大气运动的特征参数和动力学方程*

曾慶存

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

应用尺度理論及相似性原理分析大气动力学方程,可以揭露各种模式的相互联系并确定其适用范围。在准静力平衡及气压梯度力与柯氏力同量级的假定下,对于无粘性流体的絕热运动,可以确定出三个由外部参数决定的特征尺度:由柯氏参数 l_0 决定的特征时间尺度 l_0^{-1} ,由温度层結及平均温度决定的特征速度尺度 C_0 ,及由此决定的水平距离尺度 $L_0 = C_0 l_0^{-1}$ 。这三个尺度与相应的大气运动的特征尺度之比值 $\epsilon = 1/Tl_0$, $\mu = L_0/L$ 及 $M_a^{-1} = C_0/U$ (或者 $\lambda = M_a \mu$)就是决定大气运动特性的三个基本参数。当 $o(\epsilon) \ll o(1)$ 时,可以只保留方程中量级为 $o(1)$ 的項;运动便是准常定的或者是准地轉的,而发展过程則可用“准地轉模式”描写。当 $o(\epsilon^2) \ll o(1)$ 时,可以只保留量级为 $o(1)$ 及 $o(\epsilon)$ 的項;运动是“准平衡”的,发展过程可用“准平衡模式”描写。在这种情况下,水平散度并不比涡度小一量级,但“平衡方程”仍然有效。故亦可称为“准无水平輻散模式”。而当 $o(\epsilon^2) \geq 1$ 时方程不能簡化,这时便得用完整的方程式組(“完整模式”)。

在这一基础上,建立了一个便于分析和比較各模式性能的统一差分方程組。方程中的系数取不同的值便得到不同模式。

指出按小参数展开法的漸近收敛性。还特別討論了中尺度系統($L < L_0$)动力学方程;指出气压跃变現象可以在 $M_a = U/C_0 \ll 1$ 的情况下发生。

一、引 言

对于具有天气和气候意义的一类大气运动的研究,自从 Кибель^[1]成功地采用准地轉假定以来,已經取得了很大成就。在現代的数值預告和大气环流的研究中广泛地应用准地轉模式。但它也有缺点。首先,作为这种模式的基本假定——准地轉平衡在实际的大气运动条件下往往不能很好地滿足。为了找到更好的风和气压場的关系,人們轉而应用“准无水平輻散”假定^[2,3],或者从滤去快波的充分性条件^[4]出发,而得到了所謂“平衡方程”。但一方面由于数学上的困难和計算上的复杂性,而且由于得出这种模式的基本假定——散度比涡度小一量级,在实际大气运动中也往往不能很好滿足¹⁾,因此限制了这种模

* 本文1962年10月9日收到,同年10月30日收到第一次修改稿,1963年4月收到第二次修改稿。

1) Charney^[2]认为当 Rossby 参数 λ 不小时,散度与涡度之比之量级 $B = (U/c)^2$ 。其中 U, c 分别代表气流速度和层結大气重力惯性波传播速度。Монин^[3]則从准无水平輻散假定出发推出这关系。用实测的 U, c 值可以算得 $B \approx 0.2 - 0.01$ 。但这种假定及理論推論不能认为是正确的。我們可以推出(見本文),在一般情况下, B 应等于 ϵ 或者 λ 。 $(\epsilon$ ——Кибель参数, λ ——Rossby参数)。大量的风場个例分析也表明,一般來說,散度的绝对值虽比涡度的绝对值小一些,但并不小一量级,并且 λ 愈大的地区 B 就愈大。

Thompson^[4]曾从迭代过程的意义上說明其斜压平衡方程模式为高一級近似,但尚未从理論上說明当 λ 或者 B 不太小时是可用的。其后 Gambo^[5]用按 B 展开法說明平衡方程模式是高一級近似,不过其所得无因次方程中含有过多的无因次参数,这妨碍了对问题的分析。

式的实际应用,而且应用斜压大气“平衡方程模式”的合理性也一直沒解决而有不少怀疑。随着电子计算机的进展,近来人们对应用原始方程的研究的兴趣正如雨后春笋。可是在这些研究中,主要致力于建立稳定的差分格式上;它的结构与一般的流体力学问题并无两样,气象问题的特点得不到应有的反映。

地球自转是影响大气运动的最基本的因子之一。从广义上说,准地转性是大气运动的基本特点之一^[6]。此外,许多实例分析也表明,平衡方程在散度并不太小的情况下仍然比较接近实际大气的流场和气压场的关系。各种模式之间有着一定的相互关系和区别。如果对这些没有足够的认识也会使应用原始方程带来盲目性。因此如何用统一的观点(或者统一的参数)来研究各类大气运动及大气模式之间的联系和异同,从而确定模式的性能及其适用范围,看来,不仅对于数值预告,同时对进一步认识大气运动的规律性都是非常重要的。

我们可以应用尺度理论及相似性原理得到这些统一的参数。

有了统一的参数和找到诸模式相互转换的规律,我们就可以设计出统一的计算方案,比如在电子计算机上编出统一的程序;改变某些参数的值就得到不同模式。这样,由于计算方案的不同,从而计算误差及精度不一,而使我们难于比较不同模式结果的困难就可以克服。这对进一步了解模式的性能和揭露各个因子对特定的大气运动型的发生发展的作用,无疑也是有益的。

二、参数的确定和无因次方程

研究准静力平衡情况下的动力学方程式组^[7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - l v = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \equiv A_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + l u = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \equiv A_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial t} + c^2 \omega = - \zeta^2 \left(u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \zeta} \right) - \zeta \omega \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \equiv A_3. \quad (4)$$

其中 $\phi \equiv g(z - \bar{z})$ ——等压面($p = \text{常数}$)的扰动重力位势, $\omega \equiv \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt}$, $\zeta = p/p_0$;

p_0 ——地面气压, 取作 1000 毫巴; $c^2 = \frac{\gamma_a - \bar{\gamma}}{g} R^2 \bar{T}$, $\gamma_a, \bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\bar{z})$ 分别代表绝热垂直减温率及实际大气平均状况下的垂直减温率, $\bar{T} = \bar{T}(\bar{z})$ 为平均状况下的气温, 及 $\bar{z}$ 为平均状况下的等压面高度。 c 即为斜压大气点源重力内波的传播速度。 l 为柯氏参数。其余符号如常。

方程(4)与常见的绝热方程在形式上稍有不同。一般写成^[7]:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial t} + \zeta^2 \left(u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \zeta} \right) + \frac{\gamma_a - \bar{\gamma}}{g} R^2 T \omega = 0. \quad (4a)$$

因为

$$-\gamma \frac{R^2 T}{g} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{R^2 T}{g} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial g z}{\partial \zeta} \right) \cdot \zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial g \bar{z}}{\partial \zeta} \right) \zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \cdot \zeta =$$

$$= -\bar{\gamma} \frac{R^2 \bar{T}}{g} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \cdot \zeta,$$

并且一般总有 $(T - \bar{T})/\bar{T} \ll 1$, 故有 $\gamma_a \frac{R^2}{g} T \omega \approx \gamma_a \frac{R^2}{g} \bar{T} \omega^{(1)}$. 故有 $\frac{\gamma_a - \gamma}{g} R^2 T \omega \approx \frac{\gamma_a - \bar{\gamma}}{g} \times$
 $\times R^2 \bar{T} \omega + \zeta \omega \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$. 代入(4a)即得(4)式.

引入相应的特征量 T, L, U, Ω, Φ 等如下: $t = T t_1, (x, y) = L(x_1, y_1), (u, v) =$
 $U(u_1, v_1), \omega = \frac{\Omega}{p_0} \omega_1, \phi = \Phi \phi_1$. 及取 $l = l_0 l_1, c^2 = C_0^2 c_1^2$. 此时无因次量及其无因次微
 商的量级就看作是 1 (注意到, 我们取 p_0 作为 p 的特征值, 这相当于假定过程发生于整层
 大气或者至少在整个对流层内).

由于大气运动是非自模拟的 (неавтомодельные), 在无因次方程中将包含有由这些
 特征量所组成的无因次参数. 按这些参数值的数量级就可区分出大气运动的不同类别.

l 是外部参数. 同样, 如果注意到平均层结状态及平均温度主要是由大气的热量收
 支或即非绝热过程所决定的, 那么, 当我们只讨论大气运动的动力学时, 我们可以把 c^2 也
 看作外部参数, 并且可以令 $c_1^2 = 1^{(2)}$. 此外, 我们主要是研究受地球自转影响的一类大气
 运动, 因此我们取气压梯度力与柯氏力同量级, 即:

$$\Phi = L l_0 U. \quad (5)$$

应用了准静力平衡及(5)式, 相当于不研究纯粹的声波及纯粹的重力波过程.

于是方程(1)–(4)化为以下无因次方程.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - l_1 v_1 = -\lambda \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \varepsilon' \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right) \equiv \lambda a_1, \quad (6) \\ \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + l_1 u_1 = -\lambda \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \varepsilon' \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right) \equiv \lambda a_2, \quad (7) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \varepsilon' \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta} = 0, \quad (8) \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2 \partial t_1} + \frac{\mu^2}{\zeta^2} \varepsilon' \omega_1 = -\lambda \left(u_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta \partial x_1} + v_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta \partial y_1} + \frac{1}{\zeta} \varepsilon' \omega_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right) \equiv \lambda \frac{a_3}{\zeta^2}. \quad (9) \end{array} \right.$$

其中 $\varepsilon = \frac{1}{l_0 T}$ (Кибель 参数), $\lambda = \frac{U}{l_0 L} = \frac{U}{C_0} \mu$ (Rossby 参数), $\mu^2 = \lambda^2 \left(\frac{C_0}{U} \right)^2 = \left(\frac{L_0}{L} \right)^2$

(Обухов 参数), $\varepsilon' = \frac{\Omega}{p_0} \left(\frac{U}{L} \right)^{-1}$ 以及 $L_0 = C_0 l_0^{-1}$. 参数 ε, λ 及 μ^2 的意义与在正压大气情
 况下是一致的^[6]. 亦即 ε 描述发展过程的准地转程度, λ 描述场的非线性影响, 而 μ 即描
 写可压缩性的效应. 此外, ε' 的意义不难明白, 而且它不是一个独立的参数, 因为它总

1) 如果不取这近似, 则(4)式右边需加上一项 $\gamma_a \frac{R}{g} \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \omega$.

2) 这相当于取 $\bar{\gamma}, \bar{T}$ 之平均值 $\bar{\gamma}, \bar{T}$. 这样, 在对流层内所引起的误差是不大的. 如令 $C_1^2 \equiv 1$, 则有 $\mu = c$,
 $\left(\frac{L_0}{L} \right) = \mu(\zeta)$, 并且在以后的方程中将出现含有 $\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}$ 的项, 但这不影响所得的结论.

以 $\varepsilon'\omega_1$ 形式出現, 并且 $\varepsilon'\omega_1 = -\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) d\zeta$. 因此, 大气运动的特性就完全由三个参数 $\varepsilon, \lambda, \mu$ (或者 $\varepsilon, M_a = \frac{U}{C_0}, \mu$) 决定.

我們还可以作如下的解释. 由外部参数可以确定出三个特征尺度: 特征時間尺度 l_0^{-1} (慣性振动周期), 特征速度尺度 C_0 (层結大气重力波传播速度), 以及特征水平距离尺度 L_0 (点源重力慣性波影响半径). 由于綫性地轉适应过程的波动性质, 我們已經明显的看到这些特征量的作用^[6]: 比如地轉适应过程的特征時間尺度即是 l_0^{-1} , 而在綫性理論中当 $L \ll L_0$ 时柯氏力对流場变化的影响很小. 在一般情况下, 大气运动的特性就由其相应的特征尺度与这三个特征尺度之比值所組成的参数 ε, M_a 及 μ 决定. 亦即由过程的特征時間(以 l_0^{-1} 为单位), 特征水平尺度(以 L_0 为单位), 以及特征速度(以 C_0 或 $C_0\mu^{-1}$ 为单位) 决定.

为了便于进一步分析, 将(6)–(9)式作如下变换:

由(6)–(7)式很容易得到风場的表达式如下:

$$\begin{cases} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + l_1^2 \right) u_1 = -l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial t_1} - l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_2 \right) + \varepsilon^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial a_1}{\partial t_1}, \\ \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + l_1^2 \right) v_1 = l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y_1 \partial t_1} + l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_1 \right) + \varepsilon^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial a_2}{\partial t_1}. \end{cases} \quad (10)$$

对(10)式进行涡度运算和散度运算, 并且注意到 $\frac{1}{l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} \left(l_1 v_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda a_1 \right) = \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)$, $\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} u_1 \right)$ 及 $\frac{1}{l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} \left(-l_1 u_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + \lambda a_2 \right) = \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} v_1 \right)$, 便得到涡度与散度的如下表达式:

$$\begin{cases} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + l_1^2 \right) \Delta \psi_1 = l_1 \Delta \phi_1 + \varepsilon l_1 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) a_{D_1} - \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1}, \\ \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + l_1^2 \right) D_1 = -\varepsilon \left(\Delta \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} + l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_{D_1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1}. \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\Delta \psi_1 \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_1}$, $D_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}$; $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$; 以及 $a_{D_1} \equiv \left[-\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial y_1} \right) + \frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} v_1 \right]$, $a_{D_1} \equiv \left[-\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial y_1} \right) + \frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} u_1 \right]$. a_{D_1}, a_{D_1} 可分别称为无因次广义涡度平流及散度平流. 并且当 $L \ll a$ (地球半径) 及 $\lambda \geq 10^{-1}$ 时尚有 $o\left(\frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} \right) = o\left(\frac{1}{\lambda} \frac{L}{a} \right) \leq o(1)$; 这样 a_{D_1}, a_{D_1} 之量級仍为 $o(1)$. (其中 $o(x)$ 表 x 之数量級, 下同). 此外, $a_{T_1} \equiv a_3 \varepsilon^{-1} = -\left[\zeta \left(u_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial \zeta} + v_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y_1 \partial \zeta} \right) + \varepsilon' \omega_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right) \right]$ 即是无因次广义温度平流.

代替(6)–(9)式, 可以由(8), (9)及(11)式得到以下三个决定 $\frac{\partial}{\partial t_1} \Delta \psi_1, \frac{\partial}{\partial t_1} \phi_1, D_1$ 的封閉方程組(參閱文献[6,7]):

$$\varepsilon(D_1) = -\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \Delta a_{T_1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(l_1 a_{D_1} + \varepsilon \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} \right) \right\}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t_1}\right) = & -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\left\{\left[\mu^2 \Delta a_{D_1} - l_1 \Delta \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1}\right] - \right. \\ & \left. - \varepsilon l_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1}\right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 a_{D_1}}{\partial t_1^2}\right)\right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}\right) = -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\left\{\left[\mu^2 l_1 a_{D_1} - l_1^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1}\right] + \varepsilon \mu^2 \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1}\right)\right\}, \quad (14)$$

其中:

$$\mathcal{L}(\chi) \equiv \left\{ \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + l_1^2 \right] \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mu^2 \Delta \right\} \chi. \quad (15)$$

由(12)式可以得到:

$$o(D_1) \leq o(\lambda). \quad (16)$$

代入(8)式还可得到:

$$o(\varepsilon') \leq o(1) \quad \text{及} \quad o(\varepsilon') \leq o(\lambda). \quad (17)$$

三、运动的类别和动力学方程的简化

大气运动的特点之一是受柯氏力的作用。注意到由柯氏参数确定出来的是一个时间尺度,因此,当我们研究运动过程或即研究发展问题时,我们自然选取 ε 作为基本参数。在一般情况下我们不能取 $\varepsilon = \lambda$ 。我们将分别讨论 $o\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$ 的不同情况。对于移动性的涡旋运动,一般有:

$$o\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) = o(1). \quad (18)$$

这时运动就由两个参数 ε 及 μ 决定。对于 $o(\lambda) \ll o(\varepsilon)$ 的情况,问题就化为线性适应过程问题而且可以归入 $o(\varepsilon) \leq 1$ 的情况。而当 $o(\lambda) \gg o(\varepsilon)$ 时,为了使方程两边量级一致,可归结为以下三种情况:其一、常定运动,此时略去含时间的导数项而得到描述各时刻的运动场之结构;其二、 $o(a_1, a_2, a_3) = o(\lambda') < o(1)$, 此时可引入: $\lambda a_1 = \lambda \lambda' \tilde{a}_1$, $\lambda a_2 = \lambda \lambda' \tilde{a}_2$, $\lambda a_3 = \lambda \lambda' \tilde{a}_3$, 且有 $o(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = o(1)$ 。于是 $\lambda \lambda'$ 起 λ 的作用。问题仍可化为或者是线性适应过程 ($o(\lambda \lambda') \ll o(\varepsilon)$), 或者是(18)式的情况 ($o(\lambda \lambda') = o(\varepsilon)$)。其三,准常定运动此时只需讨论 $o(\lambda) \leq o(1)$ 的情况,并且可以归入 $o(\varepsilon) \ll 1$ 的情况即可。因此,以后除非特别声明,我们都研究 $o\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) = o(1)$ 的情况。而对于线性适应过程只需再略去非线性项即可。

I. $o(\varepsilon) \ll 1$. 在这种情况下,过程进行得相当缓慢,其特征时间 $T = \varepsilon^{-1} l_0^{-1}$ 。取 $\varepsilon \leq 0.1$, $l_0 = 1.2 \times 10^{-4}$ 秒⁻¹, 则有 $T \geq 10^5$ 秒 ≈ 1 天。这时,作为第一级近似,我们可以略去(10)–(15)中的所有含 $o(\varepsilon)$ 及 $o(\varepsilon^2)$ 诸项。于是运动场的结构 (u, v, ϕ 的关系)便是:

$$\begin{cases} l_1 u_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}, & l_1 v_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, & (19)_1 \\ l_1^2 \Delta \phi_1 = l_1 \Delta \phi_1. & & (19)_2 \end{cases}$$

而过程发展的特性便是:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon(D_1) = 0 \quad (D_1 = 0), & (20)_1 \\ \mathcal{L}_\varepsilon\left(\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t_1}\right) = -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \left\{ \mu^2 \Delta a_{D_1} - l_1 \Delta \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1} \right\}, & (20)_2 \\ \mathcal{L}_\varepsilon\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}\right) = -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \left\{ \mu^2 l_1 a_{D_1} - l_1^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1} \right\}, & (20)_3 \\ \mathcal{L}_\varepsilon(\chi) \equiv \left\{ l_1^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \mu^2 \Delta \right\} \chi. & (20)_4 \end{cases}$$

(19) 式表明这类运动的准常定性和准地轉性。这类运动可以称为准地轉运动。而 (20) 式即是准地轉模式。这类发展过程可以称为准地轉过程。

当然 (19) — (20) 式并不互相独立。作为初值問題可以只用方程式 (20) 即可, 或者只用 (19)₁ 及 (20)₂ 或者 (19)₁ 及 (20)₃ 式即可。必須指出, 当用 (9) 代替 (20) 式或者用涡度方程来描述发展过程时, 我們就不能直接用 (19) 式而应该用情况 (II) 中的 (21) 式。事实上, 由 (9) 及 (21)₁ 式即可得 (20)₂ 式。从物理上講, 准地轉运动 (19) 式代表一个准平衡态, 准平衡态的演变是由破坏准平衡态的因子决定的。对于 $o(\varepsilon^2) \ll 1$ 的情况也可以相似地解释。

此外, 注意到 D_1 与发展过程是密切相关的, 故为了得到 D_1 的变化过程或者求其与平衡值之偏差 (即使其相对誤差 $\leq o(\varepsilon)$), 我們也必須用高一級的近似, 即 (22)₁ 式。

当 $o(\varepsilon) \ll o(\lambda)$ 时, 对于常定及准常定运动, 則有:

$$l_1 u_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + \lambda a_2, \quad l_1 v_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \lambda a_1. \quad (19)'$$

及 (20)₃ 式。可見准常定运动的发展总是准地轉的。

II. $o(\varepsilon^2) \ll 1$ 但 $o(\varepsilon)$ 并不远小于 1. 此时, 如取 $\varepsilon^2 \leq 0.1$, 則有 $T \geq \sqrt{10} l_0^{-1} \approx 7.3$ 小时; 如取 $\varepsilon^2 \leq 0.25$, 則有 $T \geq 4.5$ 小时。作为第一近似, 我們可以略去 (10) — (15) 式中所有含 $o(\varepsilon^2)$ 的項, 于是运动場的结构便是:

$$\begin{cases} l_1^2 u_1 = -l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial t_1} - l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_2 \right), \\ l_1^2 v_1 = l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y_1 \partial t_1} + l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_1 \right). \end{cases} \quad (21)_1$$

$$l_1 \Delta \psi_1 = \Delta \phi_1 + \varepsilon l_1 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) a_{D_1}. \quad (21)_2$$

而过程发展的特性便是:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(D_1) = -\varepsilon \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \Delta a_{T_1} + l_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} a_{D_1} \right\}, \quad (22)_1$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon\left(\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t_1}\right) = -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \left\{ \left[\mu^2 \Delta a_{D_1} - l_1 \Delta \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1} \right] - \varepsilon l_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} \right) \right\}, \quad (22)_2$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}\right) = -\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \left\{ \left[\mu^2 l_1 a_{D_1} - l_1^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta a_{T_1} \right] + \varepsilon \mu^2 \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} \right\}, \quad (22)_3$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\chi) \equiv \mathcal{L}_\varepsilon(\chi). \quad (22)_4$$

由 (21) 式可見这类运动的准平衡性。三个場中只要有一个已知时, 运动的特性就完全确定 (例如当 ϕ_1 已知时, 风場可以确定)。我們可以称这类运动为准平衡运动, 而称

(22)式所描述的过程为准平衡过程。这时过程的发展,除由 a_{α_1} , a_{T_1} 决定外,还须估计 a_{D_1} 的影响。

方程 (21)₂ 即为一般所称的平衡方程的更广泛形式。

如果注意到 $o(D_1) = o(\lambda) = o(\varepsilon)$, 我们可以引入:

$$u_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}; v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}; D_1 = \varepsilon \Delta \varphi_1. \quad (23)$$

于是 φ_1 之微商及 $\Delta \phi_1$ 之量级遂为 $o(1)$ 。将 (23) 式代入 (21)₂ 式并略去 $o(\varepsilon^2)$ 以上的项可得:

$$l_1 \Delta \phi_1 = \Delta \phi_1 - 2\varepsilon l_1 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y_1^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 \right] + \varepsilon l_1 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{\lambda l_0} \frac{\partial l}{\partial y_1} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}. \quad (24)$$

这就是反映出在无水平辐散情况下流场与气压场的关系的平衡方程。因此,在这种情况下,尽管散度并不比涡度小一量级,但平衡方程仍然有效。在这种意义下,也可以相应地称 (21) 式及 (22) 式为准无水平辐散运动及准无水平辐散过程。

同样,若用 (9) 式或涡度方程来描述发展过程,则代替 (21) 式必须用:

$$\begin{cases} l_1^2 u_1 = -l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial t_1} - l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_2 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \frac{\partial a_1}{\partial t_1}, \\ l_1^2 v_1 = l_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y_1 \partial t_1} + l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} a_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \frac{\partial a_2}{\partial t_1}. \end{cases} \quad (25)$$

而具有相对误差为 $o(\varepsilon)$ 的 D_1 式便是:

$$\varepsilon_c(D_1) = -\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \Delta \zeta a_{T_1} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(l_1 a_{\alpha_1} + \varepsilon \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} \right) \right\}. \quad (26)$$

III. $o(\varepsilon^2) \geq o(1)$: 在这种情况下,特别是当 $\varepsilon^2 \geq 1$ 时 ($T \leq l_0^{-1} \approx 3$ 小时), 方程 (10)–(15) 不能简化。纵使对于涡旋运动的变化,也必须用完整方程组 (12)–(15); 涡旋运动伴随着明显的二维可压缩性。我们可以称 (12)–(15) 为完整模式,而相应的运动及过程为完整模式运动和完整模式过程。

只有当 $T \ll 3$ 小时, $\frac{l}{l_0} = l_1$ 与 ε 相比才可以略去 l_1 。可见地转参数对非常广泛的大气运动都有明显的影响。

四、模式的使用问题

上面按运动的特征时间尺度对大气运动及其演变过程进行了分类,揭露了地球自转及由此决定的特征时间尺度对过程演变规律的重要性。对于不同类型的运动可以使用不同的模式。

一般说来,对于具有天气意义的运动,甚至连大部分中尺度涡旋系统,其特征时间都不小于 6–12 小时,亦即满足条件 $o(\varepsilon^2) < o(1)$ 。并且当 $\varepsilon \leq 10^{-1}$ 时,方程组 (21)–(22) 也比 (19)–(20) 的精度高一级。因此,在一般情况下,为了改进准地转模式的结果,使用“准平衡模式”(准无水平辐散模式)是足够的。对于中尺度涡旋系统,也可以用由 (22) 式算得的结果作为第一近似,而由逐级近似法再代入 (12)–(14) 式求出第二级近似。而对

于某些强烈发展过程的关键地区和关键时刻(此时特征时间尺度往往很小),或者要求较高的准确度,就必须应用完整模式。此外,对于某些天气现象,例如降水过程,由于它们本质上正是由非地转部分所决定的,自然也需用完整模式。

应该指出,方程组(6)–(9)及由此导出的其他方程都是最高阶时间微商带有小参数系数的方程。而简化模式的获得在本质上是通过按这小参数展开的方法。这种展开法在数学上改变了方程的类型;在物理上“滤去了”一些可能的运动和过程。但在一般的非线性情况下,这些运动通过非线性相互作用可以与简化方程中保留下来的运动相互影响。由此足见,由 Кибель 建议的按小参数展开法一般不可能收敛到真解¹⁾,并且往往不可能在一般意义下收敛,而只可能是渐近展开。因此,合理地选取第一级近似(亦即合理地选取模式)看来是非常重要的。

在实际的应用中, ε 可以由初始时刻的 D_1 或者 λ 的量级确定。

但是必须指出,参数 ε (或者 $o(D_1)$ 等)不是完全由外部参数决定的,它在运动过程中是可以变化的。对于不同的发展阶段可有不同的 ε 值,亦即运动类型不能完全由初始时刻的特征值 ε (或即 $o(D_1)$)所决定。由此产生了模式的稳定性问题,亦即扰动相对于准地转运动或者准平衡运动的稳定性问题。找出不稳定的条件,从理论上讲也是非常重要的。只有这个问题得到解决,关于使用简化模式的合理性才能算是最終解决;特别是建立中长期预告模式时更是如此。此外,模式稳定性遭到破坏的地区和时刻,往往也是过程的关节点。看来,模式稳定性问题对于了解这些转变过程同样也是重要的。

五、中尺度系统动力学方程

中尺度天气系统往往带来最剧烈的天气变化和灾害。对于这类系统的研究已经成为提高短期天气预报准确率的重要问题。一般,这类过程的特征时间是几小时到十几小时,亦即不满足条件 $o(\varepsilon) \ll o(1)$;特征水平尺度是百公里。在一般情况下,如取 $\gamma_0 - \bar{\gamma} = 0.4 \times 10^{-3}$ 度·米⁻¹, $T_1 = 270^\circ\text{K}$,则 $L_0 = 0.803 \times 10^6$ 米,此时有 $\mu^2 = \left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \gg 1$ 。因此,对于扩展到全对流层的中尺度系统,当 λ 不过分大时²⁾,为了使方程左右两边量级一致,必须有:

$$\begin{cases} \mu^2 \Delta D_1 = 0, & (27)_1 \\ \mu^2 \Delta \left(\frac{\partial \Delta \phi_1}{\partial t_1} \right) = - \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \mu^2 \Delta a_{D_1}, & (27)_2 \\ \mu^2 \Delta \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} = - \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \mu^2 \left[l_1 a_{D_1} + \varepsilon \frac{\partial a_{D_1}}{\partial t_1} \right]. & (27)_3 \end{cases}$$

可见,这类过程的准无水平辐散性和准正压性(即平面问题)。因此,如果使用无辐散平均层模式并且用流函数来作500毫巴预告时,对于500毫巴的中尺度系统的演变是有

1) 在线性情况下,解答是线性可加的,可以证明按小参数展开法收敛,且趋向于真解的“慢波”部分。

2) $o(\mu^2) \gg 1$ 但 $o(\lambda) \ll o(\mu^2)$ 相当于马赫数 $Ma = U/C_0 \ll 1$ 。在斜压流体中的现象与空气动力学或者水面波动力学的情况是相似的。当 $Ma \ll 1$ 时,在空气动力学中的小尺度绕体问题中可以忽略可压缩性;这相当于(27)式。但当 $Ma \approx 1$ 或者 $Ma \gg 1$ 时及大尺度运动,可压缩性就有着本质的重要性。这相当于我们的 $\delta p \ll p_0$ 的情况及 $o(\mu^2) \geq 1$ 的情况。特别是浅水波理论中的跃变现象也是常见的。

效的。

作为第一近似, Charney^[2] 及 Монин^[3] 也得到 (27) 式, 但他们的对象是大尺度运动。而其实, 对于大尺度运动 ($\mu^2 \gg 1$ 不成立) 我们却是应该用 (22) 式的。

如果我们注意到一般的中尺度系统的发生发展阶段多半局限于对流层下半部, 这时我们便不能应用 (27) 式。事实上, 此时在讨论函数沿垂直方向的微商时, 我们必须取 $\delta p = p_0 - p_1$ 来代替 p_0 作为特征量 (其中 p_1 为现象所达到的高度的气压值)。引入 $\zeta = p/\delta p$, 并保留其余特征值及无因次量的符号, 我们仍得到 (6)–(9)。但是, 我们所关心的是 $p > p_1$ 的情况, 而此时却有 $\zeta = p/\delta p = \frac{p}{p_0 - p_1} > 1$ 。并且当 δp 够小时可有

$\zeta^2 \gg 1$ 。这样, 当与 μ^2 相比时不能略去 $\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}$ 等项。亦即必须考虑斜压性及可压缩性的影响而应用 (22) 式或者 (12)–(15) 式。

为了更清楚地阐明物理本质, 我们还可作下面的解释。用 μ^2/ζ^2 的特征值 $\tilde{\mu}^2 = \mu^2/\zeta^2$ 代替方程 (9) 中之 μ^2/ζ^2 ($\bar{\zeta}$ 可看作 ζ 的平均值)。便得:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta \partial t_1} + \tilde{\mu}^2 \varepsilon' \omega_1 = -\lambda \left[\left(u_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial \zeta} + v_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y_1 \partial \zeta} \right) + \frac{1}{\zeta} \varepsilon' \omega_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} \right]. \quad (9)'$$

这样不会改变方程组的类型¹⁾。故 $\tilde{\mu}^2$ 具有 μ^2 相同的意义。引入 $\tilde{L}_0$:

$$\tilde{\mu}^2 = \lambda^2 \left(\frac{\tilde{C}_0}{U} \right)^2 = \left(\frac{\tilde{L}_0}{L} \right)^2, \quad (28)$$

于是有:

$$\tilde{L}_0 = L_0/\bar{\zeta}, \quad \tilde{C}_0 = C_0/\bar{\zeta}, \quad (29)$$

当 $\bar{\zeta} \gg 1$ 时就有 $\tilde{L}_0 \ll L_0$, $\tilde{C}_0 \ll C_0$ 。亦即起缩小由外部因素所决定的特征长度及特征速度的效应。此时 $\tilde{\mu}^2$ 就不再是很大的量了。

此外, 当马赫数 $M_* = U/C > 1$ 时会出现激波现象。由于 $\tilde{C}_0 \ll C_0$, 故在一般的较强气流速度情况下可使 $M_* = U/\tilde{C}_0 > 1$ 满足。可见当有中尺度系统发展时产生气压跃变现象的可能性是容易达到的。特别是当上面有稳定层并且稳定层的高度不大时 δp 就很小, 这种条件就更易达到。这似乎可以解释电离层气压跃变现象²⁾。

我们还可以解释一些与适应过程相关的现象。由于 $\tilde{L}_0$ 减小, 故当初始非地转扰动局限于大气底层时是有利于气压场维持。这与由方程的准确解所得结论是一致的^[6]。

同样的讨论可以解释在高空产生“激波”现象要比较困难 (要求 $U \geq \tilde{C}_0 \gg C_0$ 。因为 $\zeta \ll 1$)。而且在线性适应问题中气流场是容易维持的。

六、统一诸模式的差分方程组

为了深入了解某些环流过程和天气系统发生、发展的控制因子及其规律性, 比较不同模式的计算结果无疑是重要的。为此, 如何建立统一的计算方案, 对不同模式采用同样的计算方法, 从而消去由于计算精度不一而难于比较的困难, 看来也是重要的。

按方程组 (12)–(15) 可以建立统一的计算方案, 这时只需令 ε_s 代替 ε 并略去 $o(\varepsilon)$

1) 除 $\zeta = 0$ 平面外。当 $\zeta = 0$ 时方程 (9) 会退化。

2) Tepper. M. (Журн. Метеор. vol. 12. No. 4, 1955) 曾用两层不可压缩流体的重力波来解释电离层现象。

或 $o(\varepsilon^2)$ 的項就相应地轉变到准地轉模式或准平衡模式。为了减少貯存量、便于在电子计算机上計算, 应用第三节的討論还可以建議以下的对時間为差分的統一計算模式。这种差分法与 И. А. Кибель [8] 所用的是相似的。

引入記号: $\delta f \equiv f(x_1, y_1, \zeta; t_1 + \delta t_1) - f(x_1, y_1, \zeta; t_1)$, $\bar{f} \equiv \frac{1}{2}(f(x_1, y_1, \zeta; t_1 + \delta t_1) + f(x_1, y_1, \zeta; t_1))$, $f^0 \equiv f(x_1, y_1, \zeta; t_1)$, $\delta_1 \equiv \frac{\delta t_1}{2}$. δt_1 为无因次時間步度。取 (6)、(7)、(9) 的相应差分方程为:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\delta u_1}{\delta t_1} + \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial x_1} - l_1 \bar{v}_1 = \lambda \bar{a}_1, & (30)_1 \\ \varepsilon \frac{\delta v_1}{\delta t_1} + \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial y_1} + l_1 \bar{u}_1 = \lambda \bar{a}_2, & (30)_2 \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - \mu^2 \bar{D}_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \bar{a}_{T_1}. & (30)_3 \end{cases}$$

及

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta} = 0. \quad (30)_4$$

將 $\delta u_1 = 2(\bar{u}_1 - u_1^0)$, $\delta v_1 = 2(\bar{v}_1 - v_1^0)$ 及 $\bar{\phi}_1 = \phi_1^0 + \delta_1 \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1}$ 代入 (30)₁ 及 (30)₂ 式, 解出 $\bar{u}_1, \bar{v}_1$ 后再取散度, 便得:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2] \bar{D}_1 + \varepsilon \delta_1^2 \Delta \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} = \varepsilon \left\{ -\delta_1^2 l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_{2_1} - \right. \\ \left. - \varepsilon \delta_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_{2_1} + \varepsilon \delta_1 \left[\frac{1}{\varepsilon} (l_1 \Delta \phi_1^0 - \Delta \phi_1^0) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{D_1^0}{\varepsilon} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

將 (31) 与 (30)₃ 式联立消去 $\bar{D}_1$ 便得:

$$\begin{aligned} \left\{ [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2] \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \delta_1^2 \mu^2 \Delta \right\} \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} = \\ = - \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \left\{ \delta_1^2 \mu^2 l_1 \bar{a}_{2_1} - [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2] \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \bar{a}_{T_1} \right\} - \varepsilon \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \delta_1 \mu^2 \bar{a}_{D_1} + \\ + \varepsilon \delta_1 \mu^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (l_1 \Delta \phi_1^0 - \Delta \phi_1^0) \right\} + \varepsilon^2 \mu^2 \left\{ \frac{D_1^0}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (32)_1$$

此外, 將 $\bar{u}_1 = u_1^0 + \delta_1 \frac{\delta u_1}{\delta t_1}$, $\bar{v}_1 = v_1^0 + \delta_1 \frac{\delta v_1}{\delta t_1}$ 及 $\bar{\phi}_1 = \phi_1^0 + \delta_1 \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1}$ 代入 (30)₁—(30)₂ 式, 然后解出 $\frac{\delta u_1}{\delta t_1}$ 及 $\frac{\delta v_1}{\delta t_1}$, 便得:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2] \frac{\delta u_1}{\delta t_1} = -\delta_1^2 l_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - \\ - \varepsilon \delta_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - \frac{\lambda}{\varepsilon} l_1 \bar{a}_2 + l_1 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \phi_1^0}{\partial y_1} + l_1 u_1^0 \right) \right] + \\ + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \bar{a}_1 + \frac{1}{\varepsilon} (l_1 v_1^0 - \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x_1}) \right], \end{aligned} \quad (32)_2$$

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2] \frac{\delta v_1}{\delta t_1} &= \delta_1^2 l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - \\
 &- \varepsilon \delta_1 \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) + \frac{\lambda}{\varepsilon} l_1 \bar{a}_1 + l_1 \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 v_1^0 - \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x_1} \right) \right] + \\
 &+ \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \bar{a}_2 - \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 u_1^0 + \frac{\partial \phi_1^0}{\partial y_1} \right) \right]. \quad (32)_3
 \end{aligned}$$

(32)式即为相应于(14)及(10)式的差分方程。略去其中含 $o(\varepsilon)$ 以上的项或者 $o(\varepsilon^2)$ 以上的项即得到相应的准地转模式或准平衡模式。这里必须注意到 $o\left(\frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 u_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1} \right)\right)$, $o\left(\frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 v_1^0 - \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x_1} \right)\right)$, $o\left(\frac{1}{\varepsilon} (l_1 \Delta \phi_1^0 - \Delta \phi_1^0)\right)$, $o\left(\frac{D_1^0}{\varepsilon}\right)$ 均为 $o(1)$ 。这样, 我们便得到统一的差分方程组:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + K \mu^2 \Delta \right] \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} &= -K \frac{\lambda}{\varepsilon} \mu^2 l_1 \bar{a}_{D_1} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \bar{a}_{T_1} - N_1 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \mu^2 \bar{a}_{D_1} + \\
 &+ N_1 \mu^2 \frac{1}{\varepsilon} (l_1 \Delta \phi_1^0 - \Delta \phi_1^0) + N_2 \mu^2 \frac{D_1^0}{\varepsilon}. \quad (33)_1
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\delta u_1}{\delta t_1} &= -K l_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - N_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) + N_1 l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_2 + N_2 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_1 - \\
 &- N_1 l_1 \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 u_1^0 + \frac{\partial \phi_1^0}{\partial y_1} \right) + N_2 \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 v_1^0 - \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x_1} \right). \quad (33)_2
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\delta v_1}{\delta t_1} &= K l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - N_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} \right) - N_1 l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_1 + N_2 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_2 - \\
 &- N_1 l_1 \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 v_1^0 - \frac{\partial \phi_1^0}{\partial x_1} \right) - N_2 \frac{1}{\varepsilon} \left(l_1 u_1^0 + \frac{\partial \phi_1^0}{\partial y_1} \right). \quad (33)_3
 \end{aligned} \right.$$

及:

$$\bar{D}_1 = \varepsilon \left\{ K \left[-\Delta \frac{\delta \phi_1}{\delta t_1} - l_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_{D_1} \right] - N_1 \frac{\lambda}{\varepsilon} \bar{a}_{D_1} + N_1 \frac{1}{\varepsilon} (l_1 \Delta \phi_1^0 - \Delta \phi_1^0) + N_2 \frac{D_1^0}{\varepsilon} \right\}. \quad (33)_4$$

对于完整模式, 有:

$$K = \delta_1^2 / [\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2]; \quad N_1 = \frac{\varepsilon \delta_1}{\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2}, \quad N_2 = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (l_1 \delta_1)^2}. \quad (34)$$

对于准平衡模式, 有:

$$K = K_c = l_1^2; \quad N_1 = \frac{\varepsilon}{\delta_1} l_1^{-2}, \quad N_2 = 0. \quad (35)$$

对于准地转模式, 有:

$$K = K_g = l_1^{-2}; \quad N_1 = N_2 = 0. \quad (36)$$

出现在非线性项中之 $\varepsilon' \omega_1$ 可以由 (30)₄ 式算得, 并且 (30)₄ 式中之 u_1, v_1 值取由 (33) 式算得的即可。但如果需要研究有较高的相对准确度的 ω_1 或 D_1 则必须按 (33)₄ 式算得。

此外, 为了避免迭代过程, 则 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_{T_1}$ 及 $\bar{a}_{D_1}$ 可取 $t_1 + \frac{\delta t_1}{2}$ 时刻或 t_1 时刻之值代替。

致謝: 在完成本工作过程中, 承蒙叶篤正先生提供宝贵意见, 作者謹致以深切谢意。

参 考 文 献

- [1] Кибель, И. А., Изв. АН СССР. сер. геофиз. и географ., № 5, 1940.
 [2] Charney, J. G., *Tellus* VII, No. 1, 1955.
 [3] Мониш, А. С., Изв. АН СССР сер. геофиз. № 4, 1961.
 [4] Thompson P. D., *Journ. Met.* 13 (1956), No. 3.
 [5] Gambo: K., *Journ. Met. Soci. Japan.* Vol. 35, No. 1. 1957.
 [6] 曾庆存, 气象学报, 33 (1963), 163—174, 281—289.
 [7] Кибель, И. А., Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза. Москва. 1957. (有中译本).
 [8] Кибель, И. А., ДАН СССР. 132 (1960), № 2.

ХАРАКТЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ГИДРО-ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Цзэн Цин-цунь

(Институт геофизики АН КНР)

Резюме

Проанализированы гидро-термодинамические уравнения атмосферных движений методом теории подобия и размерности. Показаны связь и различие между различными моделями атмосферы и границы их применимости. Рассматривая адиабатические движения без трения с учётом квазистатичности и при условии, когда сила градиента давления и сила Кориолиса имеют одинаковый порядок величины, можно определить три характерные масштаба, определяемые внешними факторами: характерный временной масштаб I_0^{-1} (определяемый параметром Кориолиса I_0), характерный масштаб скорости C_0 (определяемый стратификацией и средней температурой атмосферы) и характерный горизонтальный масштаб $L_0 = C_0 I_0^{-1}$. Отношения этих масштабов к соответствующим характерным масштабам атмосферных движений $\epsilon = 1/I_0 T$, $\mu = L_0/L$, и $M_a^{-1} = C_0/U$ (или $\lambda = Ma$) представляют собой три основные параметра, определяющие особенность движений и процесса развития. В случае $o(\epsilon) \ll o(1)$ можно сохранять только члены порядка единицы в уравнениях, движение будет квази-геострофическим или квази-стационарным, и процесс развития описывается “квази-геострофической моделью”. В случае $o(\epsilon^2) \ll o(1)$, отбрасывая члены порядка $o(\epsilon^2)$, получается “квази-сбалансированная модель”. Хотя в этом случае плоская дивергенция ветра не на порядок меньше вихря, но “уравнение баланса” также имеет силу. Поэтому эту модель можно называть также “квазисолёнойдальной”. И наконец, в случае $o(\epsilon^2) \geq o(1)$ упрощение уравнений недопустимо — получается “полная модель”.

На этом основе предложена одна универсальная схема конечноразностных по времени уравнений, пригодная для анализа и сравнения. Различные модели соответствуют разным значениям коэффициентов в уравнениях.

Обсуждена асимптотичность сходимости методов разложения по малому параметру. Особо рассмотрены уравнения для среднемасштабных процессов. Показано, что скачкообразное изменение давления может осуществляться и в случае $M_a = U/C_0 \ll 1$.