第33卷 第2期　　　　气 象 学 报　　　　Vol. 33, No. 2
1963 年 5 月　　　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　　　May, 1963

概率論基本定理在气候統計中的应用*

么 枕 生
(南京大学气象系)

提　　要

作者在本文中討論条件概率、一般概率与复合概率的計算方法，并且指出 M. Wurtele 計算各种风向时候雾的概率，所用的方法是不必要的. 作者也計算了各种风向时的降水概率，并且根据总概率定理計算降水的一般概率，根据 Bayes 定理計算在降水出現的条件下风的概率.

其次，作者推导計算各台站同时为雨日的概率，并且推导校对公式，以便检查計算結果.

概率論基本定理是概率論与数理統計学的基础. 我們不討論这些基本定理在概率論中演化以后的应用，只討論这些基本定理直接在气候統計中的应用或討論另一些推演以后的应用問題.

一、条件概率与一般概率的計算

复合概率定理(概率的乘法定理)为

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B), \end{aligned} \tag{1}$$

此处 $P(AB)$ 为事件 A 与事件 B 同时出现的概率，$P(B)$ 为事件 B 的概率，$P(B|A)$ 为在事件 A 出現的条件下，事件 B 的条件概率. $P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的意义同此.

(1)式可写为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \tag{2}$$

且

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{3}$$

(2)式与(3)式就可用以計算条件概率.

1. 各种风向时候雾的概率

M. Wurtele[1] (1944) 曾根据美国恰塔努加(田納西州) 5 年資料，計算了該地能見度 3/4 到 1 哩(雾)在各种风向(风速大于 5 m.p.h.)时候的条件概率. 他命 F 代表雾，W_i 代表第 i 种方向的风($i = 1, 2, 3, \cdots 16$; 北北东风为 1，东风为 4，南风为 8，北风为16).

* 本文 1962 年 10 月 9 日收到.

1) Wurtele, M., on the Application of the Theory of Probability to Meteorological Statistics. *Bul. Amer. met. Soc.* **25** (1944), 8, 338.

于是，由(1)式求得

$$P(F|W_i)=\frac{P(F)P(W_i|F)}{P(W_i)}. \tag{4}$$

他曾根据(4)式在恰塔努加計算风向为 W_i 时雾出現的概率(在 W_i 出現的条件下，雾的条件概率). 他計算(4)式时所用的資料用两个图繪出之. 例如，在他的图 1 中，繪出南风时候的有雾时数为 76，雾的总时数则为 1188. 在他的图 2 中，繪出南风的相对頻数为 9%.

$P(F)$ 代表雾的概率，根据上述資料計算如下：

$$P(F)=\frac{1188}{5\times 365\times 24}=0.027.$$

$P(W_i|F)$ 代表有雾时风向 W_i 的概率(在雾出現的条件下，W_i 的条件概率)，其值根据上述資料計算如下：設 W_i 为 W_8，则

$$P(W_8|F)=\frac{76}{1188}.$$

$P(W_8)$ 代表风向 W_8 的概率，其值根据上述資料应为

$$P(W_8)=\frac{9}{100}.$$

因此，在恰塔努加南风有雾的概率根据(4)式为

$$P(F|W_8)=0.027\times\frac{76}{1188}\times\frac{1}{0.09}=0.019.$$

同样，他計算 $P(F|W_1)$、$P(F|W_2)\cdots$. 最后他把这些計算結果繪制于图上，此图他称为雾风图.

他統計 $P(W_i|F)$ 的用意，就是为根据(4)式計算 $P(F|W_i)$ 而已. 实际，他这样計算是多余的，并无其他意义. 雾的条件概率可簡单計算如下：

$$P(F|W_i)=\frac{P(W_iF)}{P(W_i)}$$

$$=\frac{W_i\text{风同时有雾时数}}{W_i\text{风时数}}. \tag{5}$$

利用(5)式就可以簡单的計算恰塔努加雾的条件概率，并不需要由(4)式計算之.

在(4)式中所包括的 $P(W_i|F)$ 在他的問題中并无計算的必要，实际 $P(W_i|F)$ 在其計算过程中是要消掉的. 因此，我們講：Wurtele 根据(4)式的計算手續是多余的. 这一点我們更証明如下：

$$P(F|W_i)=\frac{P(F)P(W_i|F)}{P(W_i)}=\frac{P(FW_i)}{P(W_i)}=\frac{P(W_iF)}{P(W_i)}.$$

同时，

$$P(F|W_i)=\frac{P(F)P(W_i|F)}{P(W_i)}=\frac{\dfrac{\text{有雾时数}}{\text{总时数}}\cdot\dfrac{W_i\text{风同时有雾时数}}{\text{有雾时数}}}{\dfrac{W_i\text{风时数}}{\text{总时数}}}$$

$$=\frac{W_i\text{风同时有雾时数}}{W_i\text{风时数}}$$

$$=\frac{P(W_iF)}{P(W_i)}.$$

例如，用上述資料根据(5)式求得

$$P(F|W_8)=\frac{76}{5\times 365\times 24\times \frac{9}{100}}=\frac{76}{43800\times 0.09}$$

$$=\frac{76}{3942}=0.019.$$

利用(5)式所計算的其他条件概率同样也和 Wurtele 計算的結果是一样的.

2. 各种风向时候的降水概率

我們以 R 代表降水，W_i 代表第 i 种的风. W_1 代表北北东风，W_4 代表东风，W_8 代表南风，W_{12} 代表西风，W_{16} 代表北风，W_{18} 代表风向多变. 于是，根据(1)式，我們可以写出

$$P(W_iR)=P(W_i)P(R|W_i)=P(R)P(W_i|R). \tag{6}$$

因此，

$$P(W_i|R)=\frac{P(W_iR)}{P(R)}=\frac{W_i\text{风同时降雨时数}}{\text{降雨时数}} \tag{7}$$

与

$$P(R|W_i)=\frac{P(W_iR)}{P(W_i)}=\frac{W_i\text{风同时降雨时数}}{W_i\text{风时数}}. \tag{8}$$

現在我們要計算 $P(R|W_i)$，并不需要計算 $P(W_i|R)$. 二者的意义不同. $P(R|W_i)$ 是吹 W_i 风时降雨的概率，也就是降雨的条件概率. 如以 $\bar{R}$ 代表无降水的事件，则

$$P(R|W_i)+P(\bar{R}|W_i)=1.$$

$P(W_i|R)$ 是降雨时各种风向的概率，也就是风向的条件概率，并且

$$\sum_{i=1}^{18}P(W_i|R)=1.$$

$P(R|W_i)$大，就說明有 W_i 风时降雨本身出現的机会大. 反之，$P(W_i|R)$ 大，就說明降雨时 W_i 风本身出現的机会多，此值大乃由于 W_i 出現的机会多，并非由于降雨多而造成的.

我們根据南京 8 年各时降水与风向資料求得降水条件概率（各种风向时候的降水頻率)列为表 1.

表 1　南京(1929—1936) 1 月与 7 月的降水条件概率 $P(R|W_i)$

	NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	N	c	v
1月	0.154	0.128	0.215	0.148	0.070	0.003	0.001	0.015	0.006	0.004	0.011	0.015	0.048	0.091	0.086	0.119	0.044	
7月	0.169	0.169	0.230	0.074	0.070	0.037	0.046	0.043	0.027	0.035	0.091	0.072	0.044	0.127	0.100	0.165	0.146	0.250

由表 1 可知南京冬季(1 月)以 ENE 风降水的机会最大，由N到E方位內的风出現降水机会都大. 夏季(7 月)因为雷雨盛行，所以在风向多变(v)的条件下降雨机会最大，其次 ENE 风降水的机会也最大，由 NW 到 ENE 方位內的风以及靜风(c)出現降水机

表2 南京1月与7月

		NNE	NE	ENE	E	ESE	SE	SSE	S
$P(W_i)$……………	1月	0.165	0.161	0.063	0.070	0.050	0.041	0.036	0.023
	7月	0.058	0.079	0.053	0.113	0.137	0.127	0.091	0.051
$P(W_i)P(R\|W_i)$…	1月	0.0254	0.0206	0.0135	0.0104	0.0035	0.0001	0.0000	0.0003
	7月	0.0098	0.0134	0.0122	0.0084	0.0096	0.0047	0.0042	0.0022

会也不小，并非东南季风降水机会最多. 此点正可說明我国季风并不象低緯度季风那样典型，而是在季风环流中更有鋒面、气旋与反气旋的更替情况. 例如，我国冬季西北(或东北)季风时期，也可以有东南风，冬季并非完全干旱；夏季东南季风时期更可以有西北风(或东北风)，尤其是北方更是如此.

3. 降水一般概率与条件风向概率的計算

一般概率可以直接計算之. 不过，如已計算过条件概率，那么根据这些記录利用总概率定理計算一般概率更为方便，尤其是在只有条件概率資料的情况下更必須如此計算.

設 $A_1, A_2, \cdots A_n$，为 n 个相斥的事件，其中一个事件必然出现. 設任何事件 B 仅能联同事件 $A_i(i=1, 2, \cdots n)$ 出現，于是因为 BA_i 是相互排斥的，所以根据概率的加法定理与乘法定理求得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \tag{9}$$

这就是总概率定理的另一种形式，借此可由条件概率計算一般概率.

我們仍以 R 代表降水，W_i 代表第 i 种的风($i=1, 2, \cdots 18$)，且以 R 代替 B，W_i 代替 A_i，則式(9)化为

$$P(R)=\sum_{i=1}^{18} P(W_i)P(R|W_i). \tag{10}$$

例如，根据表1由南京各种风向时候的条件降水概率(各种风向时候的降水頻率)計算南京降水一般概率列为表2.

在南京根据降水每日資料直接計算的降水一般概率1月为 $\frac{615}{8\times31\times24}=0.103$ 月为 $\frac{486}{8\times31\times24}=0.082$. 这些值和表2中的計算值是一样的.

我們利用表1与2中的資料还可以計算风向的条件概率. 由(1)式可求得

$$P(W_i|R)=\frac{P(W_i)P(R|W_i)}{P(R)}.$$

因为

$$R=RW_1+RW_2+\cdots RW_{18},$$

所以

$$P(W_i|R)=\frac{P(W_i)P(R|W_i)}{P(W_1)P(R|W_1)+\cdots+P(W_{18})P(R|W_{18})}. \tag{11}$$

降水的一般概率

SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	N	c	v	合計
0.030	0.042	0.030	0.022	0.021	0.037	0.076	0.114	0.015	0.001	
0.092	0.091	0.033	0.014	0.008	0.011	0.012	0.019	0.008		
0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0010	0.0034	0.0065	0.0136	0.0007		0.1000
0.0025	0.0032	0.0030	0.0010	0.0004	0.0014	0.0012	0.0031	0.0012	0.0005	0.0820

(11)式就是所謂 Bayes 定理[1]. 利用此定理就可以由 $P(R|W_i)$ 与 $P(W_i)$ 計算 $P(W_i|R)$. 例如，在南京 1 月降雨时 NNE 风的概率为

$$P(W_1|R)=\frac{0.165\times 0.154}{0.0254+0.0206+\cdots+0.0007}=\frac{0.0254}{0.1000}=0.254.$$

根据定义公式(7)的計算結果也是 0.254.

上面我們只講述了雾、雨与风的条件概率与降水一般概率的計算方法，其他大气現象(如霾、雪暴等)的統計也如此.

二、复合概率的計算

根据乘法定理[(1)式]我們可以計算二事件 A 与 B 同时出現的概率或复合事件 AB 的复合概率.

我們把乘法定理一般化推到 n 个事件，則

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \qquad (12)$$

$P(A_1A_2\cdots A_n)$就代表事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 同时出現的概率或复合事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 的复合概率.

如在 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中，每一个事件对于其余事件都是随机不相干的，則一般公式(12)化为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \qquad (13)$$

設 B 代表台站 B 为雨日的事件. 設 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 代表台站 B 四周 n 个台站，这些台站为雨日的事件也各用 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 代表之，且設 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots \bar{A}_n$ 为其各个相反事件. 在台站 B 四周 n 个台站上在某一日或都非为雨日，或只有一个台站为雨日，或有二个台站为雨日，……，或 n 个台站都为雨日. 如設 E 代表必然事件，則上述情况可用下列符号代表之：

$$\begin{aligned} E = {} & \bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n + (A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cdots\bar{A}_n + A_2\bar{A}_1\bar{A}_3\cdots\bar{A}_n \\ & + \cdots + A_n\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}) + (A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4\cdots\bar{A}_n + A_2A_3\bar{A}_1\bar{A}_4\cdots\bar{A}_n \\ & + \cdots + A_1A_n\bar{A}_2\bar{A}_3\cdots\bar{A}_{n-1}) + (A_1A_2A_3\bar{A}_4\bar{A}_5\cdots\bar{A}_n + A_2A_3A_4\bar{A}_1\bar{A}_5\cdots\bar{A}_n \\ & + \cdots + A_1A_{n-1}A_n\bar{A}_2\bar{A}_3\cdots\bar{A}_{n-2}) + \cdots + (A_1A_2\cdots A_n). \qquad (14) \end{aligned}$$

設 B_0 代表台站 B 单独为雨日，四周 n 个台站都非为雨日的事件；B_1 代表四周 n 个台

1) 参考一般数理統計学.

站中有 1 个台站和台站 B 同为雨日的事件；B_2 代表四周 n 个台站中有 2 个台站和台站 B 同为雨日的事件；……；B_n 代表四周 n 个台站和台站 B 都同为雨日的事件. 于是，由式(14)求得

$$P(B)=P(BE)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)+\cdots+P(B_n), \tag{15}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}
P(B_0)&=P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n),\\
P(B_1)&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cdots\bar{A}_n)\\
&\quad+P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3\cdots\bar{A}_n)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+P(BA_n\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}),\\
P(B_2)&=P(BA_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4\cdots\bar{A}_n)\\
&\quad+P(BA_2A_3\bar{A}_1\bar{A}_4\cdots\bar{A}_n)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+P(BA_1A_n\bar{A}_2\bar{A}_3\cdots\bar{A}_{n-1}),\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
P(B_n)&=P(BA_1A_2\cdots A_n),
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 $P(B_0)$ 共有 $\binom{n}{0}=1$ 項，$P(B_1)$ 共有 $\binom{n}{1}$ 項，$P(B_2)$ 共有 $\binom{n}{2}$ 項，……，$P(B_n)$ 共有 $\binom{n}{n}=1$ 項.

根据(12)式，我們求得

$$\left.\begin{aligned}
P(B_0)&=P(B)P\Big(\prod_i\bar{A}_i\,|\,B\Big),\\
P(B_1)&=P(B)\sum_i\Big\{P(A_i|B)P\Big(\prod_k\bar{A}_k\,|\,BA_i\Big)\Big\},\\
P(B_2)&=P(B)\sum_{i,j}\Big\{P(A_i|B)P(A_j|BA_i)\cdot\\
&\quad\cdot P\Big(\prod_k\bar{A}_k\,|\,BA_iA_j\Big)\Big\},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
P(B_n)&=P(B)\prod_i\{P(A_i|B\cdots A_{i-2}A_{i-1})\},
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

此处 i 具有 1, 2, ……n 各值；i 与 j 在 1, 2, ……n 中取所有各組合；k 可具有 1, 2, ……n 各值，但 i 与 j 值除外；$A_0=1$.

如 $n=1$，則(15)式化为

$$P(B)=P(B_0)+P(B_1), \tag{18}$$

此处

$$P(B_0)=P(B\bar{A}_1),$$
$$P(B_1)=P(BA_1).$$

于是，(17)式化为

$$\left.\begin{aligned} P(B_0) &= P(B)P(\bar{A}_1|B), \\ P(B_1) &= P(B)P(A_1|B). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

把(19)式代入(18)式，则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B)P(\bar{A}_1|B) + P(B)P(A_1|B) \\ &= P(B)\frac{P(B\bar{A}_1)}{P(B)} + P(B)\frac{P(BA_1)}{P(B)}, \end{aligned}$$

或

$$P(B) = P(B\bar{A}_1) + P(BA_1). \tag{20}$$

我們知道(20)式是恆等的。

如 $n > 1$，把(17)式代入(15)式同样可求得和(20)式相仿的恆等式，不过其形式共有 $n-1$ 个：

$$\left.\begin{aligned} P(B) &= P(B\bar{A}_1) + P(BA_1), \\ P(B) &= P(B\bar{A}_2) + P(BA_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ P(B) &= P(B\bar{A}_{n-1}) + P(BA_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

如 $n = 3$，則(15)式化为

$$P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3), \tag{22}$$

此处根据(17)式求得

$$\left.\begin{aligned} P(B_0) &= P(B)P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3|B), \\ P(B_1) &= P(B)P(A_1|B)P(\bar{A}_2\bar{A}_3|BA_1) \\ &\quad + P(B)P(A_2|B)P(\bar{A}_3\bar{A}_1|BA_2) \\ &\quad + P(B)P(A_3|B)P(\bar{A}_1\bar{A}_2|BA_3), \\ P(B_2) &= P(B)P(A_1|B)P(A_2|BA_1)P(\bar{A}_3|BA_1A_2) \\ &\quad + P(B)P(A_2|B)P(A_3|BA_2)P(\bar{A}_1|BA_2A_3) \\ &\quad + P(B)P(A_3|B)P(A_1|BA_3)P(\bar{A}_2|BA_3A_1), \\ P(B_3) &= P(B)P(A_1|B)P(A_2|BA_1)P(A_3|BA_1A_2). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由(22)式，已知

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) \\ &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + [P(BA_1A_2A_3) + P(BA_1A_2\bar{A}_3)] \\ &\quad + [P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_1A_3\bar{A}_2)] \\ &\quad + P(BA_2A_3\bar{A}_1) + P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3) + P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + [P(BA_1A_2) + P(BA_1\bar{A}_2)] \\ &\quad + P(BA_2A_3\bar{A}_1) + P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3) + P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3) + P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &\quad + P(BA_2A_3\bar{A}_1) + P(BA_1). \end{aligned}$$

我們根据符号排列可求得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3) + P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2) + P(BA_2A_3\bar{A}_1) + P(BA_1) \\ &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2) + P(BA_1A_3\bar{A}_2) + P(BA_2) \\ &= P(B\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3) + P(BA_1A_2\bar{A}_3) + P(BA_3). \end{aligned} \tag{24}$$

在(24)式两边相加，則求得

$$P(B)=P(B_0)+\frac{2}{3}P(B_1)+\frac{1}{3}P(B_2)+\frac{1}{3}[P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)]. \quad (25)$$

(25)式就是和(22)式并列的校对公式.

現在我們設 $BA_1=C$，則仿(15)式可写出

$$P(C)=P(C_0)+P(C_1)+P(C_2). \quad (26)$$

C_0 代表仅 BA_1 为雨日，其余台站都不是雨日的事件；C_1 代表在其余台站中 1 个台站与 BA_1 同为雨日的事件，C_2 代表其余 2 个台站与 BA_1 同为雨日(卽 4 个台站都为雨日)的事件. (26)式或写如

$$\begin{aligned}P(BA_1)&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+[P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)]\\&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+P(BA_1A_2).\end{aligned}$$

(26)式或写如

$$\begin{aligned}P(BA_1)&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+[P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)]\\&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_3).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P(BA_1)&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+P(BA_1A_2)\\&=P(BA_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+P(BA_1A_3). \quad (27)\end{aligned}$$

同样，我們可以求得

$$\begin{aligned}P(BA_1)&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+P(BA_1\bar{A}_2)\\&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+P(BA_1\bar{A}_3), \quad (28)\\
P(BA_2)&=P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3)+P(BA_2A_3\bar{A}_1)+P(BA_1A_2)\\&=P(BA_2\bar{A}_1\bar{A}_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+P(BA_2A_3), \quad (29)\\
P(BA_2)&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3)+P(BA_2\bar{A}_1)\\&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_2A_3\bar{A}_1)+P(BA_2\bar{A}_3), \quad (30)\\
P(BA_3)&=P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+P(BA_2A_3)\\&=P(BA_3\bar{A}_1\bar{A}_2)+P(BA_2A_3\bar{A}_1)+P(BA_1A_3), \quad (31)\\
P(BA_3)&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2)+P(BA_3\bar{A}_1)\\&=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_3A_2\bar{A}_1)+P(BA_3\bar{A}_2). \quad (32)\end{aligned}$$

在(27)—(32)式两边相加，化簡以后可写成

$$\begin{aligned}P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)&=P(B_1)+\frac{3}{2}P(B_2)+\frac{3}{2}P(B_3)+\\&+\frac{1}{2}[P(BA_1A_2)+P(BA_2A_3)+P(BA_1A_3)], \quad (33)\end{aligned}$$

(33)式就是和(22)与(25)式并列的校对公式.

現在設 $BA_1A_2=D$，則仿(15)式可写出

$$P(D)=P(D_0)+P(D_1). \quad (34)$$

D_0 代表仅 BA_1A_2 为雨日，另一台站非为雨日的事件；D_1 代表另一台站与 BA_1A_2 同为雨日(卽 4 个台站都为雨日)的事件. (34)式或写成

$$P(BA_1A_2)=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_2\bar{A}_3). \quad (35)$$

同样，

$$P(BA_2A_3)=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_2A_3\bar{A}_1), \quad (36)$$

$$P(BA_1A_3)=P(BA_1A_2A_3)+P(BA_1A_3\bar{A}_2). \quad (37)$$

在(35)—(37)式两边相加，可写成

$$P(BA_1A_2)+P(BA_2A_3)+P(BA_1A_3)=P(B_2)+3P(B_3). \quad (38)$$

(38)式就是和(22)，(25)与(33)式并列的另一校对公式。

在(23)式中各条件概率都可按(2)或(3)式計算之。(23)式虽外表繁复，但实际計算很簡单，且前后可以相互利用。在(23)式中各条件概率都具有統計意义，这些統計值可以說明概率鏈鎖过程。例如，$P(B_3)=P(BA_1A_2A_3)=P(B)P(A_1|B)P(A_2|BA_1)P(A_3|BA_1A_2)$ 是要計算 B, A_1, A_2, A_3 四地同时具有雨日的概率，我們根据其中各条件概率就可以分析四地雨日的概率鏈鎖情况。现在以汉口为 B，襄阳为 A_1，长沙为 A_2，重庆为 A_3，統計四地同时都为雨日的概率如表 3 所示。

表 3　汉口、襄阳、长沙与重庆同时为雨日的概率

	$P(B)$	$P(A_1\|B)$	$P(A_2\|BA_1)$	$P(A_3\|BA_1A_2)$	$P(B_3)$
1 月	0.3138	0.5608	0.8667	0.4231	0.0645
8 月	0.3050	0.6250	0.4154	0.5185	0.0411

我們知道四地同时为雨日的概率 1 月大于 8 月，并且我們知道这种情况只是由于条件概率 $P(A_2|BA_1)$ 一个环节造成的。虽然 $P(B_3)$ 可以直接計算如下：

$$P(B_3)=\frac{B, A_1, A_2, A_3\text{各地同时每日 0.1 毫米以上降水日数}}{\text{討論时期总日数}},$$

但这样計算結果只能說明其表面上的联系，未能說明內在的联系。总之，虽然 $P(B_0)$，$P(B_1)$ 等等可以很容易直接由原始記录計算之，但不如根据(23)式計算更有意义，尤其是在已有(23)式中各条件概率的情况下如此(条件概率計算方法仿 A 节)。实际由(23)式計算复合概率的意义是和由(9)式計算一般概率的意义一样的。

我們統計 $P(B_1)$ 时，固然可以簡单的計算 $P(BA_1)=P(B)P(A_1|B)$、$P(BA_2)=P(B)P(A_2|B)$ 与 $P(BA_3)=P(B)P(A_3|B)$，然后求其和，但是这些复合概率都是有条件的，必須在其他台站不为雨日的条件下統計之。这样，在統計过程中計算頻数时就容易发生錯誤。这些錯誤如用(23)式就可以避免。用(23)式統計其他概率的意义也如此。

最后，在(22)式中我們知道：如由原始記录已經計算出 3 个概率值，那么另一概率值就可以間接計算，不必由原始記录計算之。

现在我們就利用实际資料說明(22)式的計算方法。我們根据汉口(B)、襄阳(A_1)、长沙(A_2)与重庆(A_3)各地断續共 12 年記录 (1931—1952) 所計算的各种条件概率首先列如表 4。根据表 4 中的資料利用(22)式計算表 5，在表 5 中又重复給出表 4 中汉口雨日概率 $P(B)$，借以驗証。

在表 5 中我們知道：在长江流域的汛期內 (4—10 月)，汉口、襄阳、长沙与重庆四地同时为雨日的概率 $P(B_3)$ 各月都很小，尤其 7—9月更小(4%)。只有在暑热期以外的月份內这种概率才会大些，尤其在春季与夏初当鋒面与气旋盛行时期这种概率更大(8—12%)。

表 4 汉口、襄阳、长沙与重庆各地雨日条件概率

	1 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10月
$P(B)$	0.3138	0.4667	0.4866	0.3806	0.3196	0.3050	0.3121	0.3021
$P(A_1\|B)$	0.5608	0.5833	0.5304	0.5766	0.5229	0.6250	0.4660	0.5243
$P(A_2\|B)$	0.7193	0.7976	0.7072	0.5620	0.4495	0.4615	0.4369	0.5146
$P(A_3\|B)$	0.3772	0.5357	0.6409	0.6861	0.4312	0.4808	0.6213	0.8252
$P(A_1\|BA_3)$	0.5582	0.5778	0.5517	0.5851	0.7447	0.5600	0.5156	0.6000
$P(A_1\|BA_2)$	0.6933	0.5746	0.5000	0.4935	0.4490	0.5625	0.3556	0.6111
$P(A_2\|BA_1)$	0.8667	0.7857	0.6667	0.4810	0.3929	0.4154	0.3333	0.6111
$P(A_3\|BA_2)$	0.4268	0.5821	0.6328	0.7273	0.3061	0.5417	0.6889	0.8679
$P(A_3\|BA_1)$	0.4000	0.5306	0.6667	0.6962	0.6250	0.4308	0.6875	0.9444
$P(A_3\|BA_1A_2)$	0.4231	0.5974	0.6406	0.7105	0.5455	0.5185	0.7500	0.9394
$P(\bar{A}_1\|BA_2A_3)$	0.2571	0.4103	0.4938	0.5179	0.2000	0.4231	0.5806	0.3261
$P(\bar{A}_2\|BA_3A_1)$	0.0833	0.1154	0.3594	0.5091	0.6571	0.5000	0.6364	0.3904
$P(\bar{A}_3\|BA_2A_1)$	0.5769	0.4026	0.3594	0.2895	0.4545	0.4815	0.2500	0.0606
$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\|BA_3)$	0.1053	0.0667	0.1034	0.0957	0.1915	0.2000	0.1875	0.2118
$P(\bar{A}_2\bar{A}_3\|BA_1)$	0.1000	0.1531	0.0938	0.1646	0.2143	0.3692	0.2292	0.0185
$P(\bar{A}_3\bar{A}_1\|BA_2)$	0.2267	0.1866	0.1875	0.1299	0.4694	0.2084	0.2444	0.0926
$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\|B)$	0.1495	0.0414	0.0497	0.0657	0.1468	0.0769	0.1359	0.0971

表 5 汉口(B)雨日概率的計算

	1 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10月
$P(B_0)$	0.0469	0.0193	0.0242	0.0250	0.0469	0.0235	0.0424	0.0293
$P(B_1)$	0.0813	0.1274	0.1210	0.0889	0.1326	0.1290	0.1030	0.0701
$P(B_2)$	0.1183	0.1917	0.2313	0.1890	0.1061	0.1115	0.1303	0.1084
$P(B_3)$	0.0645	0.1245	0.1103	0.0750	0.0358	0.0411	0.0394	0.0909
合 計	0.3110	0.4629	0.4868	0.3779	0.3214	0.3051	0.3151	0.2987
$P(B)$	0.3138	0.4667	0.4866	0.3806	0.3196	0.3050	0.3121	0.3021

因为在 7—9 月各地降水联系最小，所以各地同为雨日的概率可以用式(13)近似計算之．例如，在 8 月，根据式(13)計算四地同时为雨日的概率为 0.0140，較接近(23)式的計算值 0.0411．反之，在 6 月(13)式的計算值为 0.0244，这与(23)式的計算值 0.0750 很不相同．足見 8 月由于热雷雨盛行，降水联系很小，6 月由于鋒面活动，降水联系可以很大．同样，我們可以說明表 5 中 $P(B_0)$、$P(B_1)$ 与 $P(B_2)$ 的統計意义．

这些概率 $P(B_0)$、$P(B_1)$、$P(B_2)$ 与 $P(B_3)$ 不只具有气候意义，并且在考虑汉口的水文預告时也是很有价值的．

上面統計結果首先应当用(22)式检查之．如在表 5 中的統計結果并不符合于(22)式的条件时，应首先根据(38)式检查 $P(B_2)$ 与 $P(B_3)$ 是否具有錯誤．第一种情况就是(38)式已經适合，$P(B_2)$ 与 $P(B_3)$ 确信計算正确．这时候应根据 (25) 式与 (33) 式检查 $P(B_0)$ 或 $P(B_1)$ 是否具有錯誤．如 $P(B_0)$ 具有錯誤，仅校对 $P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3|B)$ 即可．如 $P(B_1)$ 具有錯誤，就必須检查 $P(\bar{A}_1\bar{A}_2|BA_3)$、$P(\bar{A}_2\bar{A}_3|BA_1)$ 与 $P(\bar{A}_1\bar{A}_3|BA_2)$，不过为了寻求其錯誤所在，还可以借助于 (27)、(29) 与(31)式．第二种情况就是(38)式并不适合，$P(B_2)$ 与 $P(B_3)$ 首先具有錯誤．这时候应首先检查 $P(B)$ 是否具有錯誤，然后根

据(28)、(30)与(32)式分析 $P(B_2)$ 与 $P(B_3)$ 中的錯誤所在 [不过这里的 $P(BA_1\bar{A}_2)$、$P(BA_1\bar{A}_3)$、$P(BA_2\bar{A}_1)$、$P(BA_2\bar{A}_3)$、$P(BA_3\bar{A}_1)$、$P(BA_3\bar{A}_2)$ 应預先統計之，以备校对]. 如(28)、(30)与(32)式都不适合，那么 $P(B_3)$ 具有錯誤的机会很大，并且首先应該检查 $P(BA_1A_2A_3)$.

上面統計結果只是說明雨日复合概率的統計方法. 这个方法同样可应用于計算其他大气現象的复合概率.

本文的統計工作都是由朱培如与馬宜珍两位同志担任的. 在計算过程中因有計算錯誤，曾多次校对未能符合(22)式的条件. 作者曾請施永年与张黛华两位同志重新校对. 施永年同志在校对过程中直接看出(27)、(29)与(31)式的关系，作者証明这些关系以后，且扩大求出更多的关系.

SOME APPLICATIONS OF THE FUNDAMENTAL LAWS IN THE THEORY OF PROBABILITY TO THE CLIMATOLOGY

C. S. Yao

(*Department of Meteorology, Nanking University*)

Abstract

The author first discussed the evaluation of the conditional probability and the general probability, and then discussed the evaluation of the compound probability. The first part of this paper deals with the conditional probabilities of fog for the different wind directions and shows that it is better calculated by the equation:

$$P(F|W_i) = \frac{P(W_iF)}{P(W_i)}, \tag{1}$$

where F represents the fog frequency and W_i represents the frequency of the wind from the direction i ($i=1, 2, \cdots 16$). By practical calculations it shows that the method adopted by M. Wurtele (1944) was unnecessary.

The conditional probabilities of rainfall for the different wind directions have been calculated also by the same method as stated above. Furthermore, the attempts have been made to calculate the general probability of rainfall by applying the theorem of total probability and to calculate the conditional probability of wind direction after the rainfall has been observed by applying Bayes' theorem.

In the second part it has been shown that

$$P(B) = P(B_0) + P(B_1) + \cdots + P(B_n), \tag{2}$$

where B denotes the event of having rain days at the station B; B_0 denotes the event of having rain days only at the station B; B_1 denotes the event that two stations including station B have rain days; B_2 denotes the event that three stations including the station B have rain days; and so on. Besides, by the theorem of compound probability the following formulas can be established:

$$
\left.\begin{aligned}
P(B_0) &= P(B)P\Big(\prod_i \bar{A}\,|\,B\Big),\\
P(B_1) &= P(B)\sum_i\Big\{P(A_i|B)P\Big(\prod_k \bar{A}_k|BA_i\Big)\Big\},\\
P(B_2) &= P(B)\sum_{i,j}\Big\{P(A_i|B)P(A_j|BA_i)\cdot\\
&\qquad\cdot P\Big(\prod_k \bar{A}_k|BA_iA_j\Big)\Big\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P(B_n) &= P(B)\prod_i\{P(A_i|B\cdots A_{i-2}A_{i-1})\},
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

where $i=1, 2, \cdots n$; i, j are taken for all combinations in the numbers $1, 2, \cdots n$; $k=1, 2, \cdots n$ except the numbers i and j; $A_0=1$.

By formula (3) the probabilities of simultaneous occurrence of rain days at Hankow, Siangyang, Changsha and Chungking have been calculated for the different months. For the purpose of check the following three formulas have been derived in addition to the formula (2):

$$
P(B)=P(B_0)+\frac{2}{3}P(B_1)+\frac{1}{3}P(B_2)+\frac{1}{3}[P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)], \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
P(BA_1)&+P(BA_2)+P(BA_3)\\
&=P(B_1)+\frac{3}{2}P(B_2)+\frac{3}{2}P(B_3)+\frac{1}{2}[P(BA_1A_2)+\\
&\qquad+P(BA_2A_3)+P(BA_1A_3)]
\end{aligned} \tag{5}
$$

and

$$
P(BA_1A_2)+P(BA_2A_3)+P(BA_1A_3)=P(B_2)+3P(B_3). \tag{6}
$$

At last the author has demonstrated that the computation of the compound probability by formula (3) is more significant than that by direct computation from the definition of probability.