第 33 卷 第 1 期 气 象 学 报 Vol. 33, No. 1
1963 年 2 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1963

大气折射率起伏对雷达波的散射*

李其琛 吕达仁
(北京大学地球物理系)

提 要

研究大气折射率起伏对雷达波的散射时,得到的主要結果有以下两点:

1. 在适当的大气条件下,折射率起伏构成的后向散射波能够超出一般雷达的灵敏度之上,它的量級正好和雷达观测到的气象"仙波"相同. 根据这一結果和其他事实,作者認为起伏的后向散射可能是形成气象"仙波"的重要机制.

2. 推导了表示雷达波在折射率有起伏的介质中传播时,强度随距离变化的方程式,結果发現:一般情况下,散射效应不致引起波的强度的显著变化. 但是,当大气折射率起伏的尺度长較小、幅度較大、并且雷达波瓣較窄时,散射效应会引起波瓣的加宽.

一、引 言

大气中的湍流运动引起了大气温度、湿度、气压的脉动,从而也引起了折射率 n 的起伏. 直接测量表明: $\overline{(\Delta n)^2}$ 介于 $0—30 \times 10^{-6}$ 之間,起伏的尺度长 L_0 則介于 10—120 米之間[1,2].

混浊介质要引起光的散射,与此类似,折射率有起伏的介质也要引起电磁波的散射,超短波的超地平传播利用的就是这一机制.

雷达波在折射率有起伏的介质中传播时,同样是要发生散射的. 本文通过計算发現,这种散射所构成的回波,在适当的条件下能够被雷达所测出,且其量級正好和气象"仙波"("angel" echoes)相合,因此可以認为"散射"是形成气象"仙波"的一种重要机制. 研究"仙波"成因的意义,一方面在于它能使我們正确解释观测到的各种回波,避免混乱;另方面它給雷达提供了新的用途,使之能对大气作更多方面的观测.

本文后一部分推导了表示起伏介质中波的強度随距离变化的方程式,发現 La Gronne 等人的表达式不合用. 散射一般不引起波的強度的显著变化,只在某些特殊情况下引起波瓣的加宽. 新推导的方程式在通訊問題中也能应用.

二、散射函数和雷达反射率.气象"仙波"的成因

用函数 $\beta(\theta)$ 表示折射率起伏在 θ 方向所构成的散射函数,它和大气光学中的散射函数的定义相同. 根据非均匀介质中电磁波散射的理論, $\beta(\theta)$ 有如下的表达式[3]:

---

* 本文 1962 年 10 月 10 日收到.

$$\beta(\theta)=\frac{\pi^2}{\lambda^4}S(k)\Big|_{k=\frac{4\pi}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\sin^2\kappa, \tag{1}$$

此处 λ 是雷达波长，κ 是入射波的电振动与散射波传播方向之間的夾角（見图 1），$S(k)$ 是介电常数（$\varepsilon=n^2$）起伏的譜密度，它滿足下面的等式：

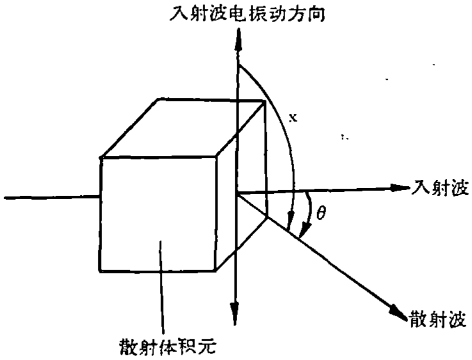

图 1

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2}=4\overline{(\Delta n)^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}S(\mathbf{k})d\mathbf{k}. \tag{2}$$

若我們研究后向散射，那末有 $\theta=\pi$，$\kappa==\frac{\pi}{2}$，后向散射函数 $\beta(\pi)$ 应該有如下的表达式：

$$\beta(\pi)=\frac{\pi^2}{\lambda^4}S\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right), \tag{3}$$

雷达反射率 η 是后向散射函数的 4π 倍，所以

$$\eta=4\pi\beta(\pi)=\frac{4\pi^3}{\lambda^4}S\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right). \tag{4}$$

为了計算 η，需要知道 $S(k)$ 的表达式，目前可以引用的比較可信的表达式有以下几种。

1. Колмогоров-Обухов 理論模式[4]

$$S(k)=32\pi^3\times0.033C_n^2k^{-11/3}, \tag{5}$$

它是由相似理論推得的，并为許多实驗所証实[5]。系数 C_n 在定常湍流的情况下，可用风速 u，折射率 n 的平均場以及湍流交換系数 K 来表示：

$$C_n^2=a^2\left[\frac{K^2}{(\nabla\bar{u})^2}\right]^{1/3}[\nabla\bar{n}]^2, \tag{6}$$

此处的 a 是 R_i 数的函数，近地面层中的 $a(R_i)$，如图 2 所示。

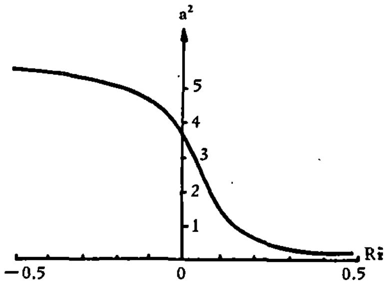

图 2

2. 1/3 阶貝色尔模式[4]

$$S(k)=\frac{8\pi^{3/2}\Gamma(11/6)}{\Gamma(1/3)}\frac{L_0^3\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{(1+k^2L_0^2)^{11/6}}. \tag{7}$$

(7)式是(5)式的內插公式，它为 Gossard 的測量所証实[2]。

3. 指数模式

$$S(k)=8\pi\frac{L_0^3\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{(1+k^2L_0^2)^2}. \tag{8}$$

4. 一阶貝色尔模式

$$S(k)=6\pi^2\frac{L_0^3\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{(1+k^2L_0^2)^{5/2}}. \tag{9}$$

(8)，(9)二式是經驗表达式，它們亦有一定的实驗根据[2,6]。理論模式(5)給出 $S(k)\propto k^{-11/3}$，

它只适用于湍流平衡段．(8)和(9)式在 k 足够大时，分别給出 $S(k) \propto k^{-4}$ 和 k^{-5}，它們可能更正确的反映了包括湍流耗散段在內的 $S(k)$ 随 k 的变化．

現在将大气中实际测得的关于折射率起伏的数据，代到(4—9)式中去，計算 η 的数值．我們的目的在于考察 η 最大能达多少，所以尽量挑选合适的数据．計算中波长 λ 一律取为 10 厘米．

根据 Татарский 綜合的資料[5]，取 $c_n = 0.18 \times 10^{-6}$，由(4)，(5)式得到，

$$\eta = 3.77 \times 10^{-2} \frac{c_n^2}{\lambda_{cm}^{1/3}} \frac{1}{\text{厘米}} = 5.68 \times 10^{-15} \frac{1}{\text{厘米}}.$$

根据 Gossard[2] 的测量，取 $L_0 = 12.5$ 米，$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = 125 \times 10^{-12}$，由(4)和(7)—(9)式分别得到：

1/3 阶貝色尔模式：

$$\eta = 0.18 \times \frac{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{L_0^{2/3}\lambda^{1/3}} = 9.03 \times 10^{-14} \frac{1}{\text{厘米}},$$

指数模式：

$$\eta = \frac{1}{\delta} \frac{\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{L_0} = 1.25 \times 10^{-14} \frac{1}{\text{厘米}}.$$

一阶貝色尔模式：

$$\eta = 2.34 \times 10^{-2} \frac{\lambda\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{L_0^2} = 1.88 \times 10^{-17} \frac{1}{\text{厘米}}.$$

上面的計算表明，在适当的大气条件下，$\overline{(\Delta\varepsilon)^2}$ 較大，起伏所构成的雷达反射率 η 能达到 10^{-16}—10^{-14} 的量級．在这种情况下的雷达回波強度，是超过了雷达的最小可测功率，因此能被雷达指示出来，并且这种回波很可能就是所謂气象"仙波"．

下面我們作进一步論述．自从雷达发明以来，它就經常测到所謂气象"仙波"("angel" echoes)，这是指水汽物(雨滴、云滴、雪、雹等)以外的其他气象原因所构成的回波．Atlas 根据"仙波"出現时的气象条件，把它們分为几类[7]：1. 和大气中的热对流机制相联系的"仙波"；2. 出現在积云頂部的罩状"仙波"；3. 出現在逆温-減湿和最低湿度气层处的层状"仙波"；4. 出現在飑綫前沿的"仙波"；5. 和海风相联系的仙波等等．另外 Ligda 等人曾观测到与无云冷鋒相联系的"仙波"[8]．根据 Atlas 的总結，和"仙波"相应的 η 值处在 10^{-16}—$10^{-14} \frac{1}{\text{厘米}}$ 的量級范围內．

气象"仙波"的成因目前未有定論，一般是認为大气中有一种折射率近于不連續的界面，它反射雷达波而构成气象"仙波"[7]．为使 η 值达到观测值，这种界面两端要有 $10 \times \times 10^{-6}$ 量級的折射率差，它的面积要足够大(半径約为 10^2—10^3 米的球面)，而过渡带只能厚約 0.1—1 厘米．这种不連續面能在大气中存在是很难想象的，它也从来未被观测到过．所以反射机制恐怕不是构成气象"仙波"的主要机制，恐怕更不是构成气象"仙波"的唯一机制．

用"散射机制"来解释气象"仙波"看来更合理，理由如下．

1. 按折射率起伏的数据和散射理論計算的 η 值与"仙波"的 η 值在量級上完全相同，

它們都是 10^{-16}—$10^{-14}\frac{1}{\text{厘米}}$.

2. Atlas 提到的那几种有利于气象"仙波"出現的大气条件,大部分都有利于形成較大的折射率起伏,从而也有利于形成較大的散射回波. 气泡由低空升起,它带有較多的水汽,泡內折射率經常比泡外高出十个以上N单位[9] ($1N$ 单位 $=10^{-6}$),并且泡內外又有較大的速度差. 这都有利于在泡的边界附近形成較大的折射率起伏. 积云頂部情况类似,观測表明該处确有极显著的折射率起伏[10]. 逆温-減湿和最低湿度出現的气层附近以及海风界面附近,湿度梯度很大,上下的湍流混合易于形成較大的折射率起伏;另外此处也可能有下面升起的气泡活动. 至于无云冷鋒的兩边(以及飑綫前沿),折射率差很大[8],此处扰动特别強,必然也形成大的折射率起伏. 当这种冷鋒过境时,星光閃爍特别厉害,甚至使天文观測中断,这就是明証.

3. 設气泡直径为百米,中部的上升速度为 5 米/秒,泡內外折射率差为 $10N$ 单位,K 值取为 100 厘米^2/秒,設速度和折射率都由中部向边緣綫性递減. 我們用 Колмогоров-Обухов 理論模式(5),(6)粗略估計一下,这种情况下的 η 值,結果亦得到 $\eta = 0.7\times10^{-16}\frac{1}{\text{厘米}}$. 如果考慮到 $\bar{u}$ 和 $\bar{n}$ 的切变实际上只是发生在气泡的边緣附近,那末 η 値将会更大.

4. 現有的观測資料似乎表明长波长的雷达更容易观測到气象"仙波". 按貝色尔模式 $\eta\propto\lambda$,所以能够解释这一事实.

5. 按"散射机制",用窄波瓣、长波长的雷达,从近处作观測时,被照射空間的体积較小,处在它里面的起后向散射作用的湍块(尺度等于波长之半)数目較少,因此回波比較稳定,呈分立-相干特性. 若用寬波瓣、短波长的雷达从远处观测,則情况正好相反,回波脉动較大,是非相干特性. 这样的推論和 Atlas 提到的观測事实相合.

由以上的討論可以看出,用折射率起伏散射雷达波这一机制来解释气象"仙波"的生成,看来是合乎邏輯的,比之于"反射"机制,它在定量和定性方面都更加与观測事实相符合. 这問題还值得进一步研究,因为弄清"仙波"的成因是有意义的,这点已在前言中指出过了.

三、散射系数. 波的强度在传播过程中的变化

折射率起伏对雷达波的散射作用可能造成波束能量的散失,使波的強度发生变化,这是本节所要加以研究的問題.

和大气光学中的做法一样,我們将散射函数对 4π 立体角的积分定义看成散射系数 k,

$$k=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\beta_\kappa(\theta)\sin\theta d\theta, \tag{10}$$

它代表单位体积(宏观)內的折射率起伏对四面八方散射雷达波的总能力.

将上节中 $\beta(\theta)$ 的各种表达式代入(10)中,即可求得与各种形式的譜函数相对应的散射系数 k 的表达式:

1/3 阶貝色尔模式:

$$k=\frac{0.841\pi^{5/2}L_0\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{\lambda^2}, \tag{11}$$

指数模式：

$$k = \frac{2\pi^2 L_0 \overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{\lambda^2}, \tag{12}$$

貝色尔模式：

$$k = \frac{\pi^3 L_0 \overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{\lambda^2}, \tag{13}$$

各种表达式是极其相似的，它們都有共同的因子 $\frac{L_0\overline{(\Delta\varepsilon)^2}}{\lambda^2}$，差别只在于它們前面的常系数.

按指数模式計算的 k 值，如下表所示（$\lambda = 3$ 厘米）.

k 公里$^{-1}$ \ $\overline{(\Delta\varepsilon)^2}$ \ L_0	1×10^{-12}	10×10^{-12}	100×10^{-12}
10 米	2.19×10^{-4}	2.19×10^{-3}	2.19×10^{-2}
50 米	1.10×10^{-3}	1.10×10^{-2}	1.10×10^{-1}
100 米	2.19×10^{-3}	2.19×10^{-2}	2.19×10^{-1}

空气中的水汽和氧也吸收雷达波，但是如果波长 λ 大于 2 厘米的話，吸收系数 k_a 就小于 $4.5\times10^{-3}\frac{1}{\text{公里}}$[11]. 由上表看出，散射系数 k 的数值一般比 k_a 大一至二个量級.

散射作用引起波的強度变化問題曾由 La Grone 等研究过[12]. 1958 年 Высоковский 在他的“超短波对流层远程传播的某些問題”一书中，曾引用了他們的結果. 他們的結論是：在起伏的介质中传播了距离 R 之后，散射作用要使波的強度減小 e^{-kR} 倍. 如果分别以 $S_T(R)$ 和 $S_H(R)$ 代表起伏介质中和均匀介质中波的強度，那么

$$S_T(R) = S_H(R)e^{-kR}. \tag{14}$$

由于 k 的数值很大，按 (14) 式，散射作用引起的波的減弱将是极显著的，但雷达的日常工作并未发現有如此严重的衰減效应.

事实上象(14)式那样的簡单关系，只有在散射函数 $\beta(\theta)$ 的方向图很宽，散射波几乎完全离开了雷达波束时，才是正确的(見图 3). 但是起伏所构成的散射函数 $\beta(\theta)$ 事实上具有极窄的方向图. 为了說明这一点，我們計算一下 $\beta(\theta)$ 方向图的半功率点 $\theta_{\frac{1}{2}}$，設

$$\beta(\theta_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\beta(\theta), \tag{15}$$

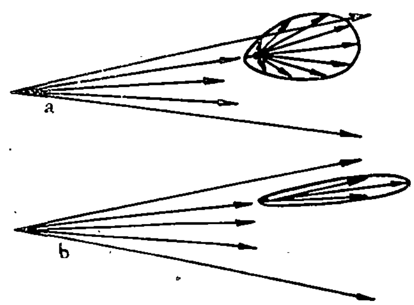

图 3

将(1)和(7—9)分别代入上式，即可得到与各种湍流模式相应的 $\theta_{\frac{1}{2}}$ 的表达式：

1/3 阶貝色尔模式：

$$\theta_{\frac{1}{2}} = 6.^\circ2\frac{\lambda}{L_0}, \tag{16}$$

指数模式：

$$\theta_{\frac{1}{2}} = 5.^\circ7\frac{\lambda}{L_0}, \tag{17}$$

一阶貝色尔模式:

$$\theta_{\frac{1}{2}} = 5.^{\circ}2\,\frac{\lambda}{L_0}, \tag{18}$$

$\theta_{\frac{1}{2}}$ 的各种表达式差异很小. 大气湍流的尺度长一般为百米量級,所以对于波长 $\lambda = 10$ 厘米和 3 厘米的雷达波而言,$\theta_{\frac{1}{2}}$ 分别只有 5×10^{-3} 度和 1×10^{-3} 度左右,可見 $\beta(\theta)$ 的方向图是极其狭长的,它所散射的波絕大部分仍集中在同方向. 不离开雷达波束. 所以象(14)那样把散射波完全抛开不計是不正确的,我們現在重新来推导更合适的表达式.

設我們研究点 (R, θ) 处波的强度 $S(R, \theta)$ (見图 4),这就需要考虑到抵达 (R, θ) 点的除天綫发出后經散射而余下的直接波 $S_0(R, \theta)$ 外,还有經一次散射而抵达 (R, θ) 的一次散射波 $S_1(R, \theta)$,也有經一次散射后再散射一次的二次散射波 $S_2(R, \theta)$;此外,还有三次、四次、乃至无穷次的散射波(見图 4). 所以 (R, θ) 点的波的强度应是直接波与各次散射波的强度之和:

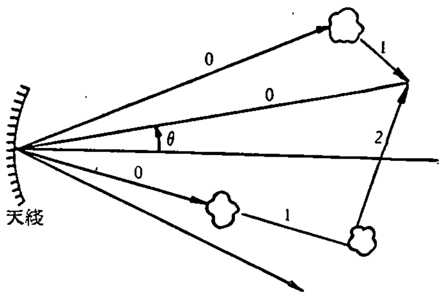

图 4

$$S(R, \theta) = \sum_{0}^{\infty} S_n(R, \theta). \tag{19}$$

这里,我們所以能作波的强度的簡单代数和是因为散射波具有无規位相,所以可以直接迭加.

下面推导各次散射波的表达式. 計算中采用指数模式的散射函数 $\beta(\theta)$,設天綫是圓抛物面,它的方向特性可表示为[1]:

$$f(\theta) = e^{-a_0\theta^2}, \tag{20}$$

$$a_0 = 0.694 \times \frac{1}{\theta_0^2}. \tag{21}$$

此处 θ_0 是雷达波束的半波瓣寬度.

直接波的表达式就是(14)式,現在写为:

$$S_0(R, \theta) = \frac{\Phi_0}{R^2}\cdot e^{-a_0\theta^2}\cdot e^{-kR} = S_H(R, \theta)e^{-kR}, \tag{22}$$

此处 Φ_0 为雷达参数.

一次散射波 $S_1(R, \theta)$ 是直接波 $S_0(R', \theta')$ 散射的結果,它应該等于(見图 5):

$$S_1(R, \theta) = \int_0^R R'^2 dR' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} S_0(R', \theta')\beta(\gamma)\frac{e^{-k(R-R')}}{(R-R')^2}d\varphi'. \tag{23}$$

为計算方便起見,将极軸移到 θ 方向上去,这一极軸之下的各坐标值,分别用 R'', θ'', φ'' 来表示. 考虑到問題涉及的 θ, θ', θ'' 等角都很小,R'', R 值則很大,而且 γ 角增大时 $\beta(\gamma)$ 迅速趋于零,于是可以引用下列近似关系:

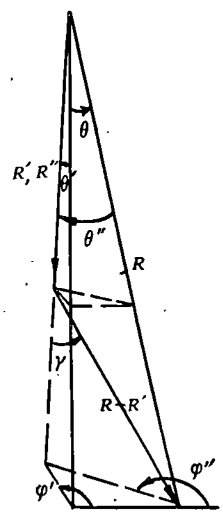

图 5

$$\gamma \doteq \frac{R}{R - R''}\theta'', \tag{24}$$

$$\theta'^2 = \theta^2 + \theta''^2 + 2\theta\cdot\theta''\cdot\cos\varphi'', \tag{25}$$

将指数模式的散射函数 $\beta(\gamma)$ 簡写为：

$$\beta(\gamma) = \frac{A}{[1 + B\gamma^2]^2}, \tag{26}$$

$$A = \frac{8\pi^3}{\lambda^4} L_0^3\overline{(\Delta\varepsilon)^2}, \tag{27}$$

$$B = \left(\frac{2\pi L_0}{\lambda}\right)^2 \gg 1. \tag{28}$$

由于 $B \gg 1$，在下面的推导中我們作适当的近似，由(22—28)式有：

$$S_1(R,\theta) \doteq \int_0^R R''^2 dR'' \int_0^\pi \theta'' d\theta'' \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_0 e^{-a_0[\theta^2+\theta''^2+2\theta\theta''\cos\varphi'']}\cdot e^{-kR''}\cdot e^{-k(R-R'')}}{R''^2(R-R'')^2\left[1 + B\left(\frac{R}{R-R''}\right)^2\theta''^2\right]^2} d\varphi'',$$

$$= \Phi_0 e^{-a_0\theta^2}\cdot e^{-kR}\int_0^R \frac{dR''}{(R-R'')^2}\int_0^\pi \frac{A\theta''\cdot e^{-a_0\theta''^2}d\theta''}{\left[1 + B\left(\frac{R}{R-R''}\right)^2\theta''^2\right]^2}\int_0^{2\pi} e^{-2a_0\theta\theta''\cos\varphi''}d\varphi'', \tag{29}$$

因

$$\int_0^{2\pi} e^{-(2a_0\theta\theta'')\cos\varphi''} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2a_0\theta\theta'')^m}{m!}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi'' d\varphi'' = 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_0\theta)^{2m}\theta''^{2m}}{(m!)^2}, \tag{30}$$

$$\int_0^\pi \frac{A\cdot\theta''\cdot e^{-a_0\theta''^2}\cdot 2\pi\sum_0^\infty \frac{(a_0\theta)^{2m}\theta''^{2m}}{(m!)^2}}{\left[1 + B\left(\frac{R}{R-R''}\right)^2\theta''^2\right]^2}d\theta'' = 2\pi\int_0^\pi \frac{A\cdot\sum_{m'=0}^\infty\frac{(-a_0)^{m'}\theta''^{2m'}}{m'!}\times\sum_{m=0}^\infty\frac{(a_0\theta)^{2m}\theta''^{2m}}{(m!)^2}}{\left[1 + B\left(\frac{R}{R-R''}\right)^2\theta''^2\right]^2}\times$$

$$\times\theta''d\theta'' \doteq k\left(\frac{R-R''}{R}\right)^2\left\{1 - a_0(1-a_0\theta^2)\left(\frac{R-R''}{R}\right)^2\frac{1}{B}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(\ln(\pi^2B)-1) - 2\ln\left(\frac{R-R''}{R}\right)\right]\right\}, \tag{31}$$

所以

$$S_1(R,\theta) = \frac{\Phi_0 e^{-a_0\theta^2}\cdot e^{kR}\cdot k}{R^2}\int_0^R dR''\left\{1 - a_0(1-a_0\theta^2)\frac{1}{B}\left(\frac{R-R''}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[(\ln(\pi^2B)-1) - 2\ln\left(\frac{R-R''}{R}\right)\right]\right\} = \frac{\Phi_0 e^{-a_0\theta^2}\cdot e^{-kR}}{R^2}\cdot kR\times$$

$$\times\left\{1 - a_0(1-a_0\theta^2)\frac{1}{B}\left[\frac{\ln^2(\pi B)-1}{3} + \frac{2}{3^2}\right]\right\} \doteq$$

$$\doteq \frac{\Phi_0 e^{-F_1}e^{-a_1\theta^2}\cdot e^{-kR}}{R^2}\cdot kR. \tag{32}$$

此处

$$\begin{cases} F_1 = f_1 = \dfrac{a_0}{B}\left[\dfrac{\ln(\pi^2B)-1}{3} + \dfrac{2}{3^2}\right], \\ a_1 = a_0(1-f_1). \end{cases} \tag{33}$$

二次散射是一次散射波的再散射，用（32）式给出的 $S_1(R,\theta)$ 代替（23）式中的 $S_0(R,\theta)$，經过相似的計算后，就可得到：

$$S_2(R,\theta) \doteq \frac{\Phi_0 e^{-F_2} e^{-a_2\theta^2} e^{-kR}}{R^2} \cdot \frac{(kR)^2}{2!}. \tag{34}$$

此处

$$\begin{cases} F_2 = f_1 + f_2, \\ f_2 = \dfrac{a_1}{B}\left[(\ln(\pi^2 B) - 1)\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{2}{3^2} - \dfrac{2}{4^2}\right)\right], \\ a_2 = a_1(1 - f_2). \end{cases} \tag{35}$$

现在設

$$S_{n-1}(R,\theta) = \frac{\Phi_0 e^{-F_{n-1}} e^{-a_{n-1}\theta^2} \cdot e^{-kR}}{R^2} \cdot \frac{(kR)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{36}$$

通过类似的計算，結果得到：

$$S_n(R,\theta) = \frac{\Phi_0 e^{-F_n} e^{-a_n\theta^2} \cdot e^{-kR}}{R^2} \cdot \frac{(kR)^n}{n!}. \tag{37}$$

此处

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + f_n, \\ a_n = a_{n-1}(1 - f_n), \\ f_n = \dfrac{a_{n-1}}{B}\, n! \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n-m-1)!\,m!}\left[\frac{\ln(\pi^2 B) - 1}{m+3} + \frac{2}{(m+3)^2}\right]. \end{cases} \tag{38}$$

比較(22)和(32—38)各式，按数学規納法得知，(37)，(38)式适用于任意的 n 值(只要取 $F_0 = f_0 = 0$)。这样，我們就得到了各次散射波的表达式。将(37)，(38)式代入(19)式，我們就得到波的強度随距离变化的表达式：

$$S(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(R,\theta) = \frac{\Phi_0 e^{-kR}}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-F_n} \cdot e^{-a_n\theta^2} \cdot \frac{(kR)^n}{n!}. \tag{39}$$

在上面的計算中，我們沒有考慮分子对雷达波的吸收作用，若把这效应考慮在內，只要在(39)式中加入一个因子 $e^{-k_a R}$ 就行了，k_a 是吸收系数。

现在我們对方程式(39)进行一些分析和討論：

1. (R,θ) 点处波的強度 $S(R,\theta)$ 等于直接波与各次散射波之和，第 n 次散射波 $S_n(R,\theta)$ 正比于 $\dfrac{(kR)^n}{n!}$，kR 越大則散射波越強，(39)式中的級数就需要保留愈多的項，就是說愈要考慮到高次散射波的作用。表达式(14)实际上是完全忽略了散射波，所以它在一般情况下是不适用的。

2. 如果 k 的数值极小，譬如說由于沒有起伏，$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} \doteq 0$，那么 $k \doteq 0$，这时，(39)式轉化为：

$$S(R,\theta) = \frac{\Phi_0 \cdot e^{-a_0\theta^2}}{R^2} = S_H(R,\theta), \tag{40}$$

这就是均匀介質中的表达式。

3. 散射波的方向图函数是 $e^{-a_n\theta^2}$，它比直接波 $S_0(R,\theta)$ 的方向图函数 $e^{-a_0\theta^2}$ 为寬，

因为

$$a_n = a_{n-1}(1 - f_n) = a_0 \prod_{m=0}^{n} (1 - f_m) < a_0, \tag{41}$$

n 愈大，则 a_n 比 a_0 小得愈多，就是說愈高次散射波的方向图愈宽.

4. 根据(38)，(28)，(21)和(16—18)式：$f_n \propto \frac{a_0}{B} \propto \left(\frac{\lambda}{\theta_0 L_0}\right)^2 \propto \left(\frac{\theta_{\frac{1}{2}}}{\theta_0}\right)^2$，由(41)式显見，$f_n$ 愈大，a_n 愈比 a_0 小得多，就是說散射波比直接波的方向图宽得愈多. 由于 $S_n(R, \theta) \propto e^{-F_n} e^{-a_n\theta^2}$，而 $F_n = \sum_{m=0}^{n} f_m > 0$，$a_n < a_0 (n > 0)$，将(39)式和(40)式相較可知：当 θ 小时，$S(R, \theta) < S_H(R, \theta)$；当 θ 大时，有 $S(R, \theta) > S_H(R, \theta)$. 由此可見散射效应引起了波的漫散，使它的方向图加宽.

5. 当散射函数 $\beta(\theta)$ 的方向图很宽，$\theta_{\frac{1}{2}}$ 很大时，F_n 就很大，这时 $S_n(R, \theta)$ $(n > 0)$ 变得很小，可以略去，这时

$$S(R, \theta) = S_0(R, \theta) = \frac{\Phi_0 e^{-a_0\theta^2} e^{-kR}}{R^2}. \tag{42}$$

也就是自然轉化为 La Grone 的表达式(14). 不过这种情况在大气中不能存在，这是因为 $\theta_{\frac{1}{2}}$ 是极小的，所以(14)式或(42)式不合用.

6. 当 $\theta_{\frac{1}{2}} \doteq 0$ 时，$f_n \doteq 0$，$F_n \doteq 0$，$a_n \doteq a_0$，这时(39)式亦轉化为：

$$S(R, \theta) = \frac{\Phi_0 e^{-a_0\theta^2} e^{-kR}}{R^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kR)^n}{n!} = \frac{\Phi_0 e^{-a_0\theta^2}}{R^2} = S_H(R, \theta). \tag{43}$$

和均匀介质中的表达式(40). $\theta_{\frac{1}{2}} \doteq 0$ 就意味着散射波仍完全集中在向前方向，不偏离波束，散射作用就不对波的强度发生什么影响了. 大气的实际情况和这一极限情况比較接近.

下面作一实例計算. 根据 Gossard 的测量[2]，取 $L_0 = 15$ 米，$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = 100 \times 10^{-12}$，設 $\lambda = 3$ 厘米，$\theta_0 = 0.1°$，$k = 91.3$ 公里. 按(39)式計算得到的 $S(R, \theta)$，如图 6 中的曲綫 A 所示. 均匀介质中的 $S_H(R, \theta)$ 如曲綫 B 所示，所有曲綫都略去了共同因子 $\frac{\Phi_0}{R^2}$. 由图显見，散射作用引起了波的漫散：θ 小处 A 低于 B，即 $S(R,$

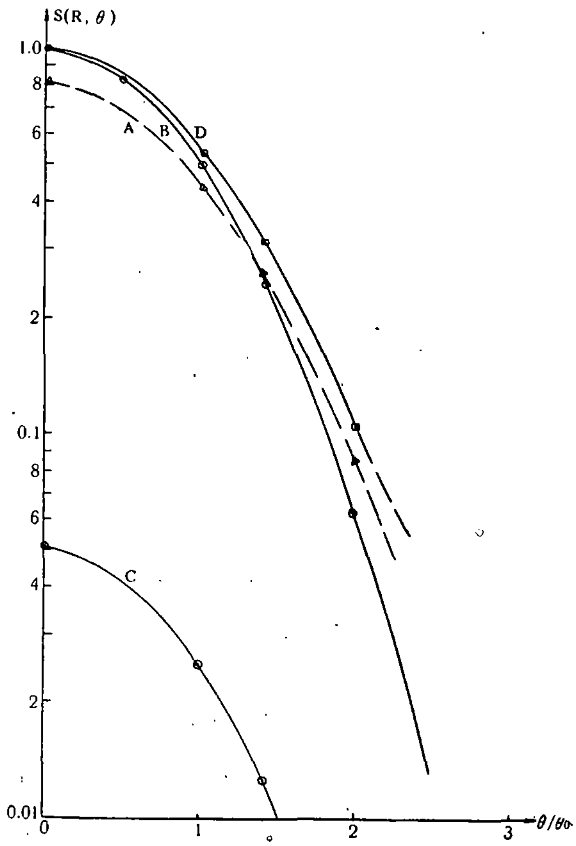

图 6

$\theta)<S_H(R,\theta)$; θ大处A高于B，即$S(R,\theta)>S_H(R,\theta)$. $S(R,\theta)$的方向图函数$\dfrac{S(R,\theta)}{S(R,\theta)}$如图中的曲綫$D$所示，它显然比均匀介质中波的方向图（曲綫$B$）加宽了。由图中也看出，按 La Grone 等人的(14)式計算的$S(R,\theta)$（曲綫C）和按(39)式計算的相差极远，我們情愿用$S_H(R,\theta)$代替按严格的(39)式計算的$S(R,\theta)$，这样誤差反而小。

如果θ_0和L_0的数值比上面实例計算中的大些，那么B和A将更接近些，就是說散射不引起波的特性的显著变化。

四、結 論

1. 当大气折射率的起伏較大时，它所构成的后向散射能被雷达所測出，并且强度和一般雷达测到的气象"仙波"同一量級范围。根据現有的資料看来，"仙波"出現时的大气条件恰好是有利于形成大的折射率起伏，所以折射率的起伏构成的后向散射很可能是产生气象"仙波"的一种重要机制。

2. 雷达波在折射率有起伏的大气中传播时，它的強度随距离的变化应該用文中的(39)式計算。如果起伏的尺度长不大，雷达波瓣又不十分窄，那么散射作用就不致引起波的特性的显著变化。如果起伏的尺度較小，波瓣又极窄，那么散射作用就会引起波瓣的加宽。表达式(39)适用于圓拋物面天綫，所以它也能在通訊問題的計算中应用。

致謝：本文承謝义炳教授、严开伟先生指正，謹此致謝。

参 考 文 献

[1] 阿林貝尔格，A. Г.，公尺波和公分波的传播，1959年。
[2] Gossard, E. E., Power Spectra of Temperature, Humidity and Refractive Index from Aircraft and Tethered Ballon Measurement. *I. R. E. Transaction on Antennas and Propagation,* Vol. Ap—8, No. 2, 1960.
[3] Wheelon, A., Radio-wave Scattering by Tropospheric Irregularities. *Journal. N.B.S.*, Vol. 63, No. 2, 1959.
[4] Татарский, В. И., Теория флуктуационных явлений при распространении волн. в турбулентной атмосфере, 1959.
[5] Татарский, В. И., Радиофизические методы изучения атмосферной турбулентности. *Извесmuя вeсших учебных заведений радиофизика*, том. 3, № 4, 1960.
[6] Norton, K. A., Recent experimental Evidence favouring the $\xi k_1(\xi)$ correlation function for describing the Turbulence of Refractivity in the Troposphere and Stratorphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 15, No. 3/4, 1959.
[7] Atlas, D., Radar Studies of Meteorological "angel" echoes. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics.* Vol. 15, No. 3/4, 1959.
[8] Myron. G. H. Ligda. and Stuart, G. Bigler, Radar Echoes from cloudless Cold Front. *Journal of Meteorology.* Vol. 15, No. 6, 1958.
[9] Gerhart, J. R., Crain, C. M. and Chapman, H., Microwave Refractive Index Flunctuations Associated with Convective Activity in the Atmosphere. *Bull. Amer. Met. Soc.* 37 (1956), 251.
[10] Plank, V. G., Convection and Refractive Index Inhomogeneities. *Journal of Atmosph. and Terrestrial Physics.* Vol. 15, No. 3/4, 1959.
[11] Battan, L. J., Radar meteorology, 1959.
[12] La Grone, A. H., Benson, W. H., Straiton, A. W. *Journal. Appl. Phys.*, Vol. 23, No. 1, 1952.
[13] Высоковский, Л. М., Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, 1958.

ON THE SCATTERING OF RADAR-WAVE BY FLUNCTUATIONS OF ATMOSPHERIC REFRACTIVITY

LEE CHI-CHEN AND OTHERS
(Department of Geophysics, Peking University)

ABSTRACT

Scattering of radar-wave by flunctuations of atmospheric refractivity is studied in this paper. The main results are as follows:

1. In case of intensive atmospheric refractivity flunctuations, the power of back-scattered radiation due to the refractivity flunctuations may exceed the minimum detectable power of radar, and is of same order of magnitude as the meteorological "angel" wave. With other evidences, it is hence suggested that the scattering by refractivity flunctuations may be an important mechanism in the formation of meteorological "angel" wave.

2. An equation is derived to express the wave magnitude as a function of the distance propagated in the medium with refractivity flunctuations. It is found that the scattering effect does not affect the wave magnitude significantly in general, but it may cause the wave-width to spread when the scale length of refractivity as well as the wave-width of radar are quite small.

更　正

气象学报第 32 卷　第 4 期"論近年来云雾滴譜形成理論的研究"一文中有下列錯誤，特此更正．

頁	行	誤	正
268	4	K	κ
268	倒 1	C	c_p
269	2	$\frac{\kappa}{L\rho_\kappa}$	$\frac{k}{L\rho_\kappa}$
269	3	κ	k
269	7	S	s
269	14	$\frac{ds'}{dt}=\frac{\partial s'}{\partial T}\frac{dT}{dt}$	$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial T}\frac{dT}{dt}$
269	倒 6	$\frac{e_s}{q}S$	$\frac{e_s}{p}$
269	倒 3	div $\mathbf{V}$	div $\mathbf{u}$
270	5	14	15
280	23,26	119个/厘米^3	11.9个/厘米^3