

用車貝雪夫多項式研究月平均 500 毫巴 等压面位勢場的初步結果*

張家誠

周家斌 黃文杰 馬維華

(中央气象局气象科学研究所)

(北京大学地球物理系)

提 要

本文用車貝雪夫多項式分解了 1952—1961 年逐月 500 毫巴等压面平均位勢圖和長江中下游地區降水和溫度的季度特征。討論了解析誤差及其訂正和車貝雪夫系數在環流分型中的應用。把車貝雪夫系數和環流型的時間序列看成狀態數目有限、時間疏散的馬爾可夫鏈，計算了系數和環流型的轉移概率和絕對概率，並估計了結果的誤差，討論了鏈的性質，並用轉移概率作出了未來形勢場的預報。

一、引 言

為了深入研究大氣運動的規律性，必須客觀描寫大氣環流和各種氣象要素分布的主要特征。定量表示氣象場的方法很多，環流指數是廣泛採用的方法。但是氣象場是複雜的，環流指數只能表示個別特點，不能認為是全面的。為了彌補這個缺陷，近年來日益廣泛地試圖用數學分解的方法，來研究氣象場的特點。屬於這一類的工作有：冪級數分解^[1]、三角級數分解^[2]、球函數分解^[3]、自然的正交分量分解^[4]、經驗正交函數分解 (Willett, H. C., 1957)、高得遜 (Godson) 法^[5]、車貝雪夫 (Чебышев) 多項式分解^[5-10]等。

車貝雪夫多項式分解與其他數學分解法比較，有如下優點：第一，能夠在任意選定的有限區域內進行分解，而球函數分解則需要在全球或半球才能進行。因此，用車貝雪夫多項式研究各種空間尺度的氣象場都是方便的。第二，收斂速度較球函數級數快得多，各個系數都能分別計算，並且可根據精確度的要求補算高次項的系數。這就是車貝雪夫分解法得到更為廣泛應用的主要原因。

在氣象學中最早試用車貝雪夫多項式的是維得斯沃斯 (Wadsworth, G. P.) 和布銳 (Bryan, J. G., 1948)，此後美國麻省理工學院和蘇聯中央預報研究所在這方面都做過一系列工作。這些工作主要側重於分析流場的特征，供短期^[6-9]、中期^[10-12]和長期預報 (Willett, H. C., 1957) 研究之用。也有人將多項式系數用以研究大氣環流的周期性^[13]、持續性^[14]以及個別分析^[15]和環流與天氣的關係^[11, 16]等。還有個別作者試用車貝雪夫多項式計算拉普拉斯場^[17]。這些工作只能認為是車貝雪夫多項式在氣象學中應用的開始。應當指出：有關車貝雪夫多項式在氣象學中應用的一些重要技術問題，例如，分解的誤差問題、為簡化計算取項數較少時所引起的誤差的訂正問題，還討論得不够。至於將分解式系數應用於中長期預報則仍限於一般的相关分析及周期性等氣候規律方面。巴格諾夫 (Барнов,

* 本文 1962 年 8 月 29 日收到，10 月 26 日收到修改稿。

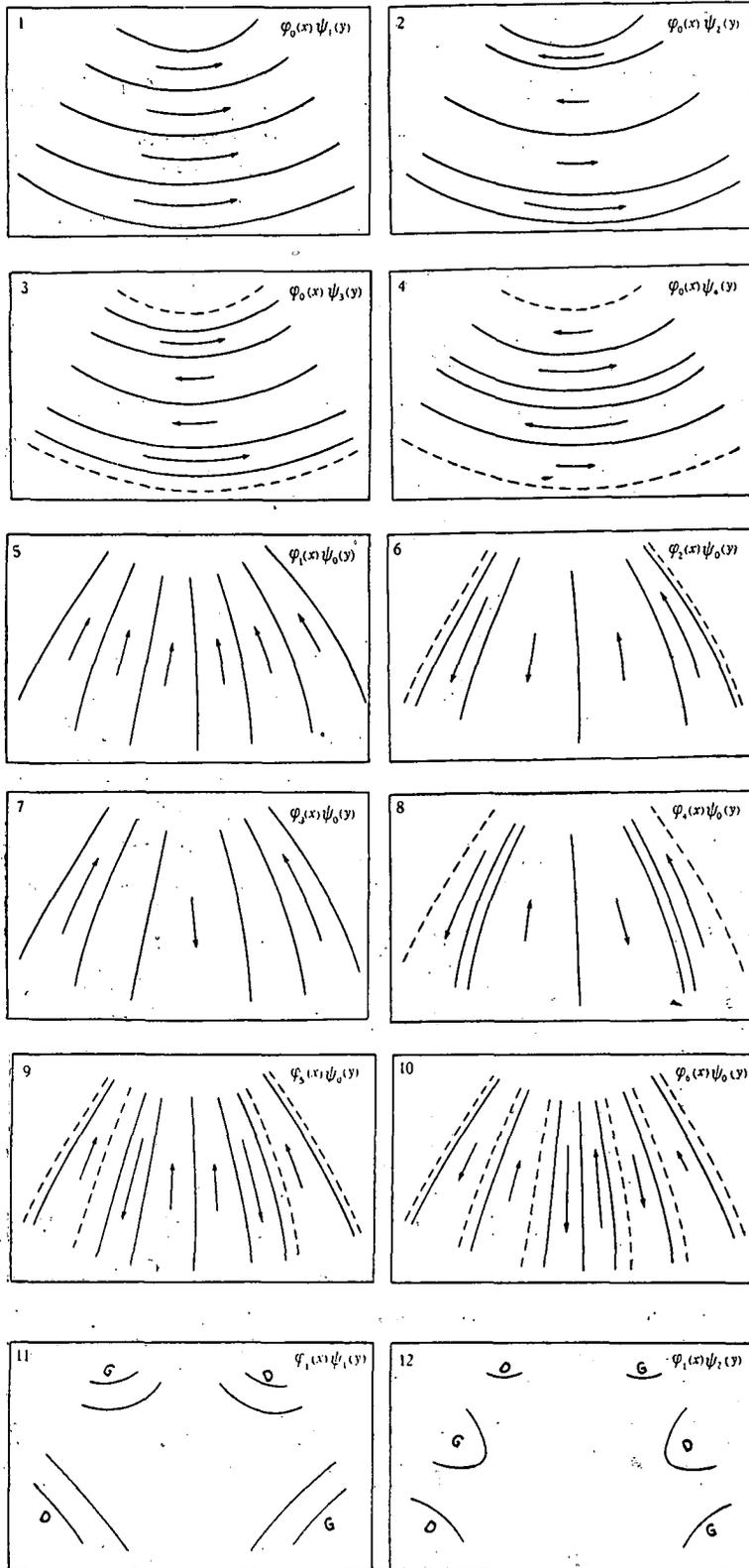
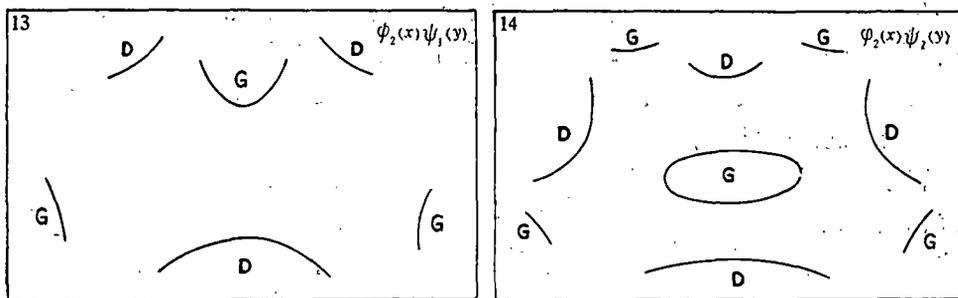


图 1 車貝雪夫多項式图
(x 軸向东, y 軸向南)



(續 图 1)

H. A.) 等^[12] 虽试图用馬尔可夫鏈的原理进行研究, 但是对系数所构成的鏈的基本性质也未进行較多的討論. 在本文中作者希望对上列問題进行一些分析, 并試用車貝雪夫分解式的主要系数进行环流分型. 然而, 由于作者的水平不高, 又由于資料、時間及計算条件的限制, 在本文中所得的結果只是初步的.

二、分解过程中的技术問題

分解时所用的公式是:

$$Z(x, y) = \sum_k \sum_s A_{ks} \varphi_k(x) \psi_s(y). \quad (1)$$

在分解 500 毫巴等压面位勢場时, $Z(x, y)$ 是点 (x, y) 处的等压面高度, $\varphi_k(x)\psi_s(y)$ 是車貝雪夫多項式, k, s 分別是緯向 (x) 和經向 (y) 多項式的序号, 将其应用于气压場时, 对应的流型如图 1 所示. A_{ks} 是車貝雪夫系数, 按正交多項式原理^[18], 可由下式求出:

$$A_{ks} = \frac{\sum_i \sum_j Z(x_i, y_j) \varphi_k(x_i) \psi_s(y_j)}{\sum_i \varphi_k^2(x_i) \sum_j \psi_s^2(y_j)}. \quad (2)$$

本文中着重研究的五个主要系数的物理意义如下:

- A_{00} ——整个研究范围的平均高度.
- A_{01} ——研究范围全区为均匀西风的流型的权重, 可称为西风指数.
- A_{02} ——研究范围为緯向槽形气压場, 即北半部为东风、南半部为西风的流型的权重 (权重为負时, 风向反向, 下同).
- A_{10} ——研究范围全区为均匀南风的流型的权重.
- A_{20} ——研究范围为經向槽形气压場, 即西半部为北风、东半部为南风的流型的权重.

所用的資料是 1952—1961 年共 10 年的逐月 500 毫巴等压面平均位勢图. 分解的范

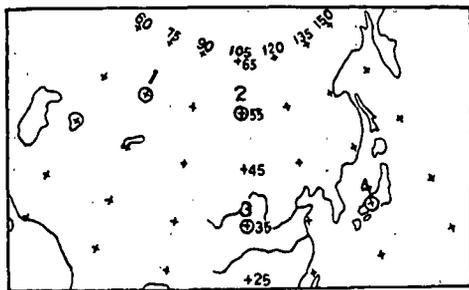


图 2 研究范围及网格点分布图

围是 60° — 150° E, 25° — 65° N (见图 2), 在这个范围内基本上包括了对东亚天气有直接影响的活动中心。为了便于比较, 我们一共采用过六种选取网格点或分为副区的分解方法, 最后选定的网格为: 纬向上取 $m = 7$ 个点 (每隔 15 度一点), 经向上取 $n = 5$ 个点 (每隔 10 度一点) (见图 2)。

我们对于五个主要系数分别求出了各月的十年气候平均值和每月的距平值、每年的平均值、十年总平均值及每年的年距平值。由于車貝雪夫多项式具有线性性质^[18], 因而这些数值就分别是相应的气候平均图和距平图的分解式系数。各系数值及相应的平均值见表 1 (距平值从略)。

分解结果是令人满意的。图 3a, 3b 给出了 1958 年 1 月 500 毫巴平均位势图和取展开式中 13 项逼近的结果作为例子。类似的結果茲維列夫 (Зверев, Н. И.)^[20] 也曾得到过。

表 1 車貝雪夫系数值

 A_{00}^*

年/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	年值
1952	40.829	44.914	46.857	55.314	64.172	70.828	77.000	75.514	70.171	59.629	49.890	43.600	58.227
1953	42.057	45.514	48.343	58.514	64.686	72.143	77.143	75.700	69.857	59.600	50.514	46.143	59.185
1954	40.257	42.971	47.657	57.371	62.029	71.171	76.029	75.286	69.800	62.110	52.630	49.000	58.859
1955	44.286	41.886	47.057	54.771	64.286	71.057	73.686	75.114	69.080	61.400	51.310	43.090	58.085
1956	40.857	45.000	48.629	53.743	62.310	70.430	75.571	73.714	67.857	60.171	54.690	47.540	58.376
1957	39.800	43.771	46.029	53.829	62.343	72.143	76.100	75.943	69.890	59.430	50.286	44.800	57.864
1958	44.750	44.286	46.000	55.286	62.686	71.257	73.800	75.686	68.486	60.943	50.710	45.740	58.303
1959	43.029	45.543	50.486	56.143	63.371	72.057	75.371	75.229	72.200	60.029	52.571	45.600	59.302
1960	42.510	42.490	45.714	55.400	63.343	71.543	75.343	74.600	69.771	60.086	50.914	47.229	58.245
1961	42.686	42.086	50.000	54.972	63.429	70.314	74.886	74.657	68.800	60.371	52.200	45.486	58.324
平均	42.106	43.846	47.677	55.534	63.266	71.294	75.493	75.144	69.591	60.376	51.551	45.823	58.477

 A_{01}

年/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	年值
1952	17.457	13.630	14.829	14.729	11.530	8.800	6.071	7.614	10.314	15.786	17.760	17.760	13.026
1953	15.000	15.971	16.243	10.510	10.386	7.943	6.529	7.486	11.000	15.100	17.042	17.030	12.520
1954	17.086	17.157	16.614	13.230	12.329	7.457	5.914	7.657	10.570	12.410	16.000	13.070	12.458
1955	15.329	15.957	16.643	13.643	10.586	8.243	7.714	7.858	11.260	14.130	17.440	18.440	13.104
1956	14.957	12.086	15.843	15.757	12.740	7.940	6.657	8.171	11.671	15.300	13.930	13.600	12.388
1957	17.686	12.571	14.629	14.571	10.890	6.829	5.843	6.771	9.600	15.470	18.343	18.714	12.660
1958	16.070	15.229	17.514	15.943	12.500	8.557	7.000	7.314	11.657	14.500	18.430	18.190	13.575
1959	15.742	16.314	16.086	15.086	11.800	7.586	6.771	7.171	10.760	15.186	15.371	17.543	12.951
1960	16.090	19.240	16.400	13.786	11.329	10.257	7.057	8.400	11.171	15.857	17.584	14.957	13.511
1961	16.342	15.171	14.343	15.300	12.643	9.386	7.400	8.286	11.442	14.543	16.357	15.071	13.024
平均	16.176	15.333	15.914	14.256	11.673	8.300	6.696	7.673	10.943	14.830	16.825	16.438	12.921

* 表中所列 A_{00} 值省去了百位数“5”。

A_{02}

年/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	年值
1952	1.102	3.469	1.490	0.112	-0.827	-0.347	-0.867	-1.741	-0.816	-1.500	0.622	1.640	0.195
1953	2.041	2.939	0.622	1.878	0.071	0.408	0.357	-0.939	-1.755	-0.765	2.153	1.204	0.684
1954	2.204	1.622	0.684	0.735	1.235	0.245	-0.286	-1.245	-2.490	-0.316	0.735	3.360	0.540
1955	1.806	2.582	1.275	0.969	-0.541	-0.459	-0.531	-1.776	-0.735	-1.740	-0.663	0.173	0.030
1956	2.663	4.000	1.398	0.133	0.122	0.653	-0.286	-1.691	-1.337	-2.031	1.480	3.370	0.706
1957	1.082	3.041	1.041	-0.347	-0.306	0.102	0.724	-0.286	-0.673	-1.704	-0.939	0.184	0.160
1958	1.950	1.306	1.082	0.326	-0.255	-0.724	-0.734	-1.183	-1.449	-1.119	-0.592	0.010	-0.105
1959	1.755	1.245	0.143	-0.531	-0.489	0.459	-0.041	-0.306	-1.562	-0.847	1.792	1.857	0.290
1960	2.530	0.173	1.000	0.418	1.010	-1.245	-0.490	-1.653	-1.000	-2.143	-0.439	2.765	0.077
1961	2.041	2.061	1.000	-0.929	-0.735	-0.439	-0.531	-1.245	-1.459	-0.469	-0.255	1.337	0.031
平均	1.917	2.244	0.974	0.276	-0.096	-0.135	-0.269	-1.207	-1.327	-1.264	0.389	1.590	0.259

 A_{10}

年/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	年值
1952	-4.479	-5.164	-2.386	-1.957	-2.493	-1.600	-0.821	-0.150	-1.221	-1.550	-3.440	-3.890	-2.423
1953	-3.086	-3.807	-1.636	-3.736	-1.721	-0.929	-0.579	-1.093	-0.329	-1.321	-2.614	-3.000	-1.988
1954	-2.629	-1.150	-3.710	-2.393	-2.864	-0.743	-0.307	0.271	-0.807	-0.871	-2.740	-3.660	-1.800
1955	-3.779	-2.864	-2.321	-2.764	-1.629	-1.379	-0.300	0.379	-0.714	-1.810	-1.890	-1.860	-1.744
1956	-3.764	-3.836	-2.621	-3.064	-2.870	-0.678	-0.421	-0.336	0.579	-1.171	-2.190	-2.870	-1.937
1957	-1.700	-3.042	-2.329	-1.500	-1.700	-1.479	-0.386	-0.307	-1.800	-1.590	-1.100	-1.986	-1.553
1958	-4.190	-2.993	-2.986	-2.550	-1.821	-1.750	0.679	-0.214	1.035	-1.135	-2.390	-2.230	-1.712
1959	-4.229	-1.336	-1.957	-2.071	-1.280	-2.914	-0.157	0.364	-0.007	-0.443	-2.235	-3.693	-1.663
1960	-3.150	-3.570	-1.200	-2.957	-1.407	-1.143	0.072	0.079	-0.843	-0.686	-2.057	-4.221	-1.757
1961	-3.736	-2.571	-3.029	-1.564	-1.921	-0.850	0.136	0.600	0.200	-0.836	-1.371	-1.764	-1.392
平均	-3.474	-3.033	-2.418	-2.456	-1.971	-1.347	-0.209	-0.041	-0.391	-1.141	-2.203	-2.917	-1.800

 A_{20}

年/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	年值
1952	-0.121	-0.045	-0.138	0.095	0.002	0.714	0.293	0.250	0.160	0.560	0.624	0.148	0.212
1953	-0.362	-0.617	-0.622	-0.136	0.150	-0.052	0.040	0.340	-0.057	-0.112	-0.400	-0.238	-0.172
1954	0.005	-0.002	0.405	0.292	0.260	0.110	0.302	-0.205	0.298	0.448	0.364	0.617	0.241
1955	-0.683	0.317	-0.012	0.207	0.086	-0.002	0.131	0.145	0.352	0.171	-0.121	-0.093	0.041
1956	0.264	-0.245	-0.045	0.102	0.267	0.507	-0.155	0.088	-0.102	0.238	-0.398	-0.188	0.028
1957	-0.314	0.510	-0.824	0.191	0.500	-0.155	0.314	0.236	0.576	0.098	0.010	-0.067	0.090
1958	0.037	-0.007	-0.190	0.327	-0.036	0.193	0.093	0.224	0.045	0.079	0.060	-0.010	0.068
1959	0.110	-0.517	-0.233	0.419	0.450	-0.117	0.219	0.040	-0.150	0.100	0.774	0.317	0.118
1960	0.083	-0.114	-0.300	0.229	-0.007	0.138	0.081	0.326	0.114	0.029	0.686	0.210	0.123
1961	0.205	-0.081	-0.829	-0.326	0.407	0.302	0.369	0.124	0.067	0.307	-0.171	0.345	0.060
平均	-0.078	-0.080	-0.279	0.140	0.208	0.164	0.169	0.157	0.130	0.192	0.143	0.104	0.083

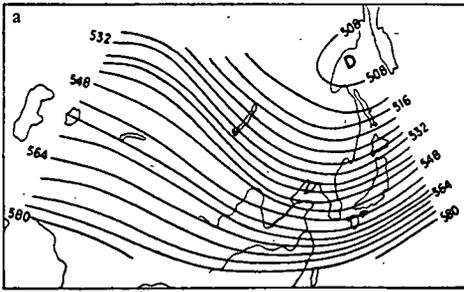


图 3a 1958 年 1 月 500 毫巴位势图

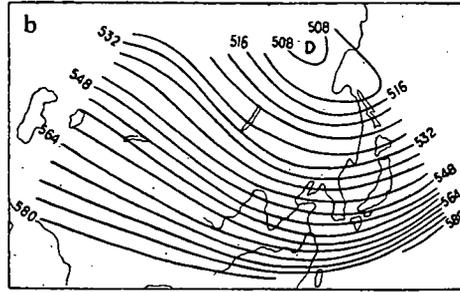


图 3b 1958 年 1 月 z^{4422} 图

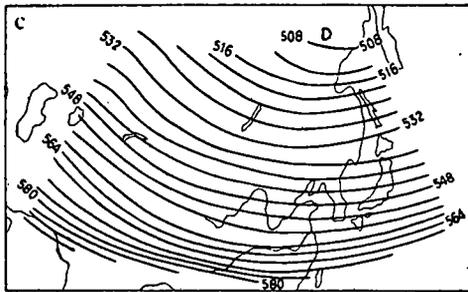


图 3c 1958 年 1 月 z^{2200} 图

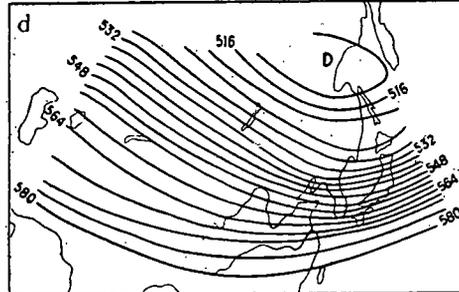


图 3d 1958 年 1 月 z^{2200} 图

为了计算的简化和考虑到实际工作中的应用意义，经常不计算全部系数。取项不足时就会产生误差。把计算结果与各点实际高度比较即可得出误差值。

这种误差对于一定的季度说来，具有系统性。例如 1 月份的误差一般具有东部偏高西部偏低的趋势，十年气候平均图的误差也是如此。这种误差场的形成与 1 月份亚洲大气环流的基本特点有密切关系。1 月份在西亚是气候脊活动的区域，东亚是气候槽活动的区域，全区有两支明显的锋带，而南支还有孟加拉低槽。这种气候特征在每年都是很明显的。車貝雪夫分解式的前几项主要表现的是较简单的大型波动，因而引起以上误差场的产生。在 7 月也有一定的气候性的系统误差。这种误差我们可以用常年分解误差来订正。因此，車貝雪夫分解式可以写成下列公式：

$$\tilde{z}_{ij}^{k's'rt} = z_{ij}^{k's'rt} + X_{ij}^{k's'rt} \quad (3)$$

上式中 $z_{ij}^{k's'rt}$ 为纬向、经向、混合多项式最高次数分别为 k' 、 s' 、 rt 时点 (x_i, y_j) 处的逼近值， $X_{ij}^{k's'rt}$ 为取相同项数时气候平均场的分解误差， $\tilde{z}_{ij}^{k's'rt}$ 为订正后的值。我们对历年 1 月和 1954、1958 和 1960 年 7 月的分解进行以上订正后，准确度均有显著提高。1958 年 1 月的实况与订正前（取 z^{2200} ）订正后的形势图分别如图 3a、3c、3d 所示，可以作为例子。

按(3)式还可以得出一个初步结论：由于 X_{ij} 是常年订正值，对于距平说来是没有意义的，故研究环流的年际振动，只考虑前述五个系数基本上也能表示主要特征。

此外，选点的疏密度不但关系到工作量的大小，而且关系到误差的大小。无论是 1 月或 7 月，若均求五个系数，选点疏的 ($m = 7, n = 5$) 全貌相似程度反而比选点密的 ($m = 19, n = 9$) 好。对 500 毫巴月平均位势场来说，本文所用的分解法的网格是较适宜的。

的。

以上是对环流場的分解。对气象要素的分解采用了另一种办法：对 1905—1937 年与 1952—1961 年长江中游区（以汉口、九江、宜昌三站平均值为代表）、下游区（上海、南京、蕪湖）每年 5—9 月共五个月的降水量作時間上（以月为单位）的車貝雪夫展开，每年求出五个系数及相应的距平值；对同期中游区（汉口）下游区（上海、南京、蕪湖）12 月至次年 2 月共三个月温度作車貝雪夫分解，每年求出三个系数及相应的距平值。这些系数能代表一个地区整个季度該要素的主要特征（平均值、总的趋势及月际振动等），所以比用个别月的記錄要好。

运用前面算出的資料，分別制作了系数的历史曲綫、相关图解（兩地区的同時关系，同一地区的前后期关系，下同）、复相关表，并計算了系数之間的相关概率（距平同号为正相关，异号为反相关）及条件概率（某一系数的距平符号已知的条件下另一系数的兩种距平符号的概率），也得到了一些結果。

三、用車貝雪夫系数进行环流分型

根据罗斯培（Rossby, C. G.）长波理論^[23]，大气环流有高低指数兩种基本类型。因此，可以按照各月西风指数 A_{01} 值的大小，把高空流型划分为高低指数兩大类型。

我們將每張月平均图的 A_{01} 数值和实际的图进行比較分析，把每个月的 10 张图（1952—1961）按 A_{01} 或其距平 ΔA_{01} 的大小分为兩部分，一部分叫做高指数，另一部分叫做低指数。取 10 个月中高指数月份中最小的一个 A_{01} （或 ΔA_{01} ）值与低指数月份中最大的一个 A_{01} （或 ΔA_{01} ）值的中值为高低指数的临界值 A_{01c} （或 ΔA_{01c} ）。选取上述最大最小值时要求二者对应的形势場有尽可能大的差別。因此，若 $A_{01} \geq A_{01c}$ （或 $\Delta A_{01} \geq \Delta A_{01c}$ ）則为高指数，反之则为低指数。

对各月求出的 A_{01c} 及 ΔA_{01c} 值見表 2。

表 2 A_{01c} 与 ΔA_{01c} 值表

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A_{01c}	15.907	15.595	15.965	14.179	12.065	8.401	6.715	7.737	11.216	14.822	16.700	16.051
ΔA_{01c}	-0.269	0.261	0.051	-0.077	0.392	0.101	0.019	0.064	0.271	-0.008	-0.125	-0.387

由表 2 可以看出， A_{01c} 与 ΔA_{01c} 有明显的季节变化。11 月至次年 3 月 A_{01c} 接近 16，6—8 月 ΔA_{01c} 接近于零。4, 5, 9, 10 諸月則具有过渡季节的特性。

根据表 2 所列 A_{01c} 和 ΔA_{01c} 值，我們將 1952—1961 年逐月 500 毫巴位勢图进行了分型，結果見表 3。为了方便，以后在提到这一分型法时，用 G 或 1 表示高指数，用 D 或 2 表示低指数。

这种分型方案能够較好地表示大范圍流場的特征。1952 年 10 月（見图 4）为 G 型之例，該月环流相当平直，西风也強。1959 年 8 月（見图 5）为 D 型之例，其波动极大。

表3 两种分型

年\月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1952	1	2	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1
1953	2	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1
1954	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2
1955	2	1	1	2	2	2	1	1	1	2	1	1
1956	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2
1957	1	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1
1958	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1
1959	2	1	1	1	2	2	1	2	2	1	2	1
1960	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	1	2
1961	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2

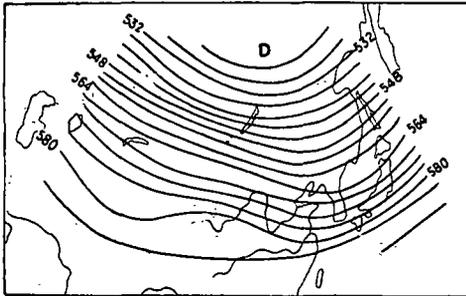


图4 1952年10月500毫巴位势图(G)

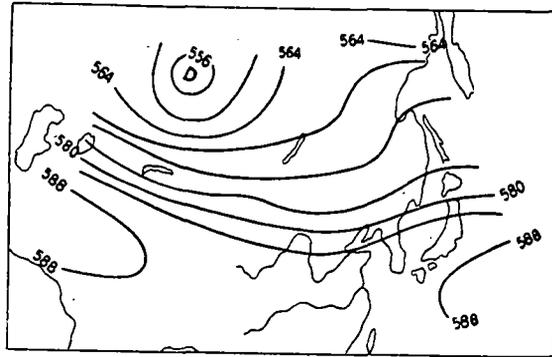


图5 1959年8月500毫巴位势图(D)

由表3还可以看到,环流有一定的持续性,经常出现某一型持续好几个月的情況。如1953, 1954, 1957年夏季(6—8月)均为D型, 1960, 1961年夏季均为G型, 1953—1954年冬季(11—3月)均为G型。还可以看到, 3至4月和9至10月环流型一般转变,其概率分别为83%和92%; 2至3月和11至12月环流型一般维持,其概率分别为92%和83%。

这一分型方案虽从长波理论出发,但由于在各月用了不同的临界值,因而免去了季节影响,突出了个别年份环流的异常性。

但这一分型方案还有两个问题没有解决。其一,某月为高指数,并不意味着该月每候或每日都是高指数。其二,考虑到舒列金(Шулейкин, В. В.)^[21]的季风理论,由于第二类热机的作用,低指数时随着季节的变化,同一地区应有两种不同方向的经向气流。可见,仅仅分出低指数是不够的。因此:

第一,考虑一个月之内的环流变化。月平均的纬向环流,有时是由不同位相的经向环流所组成,这与稳定的纬向环流有本质上的差别。为此,按一月内环流变化的剧烈程度把高指数型分为稳定的与不稳定的两个副型是很必要的。

为表征一个月之内环流变化的剧烈程度,可取由下式算出的离散度指标 L :

$$L = \sum_{m=1}^4 (Q_m / \bar{Q}_m), \quad (4)$$

其中

$$Q_m = \sum_{k=1}^M [z_{k(m)} - \bar{z}_{k(m)}]^2 \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (5)$$

(5) 式中 m 代表不同的点, $z_{k(m)}$ 为点 m 处第 k 候的高度值, $\bar{z}_{k(m)}$ 为該候所在月份的月平均值, M 为一月之內的候数, 为簡便計, 略去第 67 候 (11 月 27 日至 12 月 1 日) 的資料, 而取所有月的 M 皆为 6. 所选的代表点在研究范围的位置見图 2 (各点标有“⊕”).

根据分析, $L \leq 3.81$ 时环流变化較小, $L > 3.81$ 时环流变化剧烈. 故称 $L \leq 3.81$ 者, 为稳定的高指数, 以 G_+ 表示; 称 $L > 3.81$ 者, 为不稳定的高指数, 以 G_- 表示.

第二, 要表征低指数月份局地經向交換的方向, 可采用車貝雪夫系数 A_{20} . 因此, 把 A_{20} 为正的low指数型称为槽式低指数, 以 D_+ 表示; 把 A_{20} 为負的低指数型称为脊式低指数, 以 D_- 表示. 图 6 和图 7 給出两种低指数的例子.

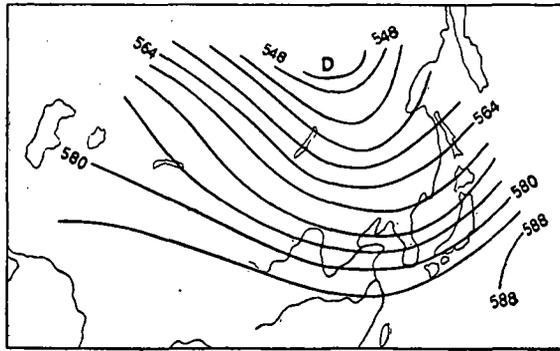


图 6 1957 年 9 月 500 毫巴位势图 (D_+)

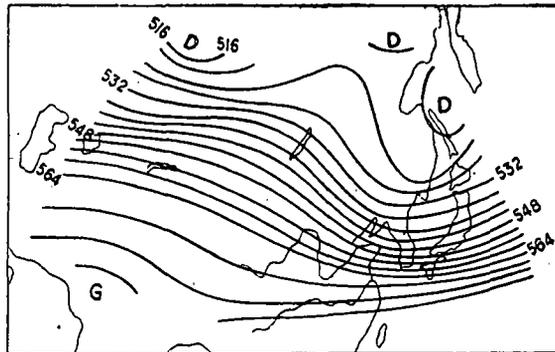


图 7 1957 年 3 月 500 毫巴位势图 (D_-)

綜上所述, 可以建立一个四型的分型方案. 即:

$$A_{01} \geq A_{01c}, G \text{ 型} \begin{cases} L \leq 3.81, G_+ \text{ 型,} \\ L > 3.81, G_- \text{ 型;} \end{cases}$$

$$(\text{或 } \Delta A_{01} \geq \Delta A_{01c})$$

$$A_{01} < A_{01c}, D \text{ 型} \begin{cases} A_{20} > 0, D_+ \text{ 型,} \\ A_{20} < 0, D_- \text{ 型;} \end{cases}$$

$$(\text{或 } \Delta A_{01} < \Delta A_{01c})$$

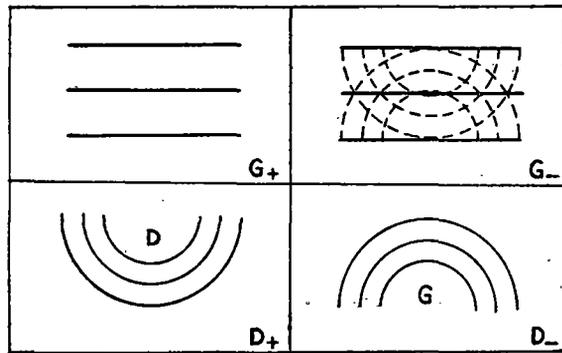


图8 四种环流型模式图

我們沒有发现 $A_{20} = 0$ 的情况,以后如果出现,可依实际情况处理. 这样,就从两个大型分出了四个副型. 为了方便,以后在提到这一分型方案时,分别以 1, 2, 3, 4 表示 G_+ , G_- , D_+ , D_- 各型. 按照上面的分析,作出四型的模式如图 8.

我們用前述标准对 1952—1961 年逐月 500 毫巴位势图进行了分型,结果见表 4.

表4 四种分型

年 \ 月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1952	1	4	4	2	3	2	3	3	3	1	1	1
1953	4	2	1	4	3	4	3	3	4	1	1	1
1954	2	2	1	3	2	3	3	4	2	3	3	3
1955	4	2	2	3	3	4	1	1	1	3	2	1
1956	3	4	4	2	1	3	4	2	2	2	4	4
1957	1	3	4	2	3	4	3	3	3	2	2	1
1958	2	4	2	2	2	2	2	3	2	4	2	2
1959	3	1	2	2	3	4	1	4	4	1	3	2
1960	1	1	1	3	4	1	1	2	3	2	2	3
1961	1	4	4	1	1	2	1	1	1	3	4	3

上述四型的分型方案是为月平均图设计的,若对每日图分型,则应分为 G , D_+ , D_- 三型. 因之与王耿格依姆 (Вангенгейм, Г. Я)^[25]、楊鉴初等^[26]和张家誠^[27]的分型方案是符合的,只是进一步提出了定量的标准.

另外,周家斌^[28]还用总结形势场相似的图的车貝雪夫系数的共同特征的方法,建立了相应的环流分型方案.

四、車貝雪夫系数和环流型的馬尔可夫鏈及其在預报中的应用

为了应用馬尔可夫鏈理論,我們把車貝雪夫系数进行分級,将每一級作为一种可能状态,各系数所具有的状态数将等于該系数被分成級別的数目. 如果把环流型看作描写大气环流的参量,则环流型就是其可能状态. 因此,車貝雪夫系数和环流型的时间序列构成状态数目有限、时间疏散的馬尔可夫鏈.

假設鏈是簡單而且均匀的. 令 1952 年 1 月为时刻 T_1 , 2 月为 T_2 , ... 1961 年 12 月为

T_{120} , 取時刻 T_K 至 T_{K+1} ($K = \overline{1, 119}$) 体系的轉移为一次觀測, 則可由下式求出系数和环流型的一步轉移概率^[29, §75]:

$$p'_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha}, \quad \alpha, \beta = \overline{1, n}. \quad (6)$$

其中 m_α 为总觀測次数中状态 A_α 的实现次数, $m_{\alpha\beta}$ 为状态 A_α 后随即实现状态 A_β 的次数, $p'_{\alpha\beta}$ 为状态 A_α 轉向状态 A_β 的概率的近似值, n 为可能状态的数目. 取時刻 T_K 至 $T_{K+m} \times (K=1, (120-m))$ 体系的轉移为一次觀測, 則可用同式求得 m 步轉移概率. 为了討論季节变化, 我們又分別对冬夏兩半年的資料求得了轉移概率. 这样求得的几步轉移概率矩陣是根据觀測結果得到的, 从数学的观点看, 它們相应于時間疏散程度不同的鏈的規律.

按(6)式算得的 $p'_{\alpha\beta}$ 的标准差, 由下式給出:

$$s_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{1}{m_\alpha - 1} p'_{\alpha\beta} (1 - p'_{\alpha\beta})}. \quad (7)$$

假設鏈是平稳的, 則時刻 T_K 体系 S 的絕對概率 $p_{s/\beta}$ 的最佳值是^[29]:

$$p'_{s/\beta} = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K n_\beta^{(k)}. \quad (8)$$

式中 s 为构成一个試驗列的試驗数, K 为試驗列組数, 此处为 10 (1952—1961), L 为每組中的試驗列数, 此处对全年的鏈为 12, 半年的鏈为 6. $n_\beta^{(k)}$ 为第 k 組的 L 个試驗列末尾实现状态 A_β 的頻数. 显而易见, $\sum_{k=1}^K n_\beta^{(k)}$ 即状态 A_β 在十年中实现的次数. 因此, $p'_{s/\beta}$ 即状态 A_β 在十年中实现的概率. 同理, 对于半年的情况, 其絕對概率就是状态 A_β 在該半年中实现的概率. 設鏈是正則的, 令 $s \rightarrow \infty$, 則 $p_{s/\beta} \rightarrow p_\beta$ ^[29], 此处 p_β 为状态 A_β 的終极轉移概率.

按(8)式算出的 p'_β 的标准差, 由下式給出:

$$s_\beta = \sqrt{\frac{1}{KL - 1} p'_\beta (1 - p'_\beta)}. \quad (9)$$

下面对鏈的性質作一些討論.

关于正則性. 如果 $\lambda_0 = 1$ 是轉移概率矩陣 p 的单根, 而其他的根的模皆小于 1, 則称鏈的規律, 即矩陣 p 为正則的^[29]. 在文献 [28] 中我們求出了所有的一步轉移概率矩陣和部分系数和四种环流型的鏈的多步轉移概率矩陣的特征根, 結果說明它們是正則的.

关于平稳性与简单性, 为了驗證鏈的平稳性与简单性, 可以由方程組

$$\begin{cases} p_\beta = \sum_{\alpha} p_\alpha p'_{\alpha\beta} & (\alpha, \beta = \overline{1, n}), \\ \sum_{\beta} p_\beta = 1, \end{cases} \quad (10)$$

求解 p_β . 对于部分鏈, 我們求解了方程組 (10). 一部分解沒有概率意义 (不滿足 $0 \leq p_\beta \leq 1$), 因而它們对应的鏈不是平稳的. 对于有概率意义的解, 我們作了 χ^2 檢驗^[29]. 結果說明, 最重要的系数 A_{00} 和分为三級的 A_{01} 的鏈, 比其他系数的鏈有較高的平稳性, 环流型的鏈比系数的鏈有較高的平稳性, 全年的鏈比半年的鏈有較高的平稳性. 平稳的鏈皆

具有简单性。

总而言之,我們所討論的鏈是正則的不可分解的非循环鏈,它只有一定的平穩性与简单性。

以上所作的验证虽然說明了气象过程的复杂性,但也指出我們在計算各步轉移概率矩陣及絕對概率时所作的假定还是可以考慮的。

前面算出的轉移概率可用来預报未来的車貝雪夫系数和环流型。

預报公式如下:

$$Z_{\beta} = \sum_{k=1}^N a_k p_{a-k\beta} / N, \quad \beta = \overline{1, n} \quad (11)$$

式中 Z_{β} 是状态 A_{β} 的預报指标, $p_{a-k\beta}$ 是預报月前 k 个月体系 S 的状态 A_a 至預报月状态 A_{β} 的轉移概率, a_k 是与 k 步轉移概率矩陣預报准确率有关的經驗常数,可由多年預报的結果統計得出(目前暫均取为 1), N 为用来作預报的轉移概率的最高步数。由(11)式算出 Z_{β} 以后,取其中最大的一个对应的状态为預报月体系 S 的状态。我們用上法作出了 1962 年 1—6 月的預报。根据統計,預报准确率一般高于随机預报。但仅这几次預报尚不足說明方法的可靠性,只說明此法是可以試用的。

这种方法同样适用于短期和中期預报。

以上只是极初步的探討,从所获得的結果看来,进一步开展車貝雪夫多項式在气象学中应用的研究是有前途的。如果能够利用电子計算机对每天或每候的平均場进行分解,則能对大气环流的具体特征进行更細致和更深入的分析。用分解式系数和环流型进行随机过程的研究是有希望的,但还需在复杂的非均匀的馬尔可夫鏈的基础上才能产生更大的效果。这些工作均值得进一步探索。

本文在写作过程中,曾得到中国科学院地球物理研究所楊鉴初、北京大学数学力学系张尧庭、卢崇飞、地球物理系王紹武等同志的热情帮助。北京大学数学力学系計算数学教研室曾在电动計算机使用上惠于方便。中国科学院地球物理研究所曾佑思同志曾协助繪图。作者在此一并表示感謝。

参 考 文 献

- [1] Калмыкова Н. М., *Труды ЦИПа*, вып. 46 (1956).
- [2] Takahashi K. (高橋法一郎) & Collaborators, *Papers in Met. and Geophys.*, 3 (1952), No. 1.
- [3] 中央气象局气象科学研究所数值預报組, 用球函数展开北半球地形的計算, *气象学报*, 30 (1959), 第 4 期。
- [4] Багров Н. А., *Труды ЦИПа*, вып. 74 (1959).
- [5] Hare F. K., *Polar Atmosphere Symposium*, Part I, *Met. Sec.*, 137, 1958.
- [6] Malone T. F., *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41 (1955), No. 11.
- [7] White R. M., Derby R. C., Cooley D. S. and Sever F. A., *J. Met.*, 14 (1957), No. 5.
- [8] Jorgensen D. L., *J. Met.*, 16 (1959), No. 1.
- [9] Mulkern F. S. and Cooley D. S., *J. Met.*, 18 (1961), No. 1.
- [10] Зверев Н. И., *Труды ЦИПа*, вып. 85 (1959).
- [11] Зверев Н. И., *Труды ЦИПа*, вып. 97 (1960).
- [12] Багров Н. А. и Зверев Н. И., *Труды ЦИПа*, вып. 108 (1961).
- [13] Ward F. and Shapiro R., *J. Met.*, 18 (1961), No. 5.
- [14] Shapiro R., *J. Met.*, 15 (1958), No. 5.
- [15] Cihak K., *Arch. Met. Geoph. Biol.*, A, 12 (1960), Heft. 1.

- [16] Friedman D. G., *J. Met.*, **12** (1955), No. 5.
- [17] Багров Н. А. и Кухто А. П., *Мет. и Гидро.*, 1961 № 4.
- [18] Багров Н. А., *Труды ЦИПа*, вып. **64** (1958).
- [19] Хотимский В. И., Выравнивание статистических рядов по методу наименьших квадратов (Способ Чебышева), Госстатиздат, 1959.
- [20] Чебышев П. Л., О непрерывных дробях, 1855, Полное Собрание Сочинений П. Л. Чебышева, Том. II, Изд. АН СССР, 1948.
- [21] Чебышев П. Л., Об интерполировании величин равноотстоящих, 1875, Полное Собрание Сочинений П. Л. Чебышева, Том. III.
- [22] 岡察洛夫 В. Л., 函数插补与逼近理論(中譯本), 科学出版社, 1958 年.
- [23] 罗斯培 (Rossby C. G.), 气象学譯報, **4** (1957), 第 2 期.
- [24] Шулейкин В. В., Физика Моря, часть пятая, Изд. АН СССР, 1953.
- [25] Гирс А. А., Основы долгосрочных прогнозов погоды, Глава III, VIII, Гидрометеоздат, 1960.
- [26] 楊鉴初、史久恩、袁子兴, 气象学报, **30** (1959), 第 1 期.
- [27] 張家誠, 大型天气过程分析的几个問題, 科学出版社, 1961 年.
- [28] 周家斌, 用車貝雪夫系数进行环流分型和对其馬尔可夫鏈的分析, 北京大学毕业論文 (1962).
- [29] 罗曼諾夫斯基, 疏散的馬尔可夫鏈 (中譯本), 科学出版社, 1958 年.
- [30] Сарымсаков Т. А., Джорджио В. А. и Бугаев В. А., *Изв. АН СССР сер географ. и геофиз.*, **11** (1947), № 6.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МЕСЯЧНОГО СРЕДНЕГО ПОЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА AT_{500} ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА

Чжан Цзя-чен

(*Центральная Метеорологическая Обсерватория*)

Чжоу Цзя-бинь, Хуан Вэнь-цзе, Ма Вэй-хуа

(*Пекинский Университет*)

Резюме

По полиномам Чебышева авторами данной статьи разложились ежемесячные средние AT_{500} за период последнего десятилетия, сезонные ходы осадков и температуры среднего и нижнего бассейна Янцзы. Разложение достаточно хорошо отражает главные черты изучаемых явлений. Отклонение, возникшее при не полности разложения, можно поправить на основе пользования климатическими нормами. Анализ коэффициентов дает следующие результаты:

1. Коэффициенты разложения представляют собой не что иные, как индексы циркуляции атмосферы или характеристики других разлагаемых элементов. При помощи этих коэффициентов легко количественно характеризовать изучаемые явления.

2. По определенному числовому критерию месячные средние AT_{500} можно разделить на два типа: тип высокого и тип низкого индексов. Тип высокого индекса характеризуется усилением зонального течения на ежемесячном среднем поле AT_{500} , появление которого возможно не только при сохранении чисто зонального течения на целый месяц, но и в случае, когда наблюдаются меридиональные течения противоположных фаз в различных частях данного месяца. Поэтому целесообразно разделить данный тип ещё на два подтипа: тип устойчивого и неустойчивого высокого индексов. Тип низкого индекса характеризуется меридиональным течением. По напредлению основного потока можно ещё разделить его на два подтипа: ложбинообразный и хребтообразный. Физическое объяснение данной типизации связано с теорией общей циркуляции атмосферы и теорией муссонов.

3. Различные градации коэффициентов Чебышева и типы циркуляции атмосферы в своих временных рядах образуют дискретные цепи Маркова с конечным числом состояний. Эти цепи регулярны, неразложимы и ациклически. Такого рода цепи имеют только свойства определенных устойчивости и простояности. Обеспеченность прогнозов по основанному на теории цепей Маркова методу превышает обеспеченность случайных прогнозов.