第33卷 第3期 气 象 学 报 Vol. 33, No. 3
1963 年 8 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA August, 1963

論有鉛直向平流輸送时連續点源的乱流扩散*

罗秀卿
(南京大学气象系)

提 要

本文考虑有鉛直向气流的影响、扩散質点的沉降作用以及网效应(或称地面的吸收作用)时,討論了非定常态連續点源在乱流大气中的扩散問題. 求得了計算扩散質点浓度場的理論公式,并計算了若干例子,与观测結果得到很好的吻合.

气溶胶在乱流大气中的扩散,不但是解决工业城市大气汚染問題所必須研究的;近年来随着人工降水工作的蓬勃发展,在气象工作者面前提出了催化剂怎样扩散的問題. 数十年来在理論方面研究得較多的是有关大气汚染問題,其中大部分是属于貼地层內的乱流扩散問題,在这类公式中都不考虑鉛直气流的影响. 但是若扩散范围較大(如地面人工降水作业里催化剂扩散的例子),烟道超出貼地层后,鉛直气流所起的影响是不容忽視的.

在有鉛直气流的影响和扩散質点沉降作用下,我們所采用的乱流扩散方程为

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}+u\frac{\partial \chi}{\partial x}+(W_B-W_\tau)\frac{\partial \chi}{\partial z}=K_y\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}. \tag{1}$$

在(1)式中 x 軸的方向,即为盛行风向.

其中 χ——扩散物質的浓度, u——水平风速, W_B——鉛直气流速度, W_τ——扩散質点的沉降速度, K_y, K_z——相应地为水平向和鉛直向的乱流交換系数, t 和 x, y, z——相应地为时間和空間的坐标.

我們假設一个源強为 $Q(t)$ 的連續点源位于与盛行风向垂直的平面上,其离地面的高度为 l, 起始时刻的源強为零,其影响在无穷远的地方可以忽略不計,即

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\chi=0,\\&\lim_{x\to 0}c\chi=Q(t)\delta(y)\delta(z-l),\\&\lim_{y\to\pm\infty}\chi=0,\ \lim_{y\to\pm\infty}K_y\frac{\partial\chi}{\partial y}=0,\\&\lim_{z\to\infty}\chi=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

而地面的条件在有网效应时为[1,8]

$$\lim_{z\to 0}K_z\frac{\partial\chi}{\partial z}+(W_\tau-\beta)\chi=0. \tag{3}$$

其中 $c=\sqrt{u^2+W_B^2}$, $\delta(\xi)$——δ 函数, β——表征扩散物与地面之間相互关系的常数, l——烟源离地面的高度. 若烟源为热源則必須加上一个訂正高度 Δl, 因此 l 对热源应

* 本文 1962 年 2 月 12 日收到, 1963 年 4 月收到修改稿.

該等于烟突本身的高度加上 Δl，称为該烟突的有效高度.

Δl 可用下式来估計[2]:

$$\Delta l = d\left(\frac{v_s}{u}\right)^{1.4}\left(1+\frac{\Delta T}{T_s}\right). \tag{4}$$

其中 d——烟突的直径，v_s——抽风速度，T_s——烟流的絕对温度，ΔT——烟流与周围空气的温度差額.

在求解的过程中，我們应用了拉普拉斯和福利叶的积分变換.

$$q = \int_0^\infty se^{-sx}dx\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda y\,dy\int_0^\infty pe^{-pt}\chi\,dt, \tag{5}$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi^3 i^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sx}\frac{ds}{s}\int_0^\infty\cos\lambda y\,d\lambda\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}q\frac{dp}{p}. \tag{6}$$

(1)式經过(5)式的变換后，得

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}-\frac{W_B-W_\tau}{K_z}\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{p+K_y\lambda^2+us}{K_z}q=-\frac{s\bar{Q}(p)}{CK_z}\delta(z-l). \tag{7}$$

其中 $\bar{Q}(p)=\int_0^\infty pe^{-pt}Q(t)dt$,

边界条件(2)和(3)变为:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{z\to 0}K_z\frac{\partial q}{\partial z}+(W_\tau-\beta)q=0,\\&\lim_{z\to\infty}q=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在适合条件(8)的情况下，很容易求得(7)式的解为

$$q=\frac{us\bar{Q}(p)}{CK_z(\psi_1+\psi_2)}\left\{\left[\int_0^z\delta(\xi-l)e^{\psi_1\xi}d\xi+\frac{\psi_2+\frac{W_\tau-\beta}{K_z}}{\psi_1-\frac{W_\tau-\beta}{K_z}}e^{-\psi_2 l}\right]e^{-\psi_1 z}+\right.$$

$$\left.+\int_z^\infty\delta(\xi-l)e^{-\psi_2(\xi-z)}d\xi\right\}. \tag{9}$$

其中

$$\psi_{1,2}=\mp\frac{W_B-W_\tau}{2K_z}+\sqrt{\frac{(W_B-W_\tau)^2}{4K_z^2}+\frac{p+K_y\lambda^2+us}{K_z}},$$

利用 δ 函数的性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,\delta(\xi-a)\,d\xi=f(a)$$

和还原公式(6)后，从(9)式立即可以求得我們所需要的解:

当 $t<\frac{x}{u}$ 时，$\chi=0$;

当 $t\geqslant\frac{x}{u}$ 时，$\chi=Q\left(t-\frac{x}{u}\right)e^{-\frac{u}{4K_y x}y^2}\times\left\{\frac{u}{4\pi Cx\sqrt{K_yK_z}}e^{-\frac{(W_B-W_\tau)^2}{4K_z u}x+\frac{(W_B-W_\tau)}{2K_z}(z-l)}\times\right.$

$$\left.\times\left[e^{-\frac{u}{4K_z x}(z-l)^2}+e^{-\frac{u}{4K_z x}(z+l)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{W_B+W_\tau-2\beta}{4CK_z\sqrt{\pi xK_y}}\sqrt{u}\,e^{\frac{(\beta-W_B)(\beta-W_\tau)}{K_z u}x+\frac{\beta-W_B}{K_z}l+\frac{\beta-W_\tau}{K_z}z}\times\right.$$

$$\times \operatorname{erfc}\left[\frac{z+l}{2}\sqrt{\frac{u}{K_z x}}-\frac{W_B+W_\tau-2\beta}{2}\sqrt{\frac{x}{K_z u}}\right]\Bigg\}. \tag{10}$$

当鉛直气流很小时($W \approx 0$)，若不考虑网效应的影响，則从(10)式所得到的稳定的連續点源的浓度分布为

а) 高架連續点源：

$$\chi=\frac{Q}{4\pi x\sqrt{K_yK_z}}e^{-\frac{u}{4K_yx}y^2}\left\{e^{-\frac{u}{4K_zx}(z+l)^2}+e^{-\frac{u}{4K_zx}(z-l)^2}\right\} \tag{10а}$$

б) 地面連續点源：

$$\chi=\frac{Q}{2\pi x\sqrt{K_yK_z}}\exp\left[-\frac{u}{4x}\left(\frac{y^2}{K_y}+\frac{z^2}{K_z}\right)\right]. \tag{10б}$$

从(10а)和(10б)可以看出，用"源泉"法和"象源"法从 O. F. Roberts 的理論所求得的連續点源的扩散公式为(10)式的特殊情况. 若令 $K_y=\frac{1}{4}C_y^2ux^{1-n}$, $K_z=\frac{1}{4}C_z^2ux^{1-n}$，則与 Sutton 从統計理論推得的公式是一致的[3].

(10)式告訴我們，在源強稳定时(即 $Q(t)=$ 常数)，只要 $t\geqslant\frac{x}{u}$ 时，就可以获得一个稳定的浓度場. 在順行风向离源距为 x 处的观測起始时刻，一定要大于 $\left(t_0+\frac{x}{u}\right)-t_0$ 为发烟的起始时刻.

从(10)式可以看出，鉛直气流的大小并不影响浓度場相对于盛行风向的对称分布.

根据 Roberts 的理論推得的公式，地面的峯巔(中央)浓度与离源距 x 的一次方成反比. 而 O. G. Sutton 根据从化学源发生的烟云的扩散資料得出，地面的峯巔值是与 $x^{-1.76}$ 成比例的[3]，即

$$\frac{\chi(x_1)}{\chi(x_2)}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1.76}. \tag{11}$$

由此可見，地面峯巔浓度随 x 的变化比从 Roberts 的理論推得的結論要快得多. 这是由于在 Roberts 理論中沒有考虑网效应和鉛直气流(鉛直气流的大小在一定范围內是与大气稳定度相連系的).

为了与(11)式比較，我們把(10)式改写成

$$\frac{\chi(x_1)}{\chi(x_2)}=\frac{\dfrac{u}{2\pi Cx_1\sqrt{K_yK_z}}e^{-\frac{(W-W_\tau)^2}{4uK_z}x_1}+\dfrac{W_B+W_\tau-2\beta}{4CK_z\sqrt{\pi x_1K_y}}\sqrt{u}\,e^{\frac{(\beta-W_B)(\beta-W_\tau)}{K_zu}x_1}\operatorname{erfc}\left[\dfrac{2\beta-W_B-W_\tau}{2}\sqrt{\dfrac{x_1}{K_zu}}\right]}{\dfrac{u}{2\pi Cx_2\sqrt{K_yK_z}}e^{-\frac{(W-W_\tau)^2}{4uK_z}x_2}+\dfrac{W_B+W_\tau-2\beta}{4CK_z\sqrt{\pi x_2K_y}}\sqrt{u}\,e^{\frac{(\beta-W_B)(\beta-W_\tau)}{K_zu}x_2}\operatorname{erfc}\left[\dfrac{2\beta-W_B-W_\tau}{2}\sqrt{\dfrac{x_2}{K_zu}}\right]}. \tag{12}$$

利用(12)式我們計算了二个例子：

例一，假設 $\beta=6\cdot10^{-3}$ 米/秒，$W_B=0$，$W_\tau=0$，$u=0.5$ 米/秒，$K_z=0.5$ 米^2/秒，$K_y=1.6$ 米^2/秒，$x_1=100$ 米；

例二，假設 $\beta = 3.2 \cdot 10^{-2}$ 米/秒，$W_B = 6.3 \cdot 10^{-2}$ 米/秒，$W_\tau = 0$，$u = 0.5$ 米/秒，$K_x = 0.5$ 米^2/秒，$K_y = 1.6$ 米^2/秒，$x_1 = 100$ 米．計算的結果繪在图 1 上，在图 1 上同时也点上了根据 (11) 式和 (10б) 計算的数据．可見，(12) 式与 (11) 式在离源距不大的范围內 ($x < 1000$ 米) 得到了很好的吻合．一般地說，由于网效应和鉛直气流的影响，地面峯巔浓度随 x 的变化，在起始时 ($x < 800$ 米) 比 (11) 式要慢些，当 x 相当大后 ($x > 800$ 米) 其变化速度迅速增大，这一事实說明对于貼地层內小規模的乱流扩散必須考虑网效应 (特别是对于易与地面或空气中的其他物質起化学反应的气溶胶質点或在电場中的带有电荷的气溶胶質点) 和鉛直气流的影响．

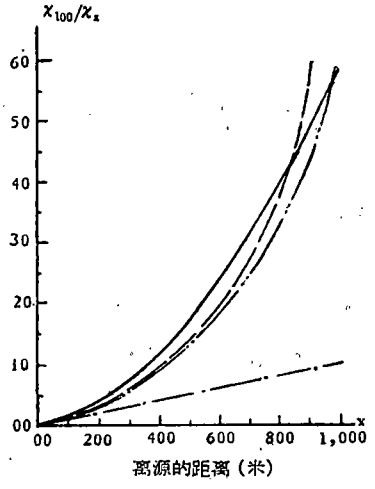


图 1 W_B 和 β 对地面峯巔值的影响 (——为 Sutton 的經驗公式(11)；---为公式 (10)，$\beta = 6 \cdot 10^{-8}$ 米/秒；—··—为公式(10)，$\beta = 32 \cdot 10^{-8}$ 米/秒；—·—为公式(10a)，$W_B = 63 \cdot 10^{-8}$米/秒)

下面我們将討論，在貼地层外的乱流扩散問題．

一般地說，在貼地层外的乱流交換系数比貼地层內几乎要大一个量級，因此我們取$K_z = 10$ 米^2/秒，$K_y = 10^2$ 米^2/秒，而 $u = 10$ 米/秒，$W_B = 0.05$ 米/秒，$\beta = 0$；$W_\tau = 0$，則从公式(10)得出

$$\chi \propto x^{-n}.$$

式中 $0.5 \leqslant n \leqslant 1$；且 x 愈大，n 愈小．

由此可見在貼地层外，浓度 χ 随距离 x 的变化比在貼地层內要慢得多．因为在貼地层外的乱流交換系数比貼地层內要大得多，这样使鉛直气流和网效应的作用相对地削弱而形成的．

鉛直气流不但对烟道 (即联結每一高度的水平面上浓度的极大值的曲綫) 起作用，而且直接影响到浓度的絕对值及其鉛直分布．

根据(10)式进行了一些計算，在計算中假設了 $u = 5$ 米/秒，$K_x = 30$ 米^2/秒，$K_y = 2 \cdot 10^2$ 米^2/秒，$W_\tau = 0$，$l = 0$，$\beta = 0$，而 $W_B = 0.00$，0.10 和 1.00 米/秒．計算結果列于表 1．

表 1 上的数据說明，上升气流使浓度 χ 的絕对值普遍增大，在空間任何一点的浓度值都比在沒有鉛直气流时大．

根据 Roberts 理論或 Sutton 的理論，浓度在鉛直方向的分布应与 e^{-Bz^2} 成比例，但实际上在貼地层外观測到的浓度 χ 随高度的減小要緩慢得多，而是与 $e^{-\theta z^m}$ 成比例的 ($0 \leqslant \leqslant m \leqslant 2$)．

表 1 上的数据也表明了这样一个事实，上升气流能使浓度 χ 的鉛直分布趋于均匀化，离源愈远，其作用也愈显著．例如：当 $W = 1$ 米/秒时，上升气流在 $x = 6$ 公里时，已使浓度 χ 的鉛直分布趋向完全均匀 ($m = 0$)．W. D. Gtozier 和 Ben. K. Seely 根据1951—1953年試驗的資料，也曾指出鉛直气流能使浓度的鉛直向分布趋于均匀化[5]．

上升气流对烟道的作用，就是使烟道向上抬升，上升气流愈強，其效应也愈显著．在图 2 上可以看到，当 $W = 1$ 米/秒时的烟道比在沒有上升气流影响时的烟道要陡得多，几乎是向上直升的．但当上升气流不很大时($W_B = 0.10$米/秒)，可以看到一种反常的現象，

表 1　比值(χ/Q)在不同的上升气流情况下的空間分布

(公里)	米/秒	离地面的高度(米)						
x	W_B	75	175	275	475	675	875	1075
	0.00	0.197(−5)	0.590(−10)	0.424(−18)	0.257(−45)	(−87)	(−142)	(−212)
0.10	0.10	0.209(−5)	0.799(−10)	0.681(−18)	0.566(−45)	(−87)	(−142)	(−212)
	1.00	0.749(−5)	0.104(−8)	0.409(−16)	0.600(−42)	(−82)	(−136)	(−205)
	0.00	0.328(−5)	0.943(−7)	0.257(−9)	0.168(−18)	0.227(−32)	(−50)	(−74)
0.30	0.10	0.358(−5)	0.133(−6)	0.410(−9)	0.374(−18)	0.695(−32)	(−50)	(−74)
	1.00	0.137(−4)	0.153(−5)	0.179(−7)	0.315(−15)	0.111(−27)	(−44)	(−67)
	0.00	0.163(−5)	0.573(−6)	0.900(−7)	0.170(−9)	0.116(−13)	0.288(−19)	0.253(−26)
1.00	0.10	0.193(−5)	0.827(−6)	0.149(−6)	0.395(−9)	0.362(−13)	0.149(−18)	0.150(−25)
	1.00	0.913(−5)	0.744(−5)	0.395(−5)	0.415(−6)	0.179(−9)	0.328(−13)	0.309(−20)
	0.00	0.633(−6)	0.448(−6)	0.239(−6)	0.298(−7)	0.122(−8)	0.162(−10)	0.832(−13)
3.00	0.10	0.862(−6)	0.713(−6)	0.430(−6)	0.704(−7)	0.397(−8)	0.721(−10)	0.441(−12)
	1.00	0.542(−5)	0.540(−5)	0.536(−5)	0.460(−5)	0.254(−5)	0.461(−6)	0.143(−6)
	0.00	0.332(−6)	0.277(−6)	0.203(−6)	0.627(−7)	0.144(−7)	0.168(−8)	0.112(−9)
6.00	0.10	0.551(−6)	0.497(−6)	0.398(−6)	0.179(−6)	0.476(−7)	0.748(−8)	0.243(−9)
	1.00	0.384(−5)	0.384(−5)	0.384(−5)	0.384(−5)	0.380(−5)	0.358(−5)	0.291(−5)
	0.00	0.200(−6)	0.180(−6)	0.150(−6)	0.801(−7)	0.308(−7)	0.865(−8)	0.166(−8)
10.00	0.10	0.383(−6)	0.361(−6)	0.325(−6)	0.214(−6)	0.111(−6)	0.413(−7)	0.107(−7)
	1.00	0.298(−5)	0.298(−5)	0.298(−5)	0.298(−5)	0.298(−5)	0.298(−5)	0.299(−5)
	0.00	0.101(−6)	0.964(−7)	0.876(−7)	0.642(−7)	0.397(−7)	0.209(−7)	0.925(−8)
20.00	0.10	0.238(−6)	0.235(−6)	0.225(−6)	0.193(−6)	0.755(−7)	0.991(−7)	0.576(−7)
	1.00	0.212(−5)	0.212(−5)	0.212(−5)	0.212(−5)	0.212(−5)	0.212(−5)	0.212(−5)

注：表中圓括弧內的数字表示該数的量級．例 0.197(−5)即为 $0.197\cdot10^{-5}$．

在 $x<10$ 公里的范围內烟道反而比 $W_B=0$ 时要低些，这显然是地面反射效应的結果．因为地面的反射效应是与上升气流同时增长的．当W不太大时，在离源不很远的距离內，地面反射效应的增长比上升气流的作用的增长要快些，因而出現了上述的反常現象．当W較大时，或离源較远时，由于地面反射效应相对地減弱，而上升气流的影响就明显地表現出来了．以上的討論，又一次地說明，在研究小規模的乱流扩散中，假設地面为不渗透的全反射面是不合适的，必須考虑网效应的作用．当 l 不很大(約20—30米)时，其所得結果与 $l=0$ 时相似(图 2)．

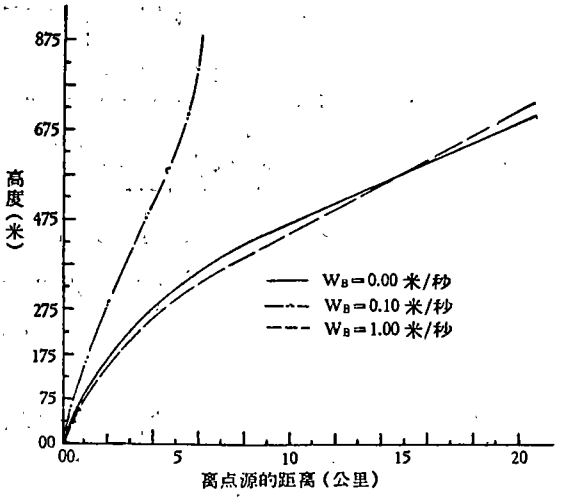


图 2　上升气流对烟道的影响

在 $W_B=0$ 时，烟源高度对浓度場的影响問題，在微气象中[3]，O. G. Sutton

有較詳細的說明，这里仅对烟源高度 l 在 $W_B \neq 0$ 的情况下对浓度場的影响与 $W_B = 0$ 时的影响作一簡单的比較.

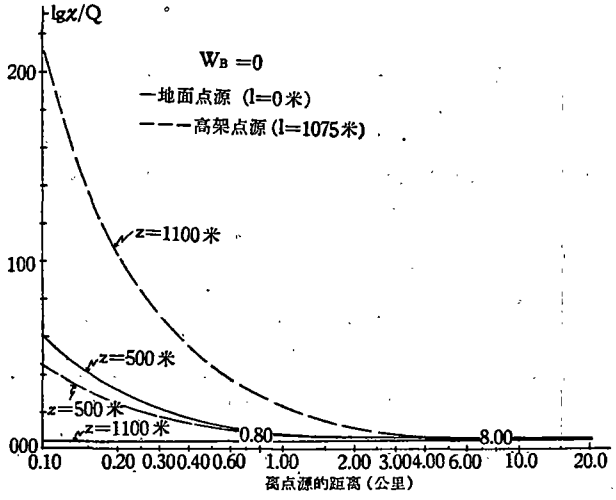


图 3 烟源高度对浓度 χ 在沿风向分布的影响

图 3 表示浓度 χ 在不同高度(z=500,1100 米)的中央軸綫上的廓綫分布. 当 W_B=0 时 l 对浓度 χ 的影响随着 x 的增大是迅速減弱的，当 $x > 10$ 公里后其影响已可以不予考虑，浓度場的分布与 l 的大小几乎是沒有关系了. 在 $W_B = 0.10$ 米/秒的情况下也获得了相同的結果. 因此在一般情况下，对較大規模的乱流扩散过程（例人工催化云雾降水）来說，抬高烟源是不会有很显著的效果的.

E. J. Smith 和 K. J. Heffernan 在比較其 1953 年(在平地上試驗的)与 1954 年(在离地面 1000 公尺左右的高山上試驗的)的資料（二次試驗时的气象条件是相似的）时发現，在这二次試驗中扩散浓度場的上界在离源距大于 10 公里后就趋向于一致(見图 4)[6]，这与公式(10)的結論是一致的.

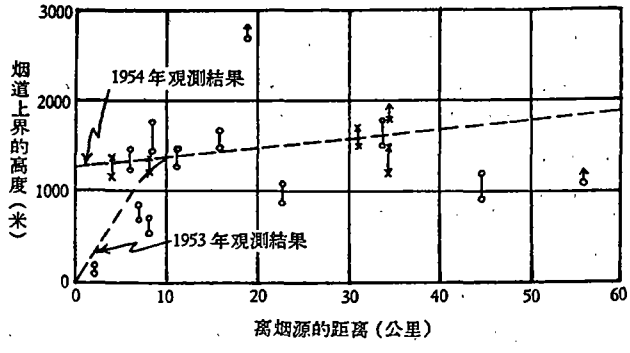


图 4 离烟源的距离

致謝 作者对徐尔灝教授的帮助和指导表示衷心的感謝.

参　考　文　献

[1] Monin, A. S., On the Boundary condition on the earth surface for diffusing pollution, Advances in geophsics 1956, 6, 435.

[2] Метеорология и Атомная энергий, 俄文譯本, 1959, 108.

[3] O. G. 薩頓, 微气象学(中譯本), 153—160, 314, 330—335.

[4] Smith, E. J. and Heffernan, K. J., Airborne measurements of the concentration of natural and artifrcial freezing nuclei, *Q. J.*, **80** (1954), No. 334, p. 194.

[5] Crozier, W. D. and Seely, Ben K., Concetration distributions in aerssol plumes three to twenty-two miles from a point source, *Transactions Amerigam Geophysical union*, **36** (1955), No. 1, p. 42.

[6] Smith, E. J. and Heffernan, K. J., The decay of the ice-nacleating properties of silver iodide released from a mountain top, *Q. J. of the Roy. M. Soc.*, **82** (1956), p. 308.

[7] Л. С. Тандин и Р. Э. Соловейчик, О распространении дыма из фабричных труб, *Труды ГГО*, вып. 77, 1958. ст. 84.

[8] Kenneth L. Calder, Atmospheric diffusion of particulate material, considered as a boundary value problem, *J. of met*, **18** (1961), p. 413.

О ДИФФУЗИИ НЕПРЕРЫВНОГО ТОЧЕНОГО ИСТОЧНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОТОКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Ло Сю-чин

(*Нанкинский университет*)

Резюме

В данной статье рассмотрен вопрос о диффузии нестационарного точеного источника с учетом влияний вертикальных потоков, осаждения частиц и эффекта сети сили поглощения поверхности земли) в турбулентной атмосфере.

Получена теоретическая формула концентрации, и рассчитано несколько примеров, результаты которых хорошо согласуются с данными опытов.