} = 16\pi R^3 \sigma. \quad (3)$$

但是作者没有能同时考虑到场强的影响,并且从以下估计可以看到,在实际云中雨滴所带电荷都低于此值;因此只考虑荷电的影响,对云雾物理实际意义很少。

本文目的在于从理论上证实 Macky 的实验结果,并且考虑到电场以及荷电对雨滴形

\* 本文 1963 年 9 月 11 日收到。

变的共同影响。最后,讨论一下这个结果对研究雷雨云的意义。

## 二、基本机制与处理方法

对于水滴来说,可以忽略它的可压缩性与弹性形变。这样,一个处在电场中的荷电水滴,一方面由于被电场极化而受有电力作用,另一方面又因为电荷沿水滴表面分布而受有库仑斥力。这两种力都促使水滴变形。而水滴的表面张力却阻止它的形变。因此,水滴最后的形状就取决于这三种力之间的相互平衡。当平衡无法达到时,水滴就沿场强方向被拉伸形变,而最后破碎。

从上述机制出发,首先找到带电水滴在电场中对应于上述三种力的能量。由于水滴的介电常数等于 80,可以把它看成是理想导体<sup>1)</sup>。因此,水滴在电场中的极化能量等于:

$$u_E = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (4)$$

这里  $\mathbf{E}$  是外场强向量,  $\mathbf{p}$  是水滴极化向量。根据 Macky 实验,可以假定水滴在变形过程中的形状是旋转椭球体。令  $c$  为它的长轴半径,  $a$  为它的旋转轴半径,则根据电动力学计算结果<sup>[5]</sup>:

$$\mathbf{p} = \frac{e^3 V}{2\pi(1-e^2) \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)} \mathbf{E}. \quad (5)$$

这里  $V$  是水滴体积,  $e$  是旋转椭球的偏心率:

$$e = \sqrt{1-z^2}; \quad z = a/c.$$

其次,由于水滴荷电  $q$  而具有的库仑电能  $u_q$  等于:

$$u_q = \frac{1}{2} q\varphi. \quad (6)$$

这里  $\varphi$  是水滴荷电在表面形成的电位势,对旋转椭球来说<sup>[4]</sup>:

$$\varphi = \frac{q}{2\epsilon\epsilon_0 c} \ln \left[ \frac{1+e}{1-e} \right]. \quad (7)$$

其中  $\epsilon$  是空气介电常数,近似地等于 1.

最后,水滴的表面张力能  $u_\sigma$  等于:

$$u_\sigma = \sigma S. \quad (8)$$

其中  $\sigma$  是表面张力系数,  $S$  是水滴表面积。而对旋转椭球来说:

$$S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a c}{e} \sin^{-1} e. \quad (9)$$

严格说,  $\sigma$  是水滴表面电荷密度的函数,因此它随荷电量  $q$  以及水滴形状而变化。作为第一近似,暂把  $\sigma$  看成常数值。由于表面电荷使表面张力系数  $\sigma$  值降低,因此  $\sigma = \text{常数}$  的假设只会使以下计算的临界场强值  $E^*$  偏高。

1) 甚至对蒸馏水来说,其导电率等于  $2 \cdot 10^{-8}$  欧姆<sup>-1</sup>·米<sup>-1</sup>, 其电弛时间  $\tau = 3.6 \times 10^{-8}$  秒,因此在水滴形状变化时,只要经过  $10^{-8}$  秒,其电荷就能沿表面达到稳定分布。

由此,水滴的总能量  $u$  就可写成:

$$u = u_E + u_g + u_\sigma = \left( 2\pi a^2 + \frac{2\pi a c}{e} \sin^{-1} e \right) \sigma + \frac{q^2}{4ec} \ln \left[ \frac{1+e}{1-e} \right] - \frac{e^3 V E^2}{4\pi(1-e^2) \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)}. \quad (10)$$

因为在形变过程中水滴体积不变,则有:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 c,$$

或

$$R^3 = a^2 c, \quad (11)$$

引入无因次能量函数  $G = \frac{u}{\pi R^2 \sigma}$  以及  $z = a/c$ , (10)式可以换写成下列形式:

$$G = 2z^{2/3} \left( 1 + \frac{1}{2} f + 2\alpha g \right) - \beta \frac{1-z^2}{2z^2(g-1)}. \quad (12)$$

其中:

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi R^3 \sigma}, \quad \beta = \frac{E^2 R}{3\pi \sigma}, \quad (13)$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sin^{-1} \sqrt{1-z^2}, \quad g = \frac{1}{2\sqrt{1-z^2}} \ln \left[ \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{1-\sqrt{1-z^2}} \right].$$

根据力学平衡原理,当水滴的能量值  $u$  (或  $G$ ) 为极小值时,水滴就具有处在稳定平衡状态下的形状,即稳定形变.而当它的总能量值为极大值时,则水滴形状处在不稳定平衡;换言之,水滴不断地变形以致最后破碎.因此,问题就归结成探讨无因次能量函数  $G$  的极值点分布.为此,从(12)式求出  $G$  对  $z$  的一阶微商与二阶微商,它们各具有以下形式:

$$\frac{dG}{dz} = - \frac{2}{3z^{1/3}(1-z^2)} \left\{ (1+2z^2) + \frac{1-4z^2}{z} f + [3-(2+z^2)g] \alpha \right\} - \beta \frac{3-(2+z^2)g}{2z^3(g-1)^2}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2G}{dz^2} = \frac{2}{9z^{4/3}(1-z^2)^2} \left[ (4-29z^2-2z^4) + \frac{4-5z^2+28z^4}{z} f \right] - \alpha \frac{2}{9z^{4/3}(1-z^2)^2} [3(1+8z^2) + (2-25z^2-4z^4)g] - \beta \frac{(13-10z^2) - (17-9z^2-2z^4)g + 3(2-z^2)g^2}{2z^4(1-z^2)(g-1)^3}. \quad (15)$$

令  $\frac{dG}{dz} = 0$ , 则从(14)式得到无因次能量  $G$  取极值点的位置  $z$  与参数  $\beta$  及  $\alpha$  之间的关系. 令  $\beta_m$  等于这时的  $\beta$  值, 则有:

$$\beta_m = \frac{4z^{8/3}(g-1)^2}{3(1-z^2)} \left[ \frac{(1+2z^2) + \frac{1-4z^2}{z} f}{(2+z^2)g-3} - \alpha \right]. \quad (16)$$

假设没有外电场,即  $\beta_m = 0$ . 则从(16)式得出:

$$\alpha = \frac{1 + 2z^2 + \frac{1 - 4z^2}{z} f}{(2 + z^2)g - 3} \quad (17)$$

这就是 G. Ailam 与 I. Gallily<sup>[3]</sup> 所得到的结果.

### 三、计算结果

首先指出,一个水滴具有最大的电荷值等于:

$$q = 100R^2 \quad (18)$$

因为超过该值时,水滴表面场强即超过 30 仟伏/厘米而引起表面放电. 把(18)式代入(13)式,可得:

$$\alpha \sim 11.05R.$$

则对于半径  $R = 0.28$  厘米的水滴来说,  $\alpha \sim 3.1$ . 而在一般情况下,云滴荷电值小于

(18)式. 因此,以下我们将只考虑  $\alpha \leq 3.5$  的情况.

此外,假定  $z = 1$  (即对于球状水滴),由(14)式立刻得到:

$$\frac{dG}{dz} = 1.2\beta \geq 0.$$

这说明当  $\beta \neq 0$  (即存在外电场时),水滴的形状不可能是球状的.

其次,根据(16)式进行数值计算,得到如图 1 中所示的一族曲线,它们表征了  $G$  具有极值时,  $\alpha, \beta_m$  与  $x = \frac{1}{z}$  之间的关系.

从图中看出,对应于一定的  $\alpha$  值,  $\beta_m$  存在着一个最大峰值  $\beta_m^*$ . 由此当  $\beta > \beta_m^*$  时,  $\frac{dG}{dz}$  不可能等于零,或者说能量  $G$  不具有极值. 而且当  $z = 1$  时,

$\frac{dG}{dz} > 0$ , 则对任何  $z < 1$  值  $\frac{dG}{dz} > 0$ .

因此当  $\beta > \beta_m^*$  时,水滴的形状就不可能达到稳定平衡状态. 而只有当  $\beta < \beta_m^*$  时,才可能出现稳定平衡状态.

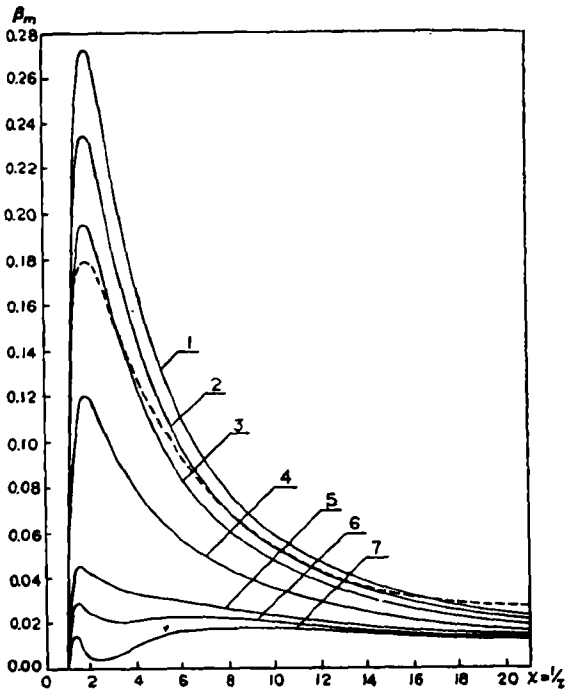


图 1 不同  $\alpha$  值下,  $\beta_m$  与无因次能量  $G$  的极值点位置  $x$  间的关系

实线: (1)  $\alpha = 0$ , (2)  $\alpha = 0.5$ , (3)  $\alpha = 1$ ,  
(4)  $\alpha = 2$ , (5)  $\alpha = 3$ , (6)  $\alpha = 3.25$ ,  
(7)  $\alpha = 3.5$ .

点线:  $\alpha = 6.75\beta$  (取  $q = \pm 3ER^2$ ).

再根据(12)与(15)式,对函数  $G$  以及二阶微商  $\frac{d^2G}{dz^2}$  的表达式进行数值计算. 其结果见图(2)及图(3).

由此看出,当  $\beta < \beta_m^*$  时有两种情况,当水滴形状取  $1 \leq x < x^*$  时 ( $x^*$  是对应于  $\beta_m^*$

的状态)  $\frac{d^2G}{dz^2} > 0$ , 则水滴的能量取极小值, 即处于稳定平衡状态。而当  $x > x^*$  时  $\frac{d^2G}{dz^2} < 0$ , 则水滴的能量取极大值, 即处于不稳定平衡。同时, 根据图 1 可以看出, 当水滴处在稳定

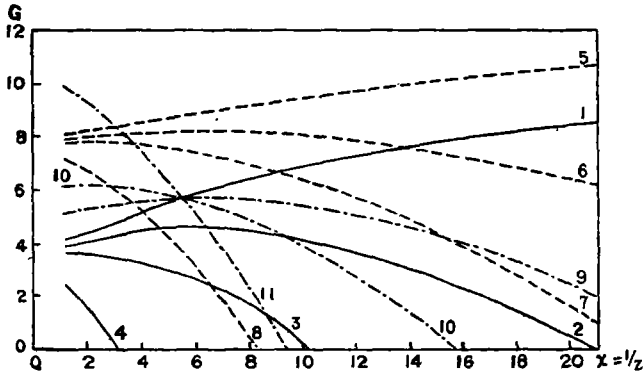


图 2 不同  $\alpha$  值下, 无因次能量值  $G$  与旋转椭球形状的关系  
 实线:  $\alpha = 0$ , (1)  $\beta = 0$ , (2)  $\beta = 0.1089$ , (3)  $\beta = \beta_m^* = 0.27$ , (4)  $\beta = 1$ .  
 点线:  $\alpha = 2$ , (5)  $\beta = 0$ , (6)  $\beta = 0.055$ , (7)  $\beta = \beta_m^* = 0.12$ , (8)  $\beta = 0.5$ .  
 断线:  $\alpha = 6.75\beta$  (取  $q = \pm 3ER^3$ ), (9)  $\beta = 0.09$ , (10)  $\beta = \beta_m^* = 0.18$ , (11)  $\beta = 0.5$ .

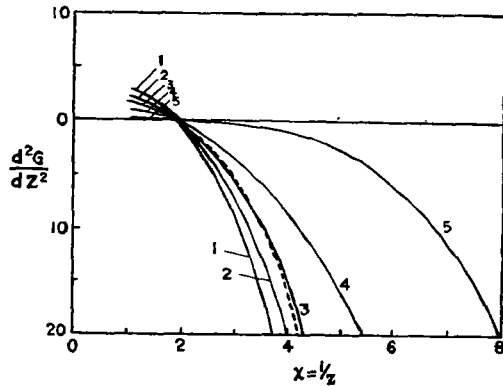


图 3 当  $\beta = \beta_m^*$  时,  $\frac{d^2G}{dz^2}$  与  $x = \frac{l}{z}$  的关系

实线: (1)  $\alpha = 0$ , (2)  $\alpha = 0.5$ , (3)  $\alpha = 1$ , (4)  $\alpha = 2$ , (5)  $\alpha = 3$ ,  
 点线:  $\alpha = 6.75\beta$  (取  $q = \pm 3ER^3$ ).

代入(13)式, 得到临界场强值  $E^*$  的表达式:

$$E^* = \sqrt{2.568\sigma/R - 0.05722 \frac{q^2}{R^4}} \quad (20)$$

表 1  $\beta_m^*$  与  $\alpha$  值的关系

$\alpha$	0	0.5	1	2	3	3.25	3.5
$\beta_m^*$	0.2735	0.2343	0.1963	0.1200	0.0455	0.0295	0.0178

平衡状态时, 其长轴和短轴的比值  $x$  不能超过 2。

因此,  $\beta_m^*$  是水滴形状稳定, 或者不稳定的临界判据。当  $\beta > \beta_m^*$  时水滴形状不可能达到稳定, 而最后必然破碎。当  $\beta_m < \beta_m^*$  时若水滴起始状态是球形, 则水滴就可以取  $x < x^*$  的稳定平衡状态。若由于其他外因使水滴起始的  $x_1 > x^*$  ( $x_1$  是对应于  $\beta_m^*$  的状态值), 则即使在  $\beta_m < \beta_m^*$  条件下, 水滴形状也是不稳定的。

在表 1 与图 4 中, 给出临界值  $\beta_m^*$  与  $\alpha$  的关系。

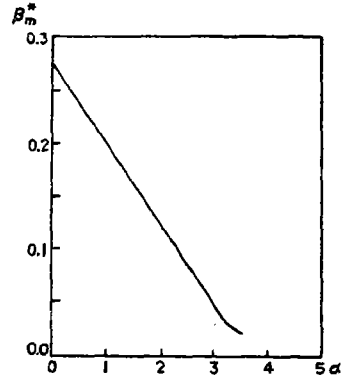


图 4  $\beta_m^*$  与  $\alpha$  间的关系

由此, 得到  $\beta_m^*$  与  $\alpha$  关系的表达式有以下形式:

$$\beta_m^* = 0.2725 - 0.07629\alpha \quad (19)$$

这里  $E^*$  的单位是伏/厘米。

### 討論三种具体情况:

#### 1. 水滴不荷电

这时  $\alpha = 0$  而式(20)为:

$$E^* = \sqrt{2.568\sigma/R}.$$

对水来说可令  $\sigma = 72$ , 则有:

$$E^*\sqrt{R} = 4077. \quad (21)$$

#### 2. 假如水滴周围介质中只存在有单极离子, 则在电场中水滴荷电量 $q$ 为<sup>[6]</sup>:

$$q = \pm 3ER^2 \text{ (正、负号取决于正的还是负的离子)}.$$

此时:

$$E^*\sqrt{R} = 3315. \quad (22)$$

#### 3. 假如水滴荷电量等于它的极限值:

这时:

$$q = 100R^2.$$

则:

$$E^* = \sqrt{2.568 \frac{\sigma}{R} - 572.2}, \quad (R < 0.35 \text{ 厘米}).$$

以上这三种情况  $E^*$  与  $R$  的计算结果见图 5.

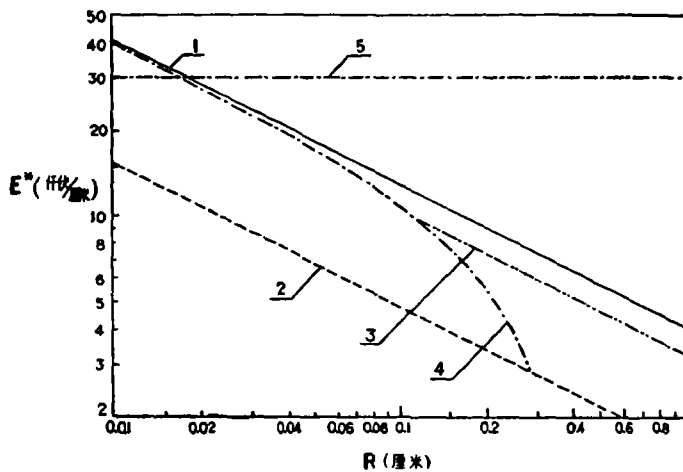


图 5 不同半径荷电水滴发生不稳定形变所需的临界场强

- (1)  $q = 0$ , (2) 公式(19)应用的下限, (3)  $q = 3ER^2$ , (4)  $q = 100R^2$ ,  
(5)  $E = 30$  千伏/厘米。

## 四、结果的讨论

### 1. Macky 实验公式:

$$E^*\sqrt{R} = 3875.$$

这个数值介于(三)中的情况 1 与 2 之间, 比情况 1 小 5.2%, 而比情况 2 大 16%。事实上,

Macky 实验中水滴不可能是完全中性的，虽然 Macky 沒有测定其实驗水滴的荷电量，但其值必然在(三)的情况 1 与情况 2 中的荷电量之間。因此可以說，我們的理論結果和 Macky 的实验結果还是很好符合的。

由此可見，水滴荷电量愈大，半径愈大，則其破碎时的临界場強值愈低。在場強值等于 20 仟伏/厘米时，半径大于 400 微米的水滴就破碎；当場強值为 10 仟伏/厘米时，半径大于 0.11 厘米的水滴才破碎；而半径大于 0.22 厘米的水滴，其破碎所需的临界場強值只有 5 仟伏/厘米。最后，半径小于 180 微米的水滴是不可能破碎的。

2. 因为水滴在电場中破碎时形成火花放电，則在雷雨云中，只要場強达到 5 仟伏/厘米，就可以有形成閃电的可能。当然，由水滴表面形成的火花放电如何触发云中大面积閃电的机制还有待于进一步研究。但无论如何，大水滴的存在对云中閃电形成的影响是存在的。

3. 根据 Macky 实验测定，水滴破碎时放电的电流值可达到 10 微安到 30 微安。假如云中雨滴浓度是 100 个/米<sup>3</sup>，則由于水滴破碎放电，单位時間內在单位体积中可以形成  $6 \cdot 10^9$  到  $1.8 \cdot 10^{10}$  离子/厘米<sup>3</sup>，无疑地，这大大增加了雷雨云中的导电率。

4. 根据 Atlas<sup>[7]</sup> 等人計算結果，旋轉长椭球对雷达波的散射截面积比等容的球状水滴要大很多(见图 6)。

这样再用我們关于水滴变形計算結果，在不稳定平衡到达以前，水滴变形的长軸与短軸的比值不会超过 2；也就是說，其散射截面积不能超过 2 倍。但一旦达到临界場強时，水滴即达到不稳定平衡，而其  $x = \frac{c}{a}$  值完全可以达到 10。这时，散射截面积可以增加到 10 倍；也就是說，雷达回波強度会突然增加 20 倍。然后水滴破碎，其体积在 1/2—1.5 秒內(根据 Macky 实验)减少一半，这时散射截面积以及雷达回波強度又迅速回到原来数值。因此，在解释雷雨云中雷达回波时，有必要考慮到水滴在电場中形变与破碎所引起的影响。

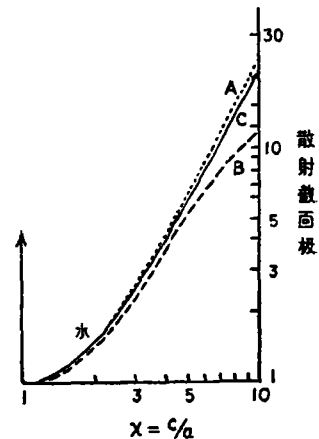


图 6 长椭球水滴对雷达波的散射截面积

A— $\lambda$ (波长) = 10 厘米  
B— $\lambda$  = 1.25 厘米  
C— $\lambda$  = 3.20 厘米

## 参 考 文 献

- [1] Macky, W., *Proc. Roy. Soc. A.* **133** (1931), No. 822.
- [2] Rayleigh, L., *Phil. Mag.* **14** (1882), 184.
- [3] Ailam, G. and Gallily, I., *The Physics of fluids* **5** (1962), No. 5.
- [4] Лавдау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., *Электродинамика сплошных сред*, 1957.
- [5] Stratton, J. A., *Electromagnetic theory*, 1941.
- [6] Красногорская, Н. В., *Изв. АН СССР. сер. геофиз.*, № 1, 1960.
- [7] Atlas, D. and Kerker, M., Hirschfeld W., *Jour. Atm. Terr. Phys.* **3** (1953), 108.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЛЯ РАЗБРЫЗГИВАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ

Чжоу Сю-цзи

(Институт геофизики АН КНР)

Цзин Жэнь-цзюнь

(Научно-технический университет КНР)

### Резюме

Теоретическим путем дается критерий неустойчивости формы заряженной капли в электрическом поле. Полученные результаты хорошо совпадают с экспериментальными данными Макки. Показано, что в грозовых облаках, при электрическом поле с напряженностью 5000 в/см, на поверхности дождевых капель уже происходит искровой разряд. Это возможно играет большую роль для образования внутриоблачной молний. При этом, в облаках концентрация ионов увеличивается до величины  $10^{10}$  см<sup>3</sup>, что создает большую проводимость среды. Наконец, в результате неустойчивой деформации дождевых капель при критическом электрическом поле интенсивность радиоэхо длиной волны 3,2 см внезапно усиливается на 20 раз.