

波状基本气流中的若干扰动动力学问题*

叶笃正

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

純粹的平直西风是非常少見的。在平均图上大槽大脊非常清楚。这些平均槽脊表示在大气中有着位置比較稳定不变的大型扰动。波譜分析的研究証实了这一点。因此环流的最基本状态是波状的西风带，而不是平直西风带。本文就是研究波状西风带中扰动动力学。由扰动方程中可以看出通过西风带中的基本波动，不同波长的扰动有了相互制約的关系。以平直西风为基本气流的扰动方程中不出現这种現象。

本文給出了若干扰动相互制約的規則，并研究了初值为单波的扰动在波状西风带中的演变过程。理論計算給出了若干符合于观测事实的現象，尤其是一个槽的加深过程頗似 Bjerknes^[9] 輻散槽的模式。

一、引 言

多年来小扰动的方法在动力气象上有着广泛的应用，由此收到了很大的成果。但将小扰动方法用于西风带扰动的研究时，基本气流都取作平直西风。于是綫性化后的方程只能用于討論西风气流对扰动发展的作用。各种扰动之間的相互影响不能由此进行研究，这是一个很大的缺陷。

克服上述缺点的基本方法当然是采用非綫性方程，这也是近年来人們^[1-3] 注意的問題。但是解非綫性方程在数学上是非常困难的，不在很苛刻的条件下很难进行。

然而純粹的平直西风是非常少見的，就拿长年月平均的天气图來說，槽脊也是非常明显的，振幅也并不小。这說明在大气里有着比較稳定的大型槽脊。在大气扰动波譜分析研究中，Barrett^[4]、Haney^[5] 和 Eliassen^[6] 等人都发现了在相当长时間內基本稳定不动的波数为1—3的波动。至少在短时期中，这些不动的波动应当看作基本流場的一部分，而不应当看作西风带中的扰动。这样我們的基本气流就成波状的了。在波状基本气流的模式里，描写小扰动发展的微分方程是变系数的，所以在波动解中会出现不同尺度波动的相互作用，这样可以部分地补救上述的缺陷。本文将用小扰动方法研究波状基本气流中的扰动。

二、基本流場

用小扰动方法研究某一基本流場中的扰动时，基本流場的选取需满足一个条件，就是这个基本流場要满足动力方程組。而这个方程組不能綫性化，因为基本流場不能看作小扰动。可以很容易地看出，一般所采用的基本流場——平直西风 $u(y, z)$ ，满足由运动方程和連續方程等所組成的定常运动方程組。本文将采用的波状基本气流不仅必須满足上

* 本文1962年9月13日收到。1962年10月收到第一次修改稿，1963年10月收到第二次修改稿。

述的条件,同时它还必须能代表经常出现的而又有相对稳定性的流场,或者它能代表月平均流场的情况。下面我们先对这种流场进行分析。

取常定的正压无辐散的模式,我们有下列方程组:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

很容易证明下列的解满足方程(1):

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y) &= -u_b y + 2c \cos(px + qy) = \\ &= -u_b y + c[e^{i(px+qy)} + e^{-i(px+qy)}], \\ gh(x, y) &= A \cos(px + qy + \delta) - f_0 u_b y - \frac{1}{2} \beta u_b y^2 = \\ &= f\psi - 2c u_b q \sin(px + qy) + \frac{1}{2} u_b \beta y^2. \end{aligned} \right\} \left(u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2)$$

其中 u_b 为沿纬圈的平均西风速度, c 值决定于基本流场中波动的强度, p 和 q 分别为纬向和经向波数, $f = f_0 + \beta y$. (2)式中的常数还有下列关系:

$$\beta = u_b(p^2 + q^2), \quad A = 2c\sqrt{f^2 + u_b^2 q^2}, \quad \tan \delta = u_b q / f. \quad (3)$$

(2)式的 $\psi(x, y)$ 或 $h(x, y)$ 都含有两个部分:一个不随经度改变的自南向北降低的场,其上附加了一个波动,东西方向和南北方向上的波数分别为 p 和 q . 当 p 和 q 为异号时,槽线或脊线自东北向西南倾斜;当 p 和 q 为同号时,槽线或脊线自西北向东南倾斜. 选择适当的 A, p, q 和 u_b , 可以使(2)式表示出 500 毫巴平均高度场或流场的主要特征.

(2)式指出流场 $\psi(x, y)$ 和高度场 $h(x, y)$ 不满足地转关系. 它们之间的波动有一位相差 $\delta = \tan^{-1} u_b q / f$ [见(3)式],但是它们满足平衡方程关系:

$$2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} - g \nabla^2 h.$$

(3)式中的第一式指出 p 和 q 满足 Rossby 驻波公式. 冬季 500 毫巴平均图中有 3 个波,波长可设为 10^7 米,于是 $p \cong 0.63 \times 10^{-6}$ 米⁻¹. 取 $u_b = 15$ 米/秒, $\beta = 1.7 \times 10^{-11}$ (米秒)⁻¹, 则可算出 $q \cong 0.86 \times 10^{-6}$ 米⁻¹, 相当于南北方向上的波长为 7300 公里. 当 $u_b < 0$ 或 $u_b > \beta / p^2$ 时, $q^2 < 0$, 南北方向上不再有波动出现. 前者 ($u_b < 0$) 在夏季平流层中可以出现,而后者在冬季平流层上部的高空才会出现(仍取 $p = 0.63 \times 10^{-6}$ 米⁻¹, $\beta = 1.7 \times 10^{-11}$ (米秒)⁻¹, $u_b = \beta / p^2 = 42.5$ 米/秒).

三、波状基本流场中的扰动方程

正压无辐散大气中线性化的无因次扰动涡度方程为:

$$\begin{aligned} \epsilon' \frac{\partial}{\partial \tau_1} \nabla_1^2 \psi_1' - \epsilon \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla_1^2 \psi_1' + \frac{\partial \psi_1'}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla_1^2 \psi_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \nabla_1^2 \psi_1' - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi_1'}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \nabla_1^2 \psi_1 \right] + \frac{\partial \psi_1'}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

这里代角号 1 的量均为无因次的. 它们定义为

$$\left. \begin{aligned} t_1 = t/\tau, \quad (x_1, y_1) = (x, y)/L, \quad (\psi_1, \psi'_1) = (\psi, \psi')/u_b L, \\ (p_1, q_1) = L(p, q), \quad c_1 = c/u_b L. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

τ 和 L 分别为特征时间和特征空间尺度. 特征速度取作为 u_b . 为了方便, 在以下的讨论中去掉了无因次量中的角号 1. (4) 式的 ε' 和 ε 分别为

$$\varepsilon' = (\tau L \beta)^{-1}, \quad \varepsilon = u_b / L^2 \beta. \quad (6)$$

在此符号下, (3) 式的第 1 式变为 $p^2 + q^2 = \varepsilon^{-1}$. 基本流场的流函数变为

$$\psi(x, y) = -y + c[e^{i(px+qy)} + e^{-i(px+qy)}]. \quad (2)'$$

令扰动流函数 $\psi'(x, y, t)$ 为

$$\psi'(x, y, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} A m', n'(\varepsilon) e^{i(m' p x + n' q y)} d m' d n'. \quad (7)$$

因为 ψ' 为实函数, 故 $A_{m', n'} = \bar{A}_{-m', -n'}$. $\bar{A}_{-m', -n'}$ 为 $A_{-m', -n'}$ 的共轭复数, 将 (2)' 和 (7) 式代入 (4) 式, 得:

$$a_n \frac{d A_{a+n, \delta+n}}{dt} + b_n A_{a+n, \delta+n} + c_{n-1} A_{a+n-1, \delta+n-1} - c_{n+1} A_{a+n+1, \delta+n+1} = 0. \quad (8)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \varepsilon' [(\alpha + n)^2 p^2 + (\delta + n)^2 q^2], \\ b_n &= i p (\alpha + n) [\{(\alpha + n)^2 p^2 + (\delta + n)^2 q^2\} \varepsilon - 1], \\ c_n &= c p q (\alpha - \delta) [\{(\alpha + n)^2 p^2 + (\delta + n)^2 q^2\} \varepsilon - 1]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对于任意一对 (α, δ) 值, (8) 式表示无穷的一阶常微分方程组. 同时 α 和 δ 又是任意的, 所以类似于 (8) 式的微分方程组又有无穷个. 但是可以看出这无穷个方程组是相互独立的. 所以对于任何一个方程组可以独立地进行分析.

(8) 式的一个重要特点就是在波状的基本流场里, 在线性条件下, 不同波长的波 (指扰动波, 以下同) 有了相互作用, 这是在以平直西风为基本气流的模式中所不存在的. 因为波动之间有了相互作用, 新波就可以被激发出来. 旧波也可以被消灭.

四、波的相互作用——新波的激发

给了扰动的初值就可以由 (8) 式解出扰动以后的演变. 因为无穷个类似 (8) 式的微分方程组是相互独立的. 当初值为一单波 (α_1, δ_1) 时, 则在这无穷个类似 (8) 式的方程组中只取一个即可. 如初值为 n 种波动 $[(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_2, \delta_2), \dots, (\alpha_n, \delta_n)]$ 所组成, 则应解 n 个类似 (8) 式的方程组, 但可以相互独立地解这 n 个方程组. 同时如在初值扰动中任何两个波动 $[(\alpha_i, \delta_i)$ 和 $(\alpha_j, \delta_j)]$ 的 $\alpha_i - \alpha_j = \delta_i - \delta_j$ 时, 则由 (8) 式可以看出它们属于同一个方程组, 因而应解的方程组的数目中减少一个.

因为无穷个类似 (8) 式的方程组是相互独立的, 所以只讨论其中的一个组是不会失去一般性的. 令初始扰动为一单波,

$$\psi'_{t=0} = 2B \cos(\alpha p x + \delta q y) = B[e^{i(\alpha p x + \delta q y)} + e^{-i(\alpha p x + \delta q y)}]. \quad (10)$$

把 (8) 式写成时间的差分形式, 再进行数值解是很方便的. (8) 式的差分形式为:

$$A_{\alpha+n, \delta+n}^{j \Delta t} = A_{\alpha+n, \delta+n}^{(j-1) \Delta t} - \frac{b_n}{a_n} A_{\alpha+n, \delta+n}^{(j-1) \Delta t} \Delta t - \left(\frac{c_{n-1}}{a_n} A_{\alpha+n-1, \delta+n-1}^{(j-1) \Delta t} - \frac{c_{n+1}}{a_n} A_{\alpha+n+1, \delta+n+1}^{(j-1) \Delta t} \right) \Delta t. \quad (11)$$

利用初始条件(10)式,可以求出不同时刻的扰动如下:

$$\left. \begin{aligned} t = 0: & A_{\alpha, \delta} = B, A_{\alpha+n, \delta+n} = 0, (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \\ t = \Delta t: & A_{\alpha+1, \delta+1} = -\frac{c_0}{a_1} B \Delta t, A_{\alpha, \delta} = B \left(1 - \frac{b_0}{a_0} \Delta t \right), \\ & A_{\alpha-1, \delta-1} = \frac{c_0}{a_{-1}} B \Delta t, A_{\alpha+n, \delta+n} = 0, (n = \pm 2, \pm 3, \dots), \\ t = 2\Delta t: & A_{\alpha+2, \delta+2} = \frac{c_1 c_0}{a_2 a_1} B (\Delta t)^2, A_{\alpha+1, \delta+1} = \left[\left(\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_1} \right) \Delta t - 2 \right] \frac{c_0}{a_1} B (\Delta t), \\ & A_{\alpha, \delta} = \left\{ \left(1 - \frac{b_0}{a_0} \Delta t \right)^2 - \left(\frac{c_{-1} c_0}{a_{-1} a_0} + \frac{c_0 c_1}{a_0 a_1} \right) (\Delta t)^2 \right\} B, \\ & A_{\alpha-1, \delta-1} = \left\{ 2 - \left(\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_{-1}}{a_{-1}} \right) \Delta t \right\} \frac{c_0}{a_{-1}} B \Delta t, A_{\alpha-2, \delta-2} = \frac{c_{-1} c_0}{a_{-2} a_{-1}} B (\Delta t)^2, \\ & A_{\alpha+n, \delta+n} = 0, (n = \pm 3, \pm 4, \dots). \end{aligned} \right\} (12)$$

将 α 和 δ 变成 $-\alpha$ 和 $-\delta$, 我們还有另一組扰动, 即 $A_{-\alpha+n, -\delta+n}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 利用 $A_{\alpha+n, \delta+n} = \bar{A}_{-\alpha-n, -\delta-n}$ 的关系, 可以立即求出 $A_{-\alpha+n, -\delta+n}$, 这里不再写出。

由(12)式可以看出, 被激发的新波出現的速率是不同的, 两个临近初始扰动波长的波最先出現, 强度也最大, 然后逐渐向长波和短波两边激发。由于 $A_{\alpha \pm n, \delta \pm n}$ 都正比于 $(\Delta t)^n$, 这里 t 是无因次量, 其值为 1 左右, 故 $\Delta t \ll 1$ 。所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $A_{\alpha \pm n, \delta \pm n} \rightarrow 0$, 亦即离初始扰动波长愈远的波愈弱。事实上只有临近初始扰动波长的几个波比較重要, 其余的新生波是可以略去的。

扰动的槽或脊綫是由西北向东南傾斜的(称倒傾), 或由东北向西南傾斜(称正傾), 决定于 α 和 δ 的符号。由(12)式可以看出, 正傾的扰动所激发出的扰动可以是倒傾或正傾的, 同样倒傾的扰动也可以激发出正傾或倒傾的扰动。所激发出的扰动的結構虽无一定, 但任意新生扰动的东西方向波数 $\alpha + n$ 与南北方向的波数 $\delta + n$ 之差永为 $\alpha - \delta$, 和初值扰动的相等。

五、波的相互作用——与基本流場結構和扰动結構的关系

上节討論了由于波的相互作用而产生的新波。这节我們將討論扰动的相互作用与基本流場結構和扰动結構的关系。已經指出过, 在(8)式中, 属于不同的 (α, δ) 組的波动是相互独立的, 不能相互作用。因此不是任意两个扰动 [如 (α_1, δ_1) 和 (α_2, δ_2)] 都有相互作用。只有当 $\alpha_1 - \alpha_2$ 和 $\delta_1 - \delta_2$ 等于同一整数时, 这两个扰动才能有相互的作用。

当 $c_n = 0$ 时,

$$A_{\alpha+n, \delta+n} = A e^{-\frac{b_n}{a_n} t}, \text{ 或 } \psi_{\alpha+n, \delta+n} = A e^{i[(\alpha+n)px + (\delta+n)qy] + \frac{b_n}{a_n} t}. \quad (13)$$

把(9)式中的 a_n 和 b_n 的表达式代入上式, 就可以看出(13)式給出的就是 Rossby 波。此

时波与波之間不再有相互作用。

$c_n = 0$ 的条件有以下几个：首先 $c = 0$ 或 $p = 0$ ，这时基本气流回到了平直西风的状态，不再为波（东西方向的波）状，此时波与波的相互作用自然也不存在了。再有当 $\alpha = \delta$ 时，即当两个扰动的沿緯圈方向的波长和沿經圈方向的波长之比相等（都等于 $|q|/|p|$ ），而且它們的槽綫或脊綫的傾斜方向相同时，它們无相互作用。这和 Platzman^[7] 所謂的“选择規律”（selection rules）是相同的。

我們可以把 c_n 的数值作为波与波之間相互作用强度的一种度量。 c_n 之值愈大，波动之間的相互作用愈大； c_n 值愈小，則相互作用愈小。 c_n 正比于 c ，所以基本气流波动的强度愈大，則不同波长的扰动的相互作用愈大。 c_n 还正比于 $pq = p\sqrt{\beta/u_0 - p^2}$ （参看（3）式），可以求出当 $2p^2 = \beta/u_0$ 时， $|pq|$ 之值为最大。一般可取 $u_0 = 15$ 米/秒和 $\beta = 1.7 \times 10^{-11}$ 米⁻¹ 秒⁻¹，此时 $p = 0.73 \times 10^{-6}$ 米⁻¹，或 $L_x = 8.5 \times 10^6$ 米，相当于沿 45° 緯圈上有 3—4 个波。这表示当基本流場的波动数目为 3—4 时，其上的不同波长扰动的相互作用最大。3—4 正是大气平均流場的波动数目，所以北半球大气平均流場是适于扰动的相互作用。

扰动的相互作用的大小和扰动的結構也有密切关系。 c_n 正比于 $\alpha - \delta$ 。当 p 和 q 异号时（即基本流場的槽脊自东北向西南傾斜）， α 和 δ 若为同号，扰动的槽綫或脊綫自东北向西南傾斜；两者为异号时，槽綫或脊綫自西北向东南傾斜。所以自西北向东南傾斜的扰动相互作用大于自东北向西南傾斜的扰动。当 p 和 q 为同号时，反之。所以和基本流場槽脊傾斜相同的扰动相互作用小，和基本流場槽脊傾斜相异的扰动相互作用大。当 $\alpha = \delta$ 时，則扰动无相互作用。

六、波状基本气流中扰动的演变

由于和基本气流中波动的相互作用，一个扰动可以激发出新的扰动。所以如果在一个波状的基本气流上附加一个扰动，則扰动随着時間将有变化，于是整个流場将发生变动。这是在平直气流中沒有的現象。現在我們就討論这个現象。

在給定的初始条件下，解（8）式就得到这个問題的解答。（8）式是一个无穷一阶常微分方程組。它的准确解析解是很困难的。不过从它的数值解中我們看到一个扰动所激发出来的新扰动，主要限于波长和原有扰动波长相邻近的两个波中。因此在初值为一单波时，作为第一近似，我們可以仅保留这两个新激发的波，略去其余。这样（8）式便为：

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{dA_{a+1, \delta+1}}{dt} + b_1 A_{a+1, \delta+1} + c A_{a, \delta} &= 0, \\ a_0 \frac{dA_{a, \delta}}{dt} + b_0 A_{a, \delta} + c_{-1} A_{a-1, \delta-1} - c_1 A_{a+1, \delta+1} &= 0, \\ a_{-1} \frac{dA_{a-1, \delta-1}}{dt} + b_{-1} A_{a-1, \delta-1} - c_0 A_{a, \delta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

現今初始扰动为：

$$t = 0, \quad A_{a, \delta} = F, \quad (A_{a+1, \delta+1} = A_{a-1, \delta-1} = 0).$$

并取解的形式为：

$$(A_{a+1, \delta+1}, A_{a, \delta}, A_{a-1, \delta-1}) = (x, y, z)e^{i\lambda t}$$

则(14)式的解为:

$$\left. \begin{aligned} A_{a+1, \delta+1}(t) &= a_{11}e^{i\lambda_1 t} + a_{12}e^{i\lambda_2 t} + a_{13}e^{i\lambda_3 t}, \\ A_{a, \delta}(t) &= a_{01}e^{i\lambda_1 t} + a_{02}e^{i\lambda_2 t} + a_{03}e^{i\lambda_3 t}, \\ A_{a-1, \delta-1}(t) &= a_{-11}e^{i\lambda_1 t} + a_{-12}e^{i\lambda_2 t} + a_{-13}e^{i\lambda_3 t}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

这里 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 和 a_{ij} 的表达式不再给出, 它们都可以很容易地由(13)–(14)两式找出。

于是以(2)' 式为基本流场, 初值为单波的扰动的流函数表达式可以写成:

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, t) &= A_{a+1, \delta+1}(t)e^{i[(a+1)px + (\delta+1)qy]} + A_{a-1, \delta-1}(t)e^{-i[(a+1)px + (\delta+1)qy]} + \\ &+ A_{a, \delta}(t)e^{i[apx + \delta qy]} + A_{-a, -\delta}(t)e^{-i[apx + \delta qy]} + \\ &+ A_{a-1, \delta-1}(t)e^{i[(a-1)px + (\delta-1)qy]} + A_{-a+1, -\delta+1}(t)e^{-i[(a-1)px + (\delta-1)qy]}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $A_{-a-1, -\delta-1}$, $A_{-a, -\delta}$ 和 $A_{-a+1, -\delta+1}$ 分别为 $A_{a+1, \delta+1}$, $A_{a, \delta}$ 和 $A_{a-1, \delta-1}$ 的共轭复数, 而 $A_{a+1, \delta+1}$, $A_{a, \delta}$ 和 $A_{a-1, \delta-1}$ 的表达式由(15)式给出。

整个流场的形式得由(2)'和(16)式之和给出, 这当然是无因次的。

从新近出版的 500 毫巴平均图^[8]可以看出这层的平均西风可以定为 15 米/秒, 东西方向上有三个波, 在中纬度它的波长可以定为 8000 公里, 它的振幅用流函数单位表示, 可以取 $c = 3.5 \times 10^{-6}$ 米²秒⁻¹, 再取 $\beta = 1.3 \times 10^{-11}$ (米秒)⁻¹。由这些参数可以求得 $p = 0.78 \times 10^6$ 米⁻¹, 和 $q = -0.5 \times 10^{-6}$ 米⁻¹。这里选取 p 和 q 为异号, 是为了使平均流场中的槽脊自东北向西南倾斜, 基本流场的形式如图 1。

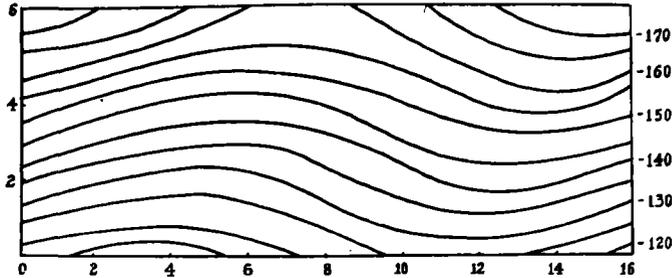


图 1 基本流场流线图

(图中 x 和 y 坐标都是 500 公里为单位, 流函数单位为米²/秒)

对于初始扰动, $\psi'(x, y, 0) = F[e^{i(apx + \delta qy)} + e^{-i(apx + \delta qy)}] = 2F \cos(apx + \delta qy)$, 取以下参数: $a = 2$, $\delta = -3$, $F = -2.0 \times 10^6$ 米²/秒, a 和 δ 的异号得使扰动轴线自西北向东南倾斜。这虽和一般的情况不合, 但是这将使如 Bjerknes^[9] “辐散”槽形式的扰动出现。关于“辐散”槽发展的描述是我们的主要兴趣之一。

流场的初始状态为基本流场与初扰动之和, 见图 2a。在我们所注意的区域中的槽脊都给予了符号, 以便于有关它们发展的讨论。从图中我们看到在初始流场中有一急流, 在它的出口区有一自西北向东南倾斜的槽线 QQ' 。 QQ' 位于流线的疏散区中, 槽后的风速远大于槽前的风速, 这颇象一般所称的“辐散”槽^[9]的形式。

到了 $t = 1 \times 10^5$ 秒时, 流场演变成图 2b。和图 2a 相比, 一个明显的发展就是新的扰动出现了, 例如 KK' 脊就是图 2a 中没有的, 此外旧有的系统都向东移了。不同的系统移速不同, 但都在 500—1000 公里/10⁵ 秒之间。回到“辐散槽” QQ' , 我们看到它也向东移

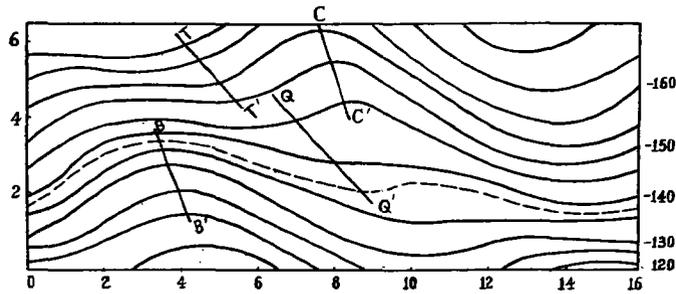


图 2a 初始流場(扰动流場和基本流場之和)
(图中斜綫表示槽綫或脊綫, 座标单位同图 1)

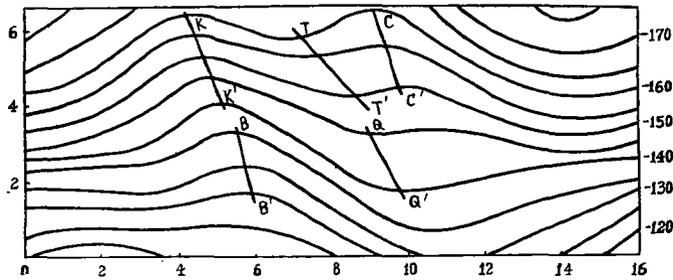


图 2b $t = 10^5$ 秒时的流場
(其他說明同图 2a)

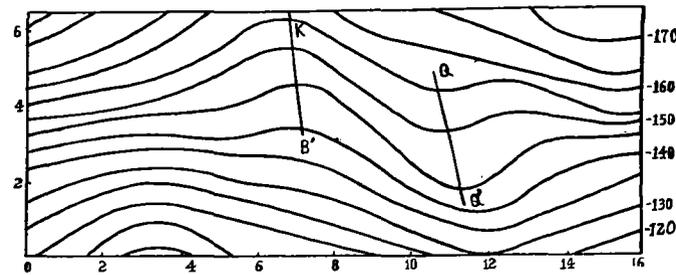


图 2c $t = 2 \times 10^5$ 秒时的流場
(其他說明同图 2a)

了,而且稍有发展。在它的北偏西另有一槽(TT'),可能是由前一日(图 2a)的 TT' 槽发展出来的。这两个槽现在仍然都处于流綫疏散区中,槽后的风速大于槽前。槽 QQ' 之西为脊 BB' , TT' 之西为脊 KK' 。前者已出现于图 2a,而后者在图 2a 中頗不显著。

到了 $t = 2 \cdot 10^5$ 秒,流場演变成图 2c。和图 2b 相比,我們看出系統繼續向东移,由于各个系統之間移速的差异,原在不同緯度带的两个系統,现在变成了一个,如脊 KB' 就是由 $t = 1 \times 10^5$ 秒时(图 2b)的 KK' 和 BB' 两个脊合成的。比較图 2c 的 KB' 和图 2b 的 KK' 与 BB' , 可以发现在它們合并过程中,强度增加了,这不但表现于振幅方面,同时它表现在脊上的流函数数值上。也有的系統在东移过程中强度减弱了,甚至于消灭。 $t = 1 \times 10^5$ 秒(图 2b)时的脊 CC' 在图 2c 就消灭了,它的消灭是因为它移进了基本流場中的大槽。再讓我們来看两个“輻散”槽的发展,在东移的过程中,它們已合并为一,强

度大为增加,也向南加深了许多,北部则有削弱。与此同时槽线由西北向东南的倾斜变得更加南北向了,系统轴线这样的演变,不仅对这“辐散”槽如此,对其他系统也是如此。

从以上流场演变过程我们可以看出,我们的许多理论计算结果和天气实况是相合的。如从天气实际中,我们知道两个相邻的纬度带中的槽或脊相遇一处时,它们会加深。一个短波槽(或脊)移进一个长波脊(或槽)时,短波槽(或脊)将会减弱或消失。这些现象都在我们的理论计算中出现了。这里尤其引起我们注意的是“辐散”槽的加深,它颇合乎 Bjerknes^[9] 由天气经验总结出来的“辐散”槽的模式(图 3)。在图 3 里“辐散”槽是自西北向东南倾斜的,位于急流的出口区,槽后的风速大于槽前的风速,这些现象都在我们的图 2a 和 2b 表现了出来。当然这里“辐散”槽发展的机制和 Bjerknes 所提的不同。Bjerknes 是以辐散上下分布为出发点的,而我们的模式是无辐散的。所以图 2a—2c 中“辐散”槽发展是由于涡度平流的原故。



图 3 Bjerknes^[9] 辐散槽模式

由以上的讨论,可以看出理论计算出的流场演变过程和天气实际有许多共同之处。由此可以相信在大气中不同波长的扰动的相互作用是重要的,同时本文所提出的模式是适于研究 500 毫巴(接近无辐散层)的环流演变过程。

七、波的相互作用与斜压作用的比较

以上讨论已经指出波的相互作用在大气运动中的重要性。为了作进一步的说明,我们把它和斜压作用相比。取两层模式,以 1 和 3 分别表示上层和下层,则我们有类似(8)式的以下两个方程:

$$\left. \begin{aligned} B_n \frac{dA_{1\alpha+n,\delta+n}}{dt} + D_n A_{1\alpha+n,\delta+n} + E_n A_{3\alpha+n,\delta+n} + F_{n-1} A_{1\alpha+n-1,\delta+n-1} + \\ + G_{n+1} A_{1\alpha+n+1,\delta+n+1} + H_{n-1} A_{3\alpha+n-1,\delta+n-1} + I_{n+1} A_{3\alpha+n+1,\delta+n+1} = 0, \\ B_n \frac{dA_{3\alpha+n,\delta+n}}{dt} + J_n A_{3\alpha+n,\delta+n} + K_n A_{1\alpha+n,\delta+n} + L_{n-1} A_{1\alpha+n-1,\delta+n-1} + \\ + M_{n+1} A_{1\alpha+n+1,\delta+n+1} + N_{n-1} A_{3\alpha+n-1,\delta+n-1} + O_{n+1} A_{3\alpha+n+1,\delta+n+1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

其中 $B_n \cdots O_{n+1}$ 等是 $\varepsilon', \varepsilon, c_1, c_3, p, q, n, \alpha, \delta, \dots$ 以及 λ^2, u_1 和 u_3 等函数 ($\lambda^2 = \beta = [\theta_2 / (\theta_1 - \theta_3)] [\psi_1 - \psi_3]^{-1}$ 为两层模式中一个参数)。 (17) 式中前 3 项是一般两层模式所共有的项。包含有 E_n 和 K_n 的两项是通过同一波长扰动的上下层的相互影响,也是一般的斜压作用。 $F_{n-1}, G_{n+1}, N_{n-1}$ 和 O_{n+1} 四项表示同一层上不同波长的扰动的相互作用。 $H_{n-1}, I_{n+1}, L_{n-1}$ 和 M_{n+1} 四项表示不同层次上不同波长的扰动的相互作用。这八项是在一般线性化斜压模式中不出现的。

因为(17)式只有第一項为時間导数項，所以可把其他各項都看作对扰动发展的作用項。同时方程又是无因次的，所以各項对扰动发展作用的大小和它們的系数值成正比。比較各系数值即可看出各种作用对扰动发展的相对重要性。采取了大气中經常出現的各种参数值，我們对不同的 $\alpha + n$ 和 $\delta + n$ 計算了 $D_n \cdots O_{n+1}$ 。結果发现 $|F_{n-1}|$ 和 $|G_{n+1}|$ 比 $|E_n|$ 大得許多。同样 $|N_{n-1}|$ 和 $|O_{n+1}|$ 比 $|K_n|$ 大許多；波长愈小（即 $\alpha + n$ 大），大得愈多。对于波长为 10^3 公里的扰动， $|F_{n-1}|$ 和 $|G_{n+1}|$ 比 $|E_n|$ 大 5—10 倍， $|N_{n-1}|$ 和 $|O_{n+1}|$ 比 $|K_n|$ 也如此。只有对 $\alpha - \delta \cong 0$ 的扰动， $|E_n|$ 和 $|K_n|$ 才相对的比較大。但無論 $\alpha + n$ 和 $\delta + n$ 之值如何， $|H_{n-1}|$ 、 $|I_{n+1}|$ 、 $|L_{n-1}|$ 和 $|M_{n+1}|$ 都很小，均比 $|E_n|$ 和 $|K_n|$ 小 5—10 倍。这样通过与斜压作用的比較，我們可以进一步地肯定不同波长的波动相互作用的重要性。并且由此可以看出波动的相互作用主要发生于同一层上的波，而不同层次上不同波长的扰动之間的相互作用是不大的。

致謝： 本文第六节中的計算和該节中图 1 和图 2a—2c 的分析是駱美霞同志完成的。她还协助作者弄清楚了本文所采用的模式有无不稳定的問題。特此致謝。

参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., *Tellus* **12** (1960), 243—254.
- [2] Silberman, I., *J. Meteor.*, **11** (1954), 27—34.
- [3] Baer, F. and Platzman, G. W., *J. Meteor.*, **18** (1961), 393—401.
- [4] Barrett, E. W., *Beitr. Phys. Atmos.*, **33** (1961), 280—332.
- [5] Haney, R. L., *Mon. Wea. Rev.*, **89** (1961), 391—396.
- [6] Eliassen, E., *Tellus* **10** (1958), 206—215.
- [7] Platzman, G. W., *J. Meteor.*, **17** (1960), 635—644.
- [8] Lahey, etc, J. F., *Atlas of Wind characteristics for northern hemisphere*, 1958, The Univ. of Wisconsin Press, Madison.
- [9] Bjerknes, J., *Arch. für Met. Geophy. und Bioclimatologie*, Serie A, Bd. 7 40—46.

SOME ASPECTS OF THE DYNAMICS OF DISTURBANCES IN A WAVE-SHAPED BASIC WESTERLY CURRENT

T. C. YEH

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

A purely zonal current is very rare in the atmosphere. In the mean maps planetary waves are very clear. These mean waves indicate that in the atmosphere there exist large-scale disturbances whose geographic positions are fairly fixed. The analysis of the spectra of the atmospheric waves proves this inference. Thus the basic state of the atmospheric circulation should be a wave-shaped westerly current, but not a purely zonal one. This paper thus investigates the dynamics of disturbances in wave-shaped westerlies. The equation for the disturbed motion shows that in such a basic current the disturbances of different wave lengths mutually interact. This does not happen in a purely zonal basic current.

Several rules governing the mutual interaction between the disturbances of different wave lengths are given. The evolution of an initially single-wave disturbance in the wave-shaped basic westerlies is also studied. The theoretical calculations give several phenomena which agree very well with the observations. It is especially worth mentioning that the deepening process of a trough is very like that of the diffluent trough of Bjerknes.