

气象問題中橢圓型狄氏边值問題数值解的迭代法*

王 宗 皓

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

本文从天气学的事实出发,应用自共轭橢圓型边值問題解的簡單格林函数表达式,建立适合解动力气象学中橢圓型方程狄氏边界值問題的数值迭代解法,这个方法有較普遍的意义。目前,气象中常用的近似方法——Белоусов 方法、Машкович 方法、Fjörtoft 方法以及外推 Liebmann 方法都是本文所提方法的特殊情形。在本文所提方法的一般形式基础上,还可以对上述各种近似方法的准确度、收敛情况以及改进途径得到明确的了解。作者将公式 Π_1 用在数值解平衡方程的計算中,作为本文所提方法的数值計算的檢驗,試用結果表明本文所提方法有理論概括意义和实用前途。

一、引 論

适用計算气象問題的差分数值解法至少应当滿足两个要求:首先,計算方法本身需用的輔助参数要少,或者是可以在計算过程中能用最簡單的公式、花最少的运算量所形成的参数。因为气象問題本身带有相当多的数据;如果方法本身也帶有很多固定的需要存放的参数,就会导致計算机快速內存儲单元容量需用紧张,不得不动用慢存儲单元。这样,相对地減小了計算机原有的計算速度,而达不到数值試驗工作特别是預报工作需要最快得出結果的要求。其次,計算方法要以最快速度求得滿足一定准确度的解。因为气象問題数值計算的运算量很大,而且橢圓算子求逆又占絕大部分运算量;如果計算橢圓算子的近似方法收敛很慢,不仅滿足不了最快得出結果的要求,而且对整个計算过程順利地进行也有很大的影响。

目前,气象問題中常用的方法有很多种^[1-3,7,12,14-17],其中有的近似程度差,有的可靠性得不到保証(特別在电子計算机上应用),有的虽准确,但效率不高或不便于使用。本文的目的是在上述考虑的基础上进行初步探討,提出了气象問題中橢圓型算子近似求逆的迭代法。

二、迭代法的理論基础

§ 1. 基本預报方程及其近似解法的考虑

在准地轉风或准无水平輻散假定下,对一般物理模式^[13]在物理上进行适当簡化,以照顾数学处理方便,在适当上、下边界条件及側边界条件下,預报过程可归結为求解以下橢

* 本文 1962 年 2 月 28 日收到。

圓型方程組的边界值問題^[4,5]:

$$L(u) = J(Q), \quad Q = (x, y, p) \in D, \quad (1.1)$$

$$B(u) = 0, \quad Q = (x, y, p) \in \Gamma. \quad (1.2)$$

然后解以下初值問題

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = u, \quad Q \in D, \quad 0 \leq t \leq \mu, \quad (1.3)$$

$$\Psi|_{t=0} = f(Q), \quad (1.4)$$

作出預报,即先解定常問題,然后解非定常問題。此处, D 为預报区域, Γ 为其边界, $[0, \mu]$ 为預报时限。由此,明显地可以看出运算量集中在求解定常問題的(1.1)和(1.2)式上。

一般說来(1.1), (1.2)式是自共軛边界值問題,其解答有簡單形式:

$$u(Q) = \int_D G(Q', Q) J(Q') dx' dy' dp' \approx \sum_{Q'} a(Q, Q') J(Q'). \quad (1.5)$$

式中 $Q' = Q'(x', y', p')$; $G(Q', Q)$ 称为格林函数,它具有对称性,在 Γ 上取零值。

必須指出 (1.2) 式右端为零的条件不是限制性条件。因为我們总可以作未知函数的替換 $u - u_1$; 把非零边界条件轉变成零边界条件, u_1 是滿足非齐次边界条件的已知函数。当用数值方法解边界值問題(1.1), (1.2)式时, u_1 可以取作滿足非零边界条件(1.2)式的任何第零級近似解。这时, (1.5)式的右端沒有本質上的变化。

在实际計算过程中,总是选格网点集 D_h 及边界点集 Γ_h 代替原来的区域 D 及其边界 Γ , 并可使得 $D_h \cup \Gamma_h \in D \cup \Gamma$ 。在 D_h 中定义 $L(u)$ 及 $B(u)$ 的差分算子 $L_h(u)$ 及 $B_h(u)$, 用 $J_h(Q_h)$ 表示 $J(Q)$ 在格网点上的值, Q_h 表示格网点。于是代替 (1.1), (1.2) 式的是差分方程

$$L_h(u) = J_h(Q_h), \quad Q_h \in D_h. \quad (1.6)$$

$$B_h(u) = 0, \quad Q_h \in \Gamma_h. \quad (1.7)$$

其解可写成与(1.5)式类似的形式

$$u(Q_h) \approx \sum_{Q'_h} a(Q_h, Q'_h) J_h(Q'_h). \quad (1.8)$$

(1.8)式中的系数 $a(Q_h, Q'_h)$ 不难近似地或經驗地求得。

問題在于在实际計算中,对每点 Q_h 要求計算出一套权系数,并存在机器内存中,然后利用这些系数依照(1.5)式或(1.8)式去計算解答。这样做并不一定方便也不必要,我們知道 Юдин^[20] 的天气統計結果:多数場合下,相距約一千公里的两地 24 小时变压相关系数几乎为零。因此,利用这一統計事实,对計算过程作进一步簡化:将 D_h 分成若干子集 $D_{h,l} (l = 1, 2, \dots \leq m = n_1 \times n_2 \times n_3)$, 在子集的边界 $\Gamma_{h,l}$ 上及其外边給出与 Юдин 的結果等价的附加在权系数上的假定

$$a(Q_h, Q'_h) \approx 0, \quad Q'_h \in \Gamma_{h,l}, \quad Q_h \in D_{h,l}. \quad (1.9)$$

这样,在 $D_{h,l}$ 中(1.8)式可写成

$$\tilde{u}(Q_h) \approx \sum_{Q'_h} a(Q_h, Q'_h) J_h(Q'_h), \quad Q'_h \text{ 及 } Q_h \in D_{h,l}. \quad (1.10)$$

应当注意到,Юдин 的結果毕竟是一般情形或大多数情形下的客观反映,不一定在任何条

件下都准确成立。因此,解(1.10)式在整个 D_h 上有可能使得余差

$$R(Q_h) = L_h(\tilde{u}) - J_h(Q_h) \approx 0. \quad (1.11)$$

但是依照(1.10)式所得的结果应当是一近似解,不妨把这一近似解当作真解的第一近似。然后在第一级近似解基础上,改变(1.10)式中 $J_h(Q_h)$ 的值,依(1.10)式再计算第二级近似解,依此继续,直到(1.11)式中的 $R(Q_h)$ 在 D_h 上小到允许范围之内。下面我们仅讨论平面问题。

为了下面讨论的方便起见,我们将(1.10)式中的影响权系数取出来,在 D_h 上依序(指格网点从左往右,从下到上的编号顺序,以下均同此)排列构造矩阵

$$H \equiv \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \cdots a_{11} & a_{12} \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{20} a_{21} \cdots & a_{22} a_{21} & a_{22} \\ 0 & & & a_{n2} \end{bmatrix},$$

其中矩阵元素假定满足关系式: $a_{i,j-1} = a_{i,j+1}$, $a_{ij} > 0$, i 表示格网点的编号, j 表示与 i 点等距离的点, H 是我们构造迭代法的主要元件,称它为影响矩阵。若将 $D_{h,l}$ 取成彼此相等且相交的子集,可以使得 H 为对称正定矩阵。

§ 2. 迭代叙列的构造

§ 2.1 公式 I 在上节(§ 1)考虑算法的基础上,我们建立求解方程组

$$L_h(u) = J_h(Q_h), \quad Q_h \in D_h, \quad (2.1)$$

$$u = 0, \quad Q_h \in \Gamma_h \quad (2.2)$$

的迭代叙列,并约定(2.1)(2.2)式在 D_h 上已依序排成矩阵形式:

$$W \cdot u = T, \quad (2.3)$$

其中 W 代表系数矩阵, u 是未知向量, T 是已知右端及边界条件所组成的向量。余差向量

$$R^{(n)} = T - W \cdot u^{(n)} = W(u - u^{(n)}) \quad (2.4)$$

表示(2.3)式的第 n 级近似解与其真解的偏差。这时,若在(2.4)式中以 H 代替 W^{-1} ,将所得结果作为 u 的第 $n+1$ 级近似

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + H(R^{(n)}) = u^{(n)} - H \cdot W u^{(n)} + H \cdot T = M u^{(n)} + H \cdot T. \quad (2.5)$$

其中 $M + HW = I$ 。(2.5)式表示一级定常迭代叙列,约定称为公式 I_1 。若 H 在 n 进程中在近似程序上有变化,则 $H = H_{(n)}$ 依赖 n , 此时相应地有迭代公式 I_2 :

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + H_{(n)}(R^{(n)}) = M_{(n)} u^{(n)} + H_{(n)} T. \quad (2.6)$$

其中 $M_{(n)} + H_{(n)}W = I$ 。(2.6)式代表一级非常定迭代叙列。公式 $I_{1,2}$ 的收敛条件由下面定理一、二给出。

定理一 如果 H 及 W 同时是对称正(负)定矩阵,并有共同的特征基底,则公式 I_1 收敛的充分必要条件是 HW 的特征值都在 $(0, 2)$ 区间之内。

证明: 因 H 及 W 是对称矩阵同时为正(负)定,并有共同特征基底,立即得知 HW 的特征值 $\lambda_{HW} = \lambda_H \cdot \lambda_W$ 是两正(负)实特征值之积,因而为正。迭代矩阵 $M = I - HW$ 的特征值 $\lambda_M = 1 - \lambda_{HW}$ 。显然 $|\lambda_M| < 1$ 是公式 I_1 收敛的充分必要条件^[6,18], 然而 $|\lambda_M| < 1$

等价于 λ_{HW} 在 $(0, 2)$ 区间之内. 证毕. 完全类似的可得

定理二 如果 $H_{(n)}$ 及 W 是对称同时为正(负)定的矩阵, 并有共同特征基底, 则公式 I_2 收敛的充分必要条件是 $H_{(n)}$. W 的特征值在 $(0, 2)$ 之内.

§ 2.2 公式 II 如果在计算第 $n+1$ 次近似 $u^{(n+1)}$ 的第 S 个分量时, 用了前面计算的值代替 $u^{(n)}$ 的前面第 $1, 2, \dots, S-1$ 个分量的值, 此时, 余差向量

$$R^{(n,n+1)} = T - W \cdot u^{(n,n+1)} = T - (D - W_1 + W_2)u^{(n,n+1)},$$

式中 D 为对角矩阵, W_1 及 W_2 分别为下、上三角形矩阵. 相应于(2.5)式, 这里我们有

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= u^{(n)} + H(R^{(n,n+1)}) = u^{(n)} + HW_1 \cdot u^{(n+1)} + H(W_2 - D)u^{(n)} + HT = \\ &= HW_1 u^{(n+1)} + [I + H(W_2 - D)]u^{(n)} + HT. \end{aligned}$$

如对固定 H 选一所谓放松因子 s' 以便留有调整近似的余地, 这样, 代替上式有

$$(I - s'HW_1)u^{(n+1)} = \{I + s'H(W_2 - D)\}u^{(n)} + (I - s'HW_1)^{-1} \cdot s'HT,$$

或者

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= (I - s'HW_1)^{-1}\{I + s'H(W_2 - D)\}u^{(n)} + (I - s'HW_1)^{-1} \cdot s'HT = \\ &= G \cdot u^{(n)} + F \cdot T, \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里 $G = (I - s'HW_1)^{-1}\{I + s'H(W_2 - D)\}$ 为迭代矩阵, $F = (I - s'HW_1)^{-1}s'H$, 而且 $G + FW = I$. (2.7) 式代表一级定常迭代数列, 约定称为公式 II₁. 同 § 2.1 一样, 若在 n 进程中在近似 H 的元素程序上有变化, 即 $H = H_{(n)}$, 相应地有一级非定常迭代数列

$$u^{(n+1)} = G_{(n)}u^{(n)} + F_{(n)} \cdot T. \quad (2.8)$$

其中 $G_{(n)} = (I - s'H_{(n)}W_1)^{-1}\{I + s'H_{(n)}(W_2 - D)\}$, $F_{(n)} = (I - s'H_{(n)}W_1)^{-1}s'H_{(n)}$. 且 $G_{(n)} + F_{(n)}W = I$. 称(2.8)式为公式 II₂. 公式 II 的收敛条件由下面的讨论给出. 为此, 假定 H 不可约, 并可写成块状三对角线形式

$$H = \begin{bmatrix} A_{11} & A'_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & A'_{21} & & \\ & A_{31} & A_{33} & A'_{31} & \\ & & & \ddots & A'_{n_2-1,1} \\ & & & A_{n_2-1,1} & A_{n_2,n_2} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

$A_{i+1,1} = A'_{i1}$ ($i = 1, 2, \dots, n_2 - 1$), $a_{ii} > a_{ij} > 0$, 且 H 为实对称正定矩阵, 假定系数矩阵 W 亦为不可约实对称正定矩阵, 且可写成块状三对角线矩阵

$$W = \begin{bmatrix} D_1 & W'_1 & & & \\ W'_1 & D_2 & W'_2 & & \\ & W'_2 & D_3 & W'_3 & \\ & & & \ddots & W'_{n_2-1} \\ & & & W'_{n_2-1} & D_{n_2} \end{bmatrix} \equiv D - B. \quad (2.10)$$

其中 D_s ($s = 1, 2, \dots, n_2$) 为 W 的对角线元素所组成的对角块状矩阵, $B = D - W = -\{W_1 + W_2\}$, 今取迭代矩阵 G 的相应于特征值 λ_G 的特征函数为

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_s, \dots, U_{n_2}\}, \quad U_s = \lambda_G^{\frac{s}{2}} \omega.$$

这里 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{n_2}\}$ 为 B 及 H 的相应于特征值 λ_B 及 λ_H 的正交特征函数

(因 $\mathbf{H}$ 及 $\mathbf{W}$ 为实对称, 因而 $\mathbf{B}$ 是实对称矩阵, 故其特征函数正交), 于是

$$\mathbf{G}\mathbf{U} = (\mathbf{I} - s'\mathbf{H}\mathbf{W}_1)^{-1}\{\mathbf{I} + s'\mathbf{H}(\mathbf{W}_2 - \mathbf{D})\}\mathbf{U} = \lambda_G\mathbf{U}. \quad (2.11)$$

不失一般性, 在下面的讨论中, 假定 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, (2.11) 式的等价形式如下

$$(\mathbf{I} - s'\mathbf{H})\mathbf{U} + s'\mathbf{H}(\lambda_G\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\mathbf{U} = \lambda_G\mathbf{U},$$

或者取分量形式

$$\{(\mathbf{I} - s'\mathbf{H}\mathbf{U})\}_s + s'\{\mathbf{H}(\lambda_G\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\mathbf{U}\}_s = \lambda_G\mathbf{U}_s. \quad (2.12)$$

由 (2.9) 和 (2.10) 式直接求矩阵积不难得到

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{I} - s'\mathbf{H}\mathbf{U})\}_s &= -s'\mathbf{A}_{s1}\mathbf{U}_{s-1} + (\mathbf{I}_{ss} - s'\mathbf{A}_{ss})\mathbf{U}_s - s'\mathbf{A}'_{s1}\mathbf{U}_{s+1} \approx \\ &\approx \{-s'\mathbf{A}_{s1} + (\mathbf{I}_{ss} - s'\mathbf{A}_{ss}) - s'\mathbf{A}'_{s1}\}\mathbf{U}_s = (1 - s'\lambda_H)\lambda_G^{\frac{s}{2}}\omega_s. \end{aligned}$$

这里取近似假定 $\mathbf{U}_{s-1} \sim \mathbf{U}_s \sim \mathbf{U}_{s+1}$.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{H}(\lambda_G\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\mathbf{U}\}_s &= \mathbf{A}_{s1}(\lambda_G\mathbf{W}'_{s-2}\mathbf{U}_{s-2} + \mathbf{W}''_{s-1}\mathbf{U}_s) + \\ &\quad + \mathbf{A}_{ss}(\lambda_G\mathbf{W}'_{s-1}\mathbf{U}_{s-1} + \mathbf{W}''_s\mathbf{U}_{s+1}) + \\ &\quad + \mathbf{A}'_{s1}(\lambda_G\mathbf{W}'_s\mathbf{U}_s + \mathbf{W}''_{s+1}\mathbf{U}_{s+2}) = \\ &= \mathbf{A}_{s1}(\mathbf{W}'_{s-2} + \mathbf{W}''_{s-1})\lambda_G^{\frac{s}{2}}\omega + \lambda_G^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{ss}(\mathbf{W}'_{s-1} + \\ &\quad + \mathbf{W}''_s)\lambda_G^{\frac{s}{2}}\omega + \lambda_G\mathbf{A}'_{s1}(\mathbf{W}'_s + \mathbf{W}''_{s+1})\lambda_G^{\frac{s}{2}}\omega = \\ &= \{\mathbf{A}_{s1}\lambda_B\omega_{s-1} + \lambda_G^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{ss}\lambda_B\omega_s + \lambda_G\mathbf{A}'_{s1}\lambda_B\omega_{s+1}\}\lambda_G^{\frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

由此, 代替 (2.12) 式是近似关系式

$$(1 - s'\lambda_H)\omega_s - \lambda_G\omega_s + \lambda_B(\mathbf{A}_{s1}\omega_{s-1} + \mathbf{A}_{ss}\lambda_G^{\frac{1}{2}}\omega_s + \mathbf{A}'_{s1}\omega_{s+1}\lambda_G) \cong 0.$$

于是在正交特征基底 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_s, \dots, \omega_{n_B}\}$ 上有近似关系式

$$\lambda_G - (s'\lambda_B\lambda'_H)\lambda_G^{\frac{1}{2}} + (s'\lambda_H - 1) = 0 \quad (\mathbf{A}_{ss}\omega_s = \lambda'_H\omega_s). \quad (2.13)$$

而 $|\lambda_G| < 1$ 的必要条件是 $|s'\lambda_H - 1| < 1$, 亦即 $0 < s'\lambda_H < 2$. 方程 (2.13) 的根

$$\sqrt{\lambda_G} = \frac{s'\lambda'_H \pm \{(s'\lambda'_H\lambda_B)^2 - 4(s'\lambda_H - 1)\}^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

因 $\mathbf{H}$ 及 $\mathbf{W}$ 均正定, 且 $a_{ii} > a_{ij} > 0$, 故 $|\lambda_B| < 1$, $0 < \bar{\lambda}'_H < \bar{\lambda}_H$, 带“-”表示最大值. 因而 $\max |\sqrt{\lambda_G}| < 1$. 最佳的 $\bar{s}'$ 确定如下:

$$\bar{s}' = \frac{2}{\bar{\lambda}_H(1 + \sqrt{1 - (\bar{\lambda}_B\lambda''_H)^2})}. \quad (2.14)$$

其中 $\lambda''_H = \bar{\lambda}'_H/\bar{\lambda}_H < 1$, $\mathbf{G}$ 的带有最佳 $\bar{s}'$ 的特征值为

$$\sqrt{\bar{\lambda}_G(\bar{s}')} = \frac{\bar{\lambda}_B\lambda''_H}{1 + [1 - (\bar{\lambda}_B\lambda''_H)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.15)$$

綜上所論, 可得

定理三 如果 $\mathbf{H}$ 及 $\mathbf{W}$ 为准三对角线实对称正定矩阵具有共同的正交特征基底 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{n_B}\}$, 若 $a_{ii} > a_{ij} > 0$, 则公式 II₁ 收敛. 类似地可得

定理四 如果 $\mathbf{H}_{(n)}$ 及 $\mathbf{W}$ 为实准三对角线对称正定矩阵且有共同的正交特征基底 $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s, \dots, \omega_{n_B}\}$. 若 $a_{ii}^{(n)} > a_{ij}^{(n)} > 0$, 则公式 II₂ 收敛.

三、公式 I、II 的特例及其应用的初步结果

§ 3. 公式 I、II 的特殊情形

目前,气象问题数值计算工作中出现了若干简单、实用而又有一定物理根据的近似方法^[14-17]。这里,我们从统一的观点分析这些方法的本质,评定其准确度,并对其中在计算机上已经实现的两种方法提出改进的方案。

§ 3.1 Fjörtoft 方法 图解预报法^[7]的主要组成部分是其中的 Helmholtz 方程及 Poisson 方程的近似解法,近似解法本身又分等距离逐次平均法和不等距离逐次平均法。

如果将等距离平均算子在 D_h 中写成矩阵形式,就得到矩阵 $D = W_1 + W_2$, 不等距离的平均算子与此类似,将差分方程也在 D_h 中写成矩阵形式

$$u - \alpha Du = T, \quad (3.1)$$

式中 α 是常量, $\alpha = 1$ 时 (3.1) 式表示 Poisson 方程的差分方程组。不等距离平均算子用 D_i 表示,由 (3.1) 式以及下列等式

$$\begin{aligned} D_1 \cdot u &= D_2 \cdot D_1 u + D_1 \cdot T, \\ D_2 \cdot D_1 \cdot u &= D_3 \cdot D_2 D_1 u + D_2 \cdot D_1 \cdot T, \\ D_3 \cdot D_2 \cdot D_1 \cdot u &= D_4 \cdot D_3 D_2 D_1 u + D_3 D_2 D_1 T, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$D_n \cdot D_{n-1} \cdots D_2 \cdot D_1 u = D_{n+1} \cdot (D_n \cdot D_{n-1} \cdots D_2 \cdot D_1) u + D_n D_{n-1} \cdots D_1 T,$$

即可得出

$$u = D_{n+1} (D_n \cdots D_1) u + \{I + D_1 + D_2 D_1 + D_3 D_2 D_1 + \cdots + D_n D_{n-1} \cdots D_1\} T. \quad (3.2)$$

对于定常情形, D_i 与 s 无关, (3.2) 式等价于在公式 I₁ 中取 $s' = 1$, $H = I$ 单位矩阵的情形,且仅当范数 $\|D_i\| < 1$ 定常情形的极限解,就是 (3.1) 式的准确解:

$$u = (I + D_1 + D_1^2 + D_1^3 + \cdots + D_1^n + \cdots) T = (I - D)^{-1} \cdot T. \quad (3.3)$$

对于非定常情形, D_i 随 n 进程有变化, (3.2) 式“相当于”不定常的迭代公式 I₂, 当 $\|D_i\| < 1$, (3.2) 式的极限解为

$$u = (I + D_1 + D_2 D_1 + D_3 \cdot D_2 \cdot D_1 + \cdots + D_{n+1} D_n \cdots D_1 + \cdots) T \sim (I - D)^{-1} T. \quad (3.4)$$

可以从范数不等式 $\|T\| < +\infty$, $\|D_i\| < \|D_1\| < 1$ ($s = 2, 3, \dots$) 及范数不等式

$$0 < \|u\| \leq \{I + \|D_1\| + \|D_1\|^2 + \cdots + \|D_n\|^n + \cdots\} \cdot \|T\|$$

得知, (3.4) 式右端的极限解为有限值。这里必须注意, (3.2) 式和 (3.4) 式的右端不是唯一的形式。将 $\{D_i\}$ 换成另外一串不等距离平均算子矩阵 $\{D'_i\}$, 为了肯定起见, 假定 $\{D_i\}$ 的距离大于 $\{D'_i\}$ 的距离, 令相应于 $\{D'_i\}$ 的极限解为 u' , 于是可以出现

$$\begin{aligned} \|u - u'\| &\geq \{\|D_2 D_1 T\| - \|D'_2 D_1 T\|\} + \{\|D_3 D_2 D_1 T\| - \|D'_3 D'_2 D_1 T\|\} + \cdots + \\ &+ \{\|D_n \cdot D_{n-1} \cdots D_2 D_1 T\| - \|D'_n \cdot D'_{n-1} \cdots D'_2 D_1 T\|\} + \cdots = \\ &= \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{3,2,1} + \cdots + \varepsilon_{n,n-1,\dots,2,1} + \cdots > 0. \end{aligned}$$

因而 $u \neq u'$, 这就表明 (3.4) 式右端极限解不是唯一的。故 (3.4) 式中用“ $\sim$ ”代替“ $=$ ”号。

但从(3.2)式中余差項

$$\mathbf{D}_{n+1} \cdot \mathbf{D}_n \cdots \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u} \rightarrow 0$$

的快慢来看, 因为 $\mathbf{D}_i$ 的特征值

$$\lambda_{D_i} = \frac{1}{2} \left(\cos \gamma \frac{\pi i h}{a} + \cos \epsilon \frac{\pi i h}{b} \right)$$

滿足不等式

$$\lambda_{D_1} > \lambda_{D_2} > \cdots > \lambda_{D_n} > \cdots,$$

不等距离法的余差項趋于零的速度, 比等距离平均法的速度快, 就这点而言, 不等距离平均法較好.

§ 3.2 Машкович 方法 Машкович^[16] 将正压預报模式近似地写成

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)^{(i+\delta t)} \cong \frac{1}{c} \left\{ \frac{g}{f} (\Delta B + f, H) \right\}^{(i)} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^{(i)}. \quad (3.5)$$

将(3.5)式用相应的差分式代替, 用 u 表示 $\frac{\partial H}{\partial t}$, $T(H)$ 表示雅可比算子的差分式, 則有

$$u^{(i+\delta t)} = u_0^{(i)} + \frac{1}{c} \left\{ \sum_{i=1}^4 u_i^{(i)} - 4u_0^{(i)} \right\} + T(H^{(i)}). \quad (3.6)$$

显然(3.6)式等价于公式 I₁ 中取影响矩陣

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & & & \\ & \frac{1}{c} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{c} \end{bmatrix}, \quad n+1 \Rightarrow t+\delta t, \quad n \Rightarrow t.$$

的工作公式的形式. 自然, (3.6) 式是計算非常定問題(預报問題)的結果, 由于形式上的类似, 使我們察觉到(3.6)式的結果过于粗糙; 因为以上一时限的傾向值作为零級近似, 依(3.6)式計算出的結果, 只能是預报时限內的傾向的一級近似, 不能算作預报結果. 从而我們自然想到准确化(3.6)式的方案: 将依照(3.6)式循环运算若干次的結果, 作为要預报时限內的傾向值, 可能准确度要高些.

§ 3.3 Белоусов 方法 Белоусов 提出的局部格林函数法^[17,19]是目前常用的近似方法. 其工作公式可写成

$$u_0 = - \left\{ \frac{3}{8} T_0 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 T_i + \frac{1}{16} \sum_{i=5}^8 T_i \right\}. \quad (3.7)$$

若在影响矩陣 $\mathbf{H}$ 中取 $a_0 = \frac{3}{8}$, $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_5 = \frac{1}{16}$, 而且令 $s' = 1$, (3.7) 式就表示公式 I₁ 的第一級近似結果. 为了准确化, 依(3.7)式計算出的結果, 按公式 I₁ 或公式 II₁ 循环运算若干次, 可能对結果的准确度有所提高.

§ 3.4 外推 Liebmann 公式 这个公式是气象問題数值計算中常用的准确化計算結果的迭代公式. 目前計算数学界对此法研究最深刻, 并推广为綫迭代法(成块迭代

法)^[10,11]. 显然, 这个公式是公式 II₁ 中取 $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ 时的特殊情形. 按照第一部分的讨论, 外推的 Liebmann 方法中只考虑了计算点上未考虑周围点上的误差影响. 若取

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{A}_{ss}^{-1} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}_{ss} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4+\sigma h^2} & & \\ -\frac{1}{4+\sigma h^2} & 1 & -\frac{1}{4+\sigma h^2} & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{4+\sigma h^2} & 1 \end{bmatrix},$$

而且把系数矩阵 $\mathbf{W}$ 作相应的分块, 则公式 II₁ 就是成块迭代法^[10]. 显然, 此时影响矩阵 $\mathbf{H}$ 与系数矩阵 $\mathbf{W}$ 有共同的特征基底. 当块矩阵 $\mathbf{A}_{ss}$ 中 $\sigma = 1$, 则系数矩阵是 Poisson 方程的五点差分公式.

§ 4. 公式 I、II 应用到二维常系数椭圆型方程

在 § 1 中已指出求椭圆型运算子的逆运算子是动力气象学问题的主要计算部分, 并且指出将一般的预报模式经过适当处理可以转变成二维椭圆型方程:

$$L(u) \equiv \Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y), \quad (4.1)$$

$$B(u) = 0. \quad (4.2)$$

式中 a 及 b 可以是 (x, y) 的已知有界可测函数. 为了简单起见这里假定 a 及 b 均是常量. 经过变换

$$v = ue^{-\frac{1}{2}(ax+by)}.$$

可以把 (4.1) 式变成如下形式的椭圆型方程

$$\Delta u - \tau u = F(x, y), \quad (4.3)$$

$$B(u) = 0. \quad (4.4)$$

因此, 本节将着重讨论二维椭圆型方程狄氏边值问题的数值解法, 我们讨论 $\tau = 0$ 的情形, 并假定计算区域是矩形区域 D .

§ 4.1 矩形区域正方形格网坐标系中的公式 I₁ 这里假定已定义矩形区域 D 的格网点 $D_h \in D$ 及边界点集 Γ_h , 且 $D_h \cup \Gamma_h \in D \cup \Gamma$, 在 § 1—2 中讨论的基础上, 分 D_h 为若干子集 $D_e \in D_h$ ($e = 1, 2, \dots, N = n_1 \times n_2$, n_1 为水平方向上的格网点数, n_2 为垂直方向上的格网点数); D_e 与 $D_{e'}$ ($e' = 1, 2, \dots, N$) 的交点不必是空集.

众所周知, 在 D 及其边界 Γ 上, 坡瓦松方程 (确切说是第 n 级变分方程)

$$\Delta u^* = -\gamma^{(n)}, \quad (4.5)$$

$$u^*|_{\Gamma} = 0 \quad (4.6)$$

的解可以写成

$$u^* = \iint_D G(x, y; x', y') \gamma^{(n)}(x', y') dx' dy'. \quad (4.7)$$

其中 $\gamma^{(n)} = \Delta u^{(n)} - J(x, y)$, $u^* = u - u^{(n)}$. 格林函数 $G(x', y'; x, y)$ 可在文献 [9] 中查得. (4.5) 式中的 Δ 是拉普拉斯微分算子.

若 (4.5) 式中左端是差分算子, 相应的解答形式是

$$u^* = \sum_{i'_1=1}^{n_1-1} \sum_{i'_2=1}^{n_2-1} G_h(i_1, i_2; i'_1, i'_2) \gamma^{(n)}(i'_1, i'_2). \quad (4.8)$$

式中 $G_h(i_1, i_2; i'_1, i'_2)$ 可在文献 [19] 中查得.

因此, 不論是微分算子或者是差分算子, 方程 (4.5), (4.6) 的解答形式都可在 D_h 中写成如下二重和近似形式

$$u^* = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} \gamma^{(n)}(i_1, i_2), \quad (i_1, i_2) \in D_h. \quad (4.9)$$

这里我們用 (i_1, i_2) 代替 (i'_1, i'_2) . 如果此时考虑到在 D_e 的边界 Γ_e 上及其外边附加到权系数 a_{i_1, i_2} 上的条件 (1.9) 式, 那么, (4.5), (4.6) 式的解答对 D_h 則近似地, 对 D_e 則“局部准确地”可表示成为:

$$\tilde{u}^* = \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} \gamma^{(n)}(i_1, i_2), \quad (i_1, i_2) \in D_e. \quad (4.10)$$

留下的問題是如何正确地、恰到好处地选取权系数 a_{i_1, i_2} , 这里我們提供几种选取权系数的可能途径:

(i) 在計算点附近算出微分方程的格林函数的若干个数値作为权系数, 并构造影响矩陣 H .

(ii) 算出差分方程在离散点上的格林函数在計算点附近的若干数値作为权系数, 并构造影响矩陣 H .

(iii) 在 D_e 中利用 Γ_e 上的条件 (1.9) 式, 直接解差分方程組, 以定 $\gamma^{(n)}$ 在各点的值的权系数, 利用这样定出的权系数在 D_h 中构造影响矩陣 H .

(iv) 不妨假定解答的形式是

$$\tilde{u}^* = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j^{(n)}, \quad (4.11)$$

这里 $\{\gamma_j^{(n)}\}$ 假定选成为綫性无关. 以 (4.11) 式代入 (4.5) 式, 再用变分方法的原理确定权系数 a_j . 利用这样定出的权系数, 在 D_h 中依序构造影响矩陣 H .

(v) 依方程 $\Delta u = J$, 用已有初始資料及过去的資料經驗地确定經驗影响系数, 从而得到影响矩陣 H .

不論用上面哪种方式去选择权系数, 看来都应该遵循以下原則: 当 $D_h \rightarrow D_e$, $\Gamma_h \rightarrow \Gamma_e$, u^* (或 u) 在 Γ_h 上的边界条件轉变成为 Γ_e 上的边界条件时, 差分方程組在 D_h 中的“准确解应该与其在 D_e 中的准确解”相差很小. 这个原則称为“局部准确解”与“全部准确解”(即在 D_h 中的解)的相容原則.

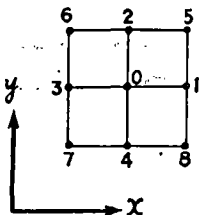


图 1

前面提供选择权系数的方法 (i)–(v) 中, 以 (iii) 最简便. 若 D_e 是图 1 中所示的九点, 此时在 D_e 中解差分方程组可得出 (3.7) 式中的权系数

$$a_0 = \frac{3}{8}, \quad a_1 = \frac{1}{8}, \quad a_5 = \frac{1}{16}. \quad (4.12)$$

构造影响矩阵

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_1 a_5 & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_5 a_1 a_5 \\ 0 & a_1 & a_0 a_1 & \cdots & a_5 a_1 a_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 a_1 & \\ & & & a_1 a_0 & \end{bmatrix}.$$

显然 $\mathbf{H}$ 是准三对角线实对称矩阵. 不同的元素只有三个, 而且 $a_0 > a_1 > 0, a_0 > a_5 > 0$. 系数矩阵也是准三对角线实对称正定矩阵:

$$\mathbf{W} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & -\frac{1}{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & -\frac{1}{4} \\ & & & & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

对于二维坡瓦松方程公式 I_1 , 即 (2.5) 式的收敛条件, 从定理一得知为特征值

$$\lambda_{HW} = \lambda_H \cdot \lambda_W$$

在 $(0, 2)$ 之内. 为了求得这一结果, 我们取 $\mathbf{H}$ 及 $\mathbf{W}$ 的特征函数族为

$$\omega^{(\gamma, t)} = \sin \gamma \frac{\pi x_1}{a} \sin t \frac{\pi x_2}{b}. \quad (4.14)$$

上式中 $\gamma = 1, 2, \cdots, n_1 - 1; t = 1, 2, \cdots, n_2 - 1; x_1 = i_1 h, x_2 = i_2 h; n_1 = a/h, n_2 = b/h; i_1 = 1, 2, \cdots, n_1 - 1, i_2 = 1, 2, \cdots, n_2 - 1$. 这里 a, b 分别代表 D_h 的长、宽边的长度, 不难求得 $\mathbf{W}$ 的特征值为:

$$\lambda_W = 1 - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\gamma \pi h}{a} + \cos t \frac{\pi h}{b} \right), \quad (4.15)$$

$\mathbf{H}$ 的特征值为

$$\lambda_H = a_0 + 2a_1 \left(\cos \frac{\gamma \pi h}{a} + \cos t \frac{\pi h}{b} \right) + 4a_5 \cos \frac{\gamma \pi h}{a} \cos t \frac{\pi h}{b}. \quad (4.16)$$

因为 $\bar{\lambda}_W \equiv \max \lambda_W < 2, \bar{\lambda}_H \equiv \max \lambda_H < 1$, 故 $\lambda_H \lambda_W < 2$, 于是公式 I_1 收敛.

对于二维二阶坡瓦松方程的五点差分式, 公式 I_1 的工作公式是

$$u_0^{(n+1)} = u_0^{(n)} + s' A(R_0^{(n)}),$$

$$R_0^{(n)} = T_0 - \left(\sum_{i=1}^4 u_i^{(n)} - 4u_0^{(n)} \right). \quad (4.17)$$

上式中算子

$$A(R_0^{(n)}) = a_0(R^{(n)})_0 + a_1 \sum_{i=1}^4 R_i^{(n)} + a_5 \sum_{i=5}^8 R_i^{(n)}. \quad (4.18)$$

在(4.17)式中引进常数乘数 s' 放在算子 A 之前, 目的在于对固定的算子 A 起加速收敛的作用. s' 的数值可在 $(0, 2/\bar{\lambda}_{HW})$ 之间选择, $\bar{\lambda}_{HW}$ 为矩阵 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{W}$ 的最大特征值.

§ 4.2 矩形区域正方形格网系统中的公式 II₁ 这里, 我们简单讨论一下二维坡瓦松方程狄氏边界问题的迭代公式 II₁. 在 § 4.1 讨论基础上, 得知

$$\mathbf{A}_{ss} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & & & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 & & \\ & a_1 & a_0 & a_1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_1 \\ & & & & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

于是特征值

$$\lambda'_H = a_0 + 2a_1 \cos \gamma \frac{\pi h}{a},$$

其最大值为

$$\bar{\lambda}'_H = a_0 + 2a_1 \cos \frac{\pi h}{a}. \quad (4.19)$$

而矩阵 B 的特征值为

$$\lambda_B = \frac{1}{2} \left(\cos \gamma \frac{\pi h}{a} + \cos \epsilon \frac{\pi h}{b} \right),$$

其最大值为

$$\bar{\lambda}_B = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi h}{a} + \cos \frac{\pi h}{b} \right). \quad (4.20)$$

由(4.16)式得知

$$\bar{\lambda}_H = a_0 + 2a_1 \left(\cos \frac{\pi h}{a} + \cos \frac{\pi h}{b} \right) + 4a_5 \cos \frac{\pi h}{a} \cos \frac{\pi h}{b}. \quad (4.21)$$

把(4.19)–(4.21)式代入(2.14)式即得最佳放松因子 $\bar{s}'$ 的值. 若 $a = 24h$, $b = 22h$, 用(4.12)式中的权系数算出最佳放松因子

$$\bar{s}' \approx 0.9756 \sim 1. \quad (4.22)$$

G 的相应于 $\bar{s}'$ 的最大特征值为

$$\sqrt{\bar{\lambda}_H(\bar{s}')} \approx 0.3016.$$

由此 $\bar{\lambda}_G(\bar{s}')$ 近似算得当余差减小到 10^{-2} 时, 所需迭代次数 $n \cong 2$. (4.22) 式中的 $\bar{s}'$ 与用机器选择的最佳 $\bar{s}$ 非常接近. 用机器选择的 $\bar{s} = 15/16 \approx 0.94$, 用这个 $\bar{s}'$ 的计算收敛情况见表 2.

对于二维二阶坡瓦松方程的五点差分公式 Π_1 的工作公式是

$$u_0^{(n+1)} = u_0^{(n)} + \bar{s}' A(R_0^{(n,n+1)}), \quad (4.23)$$

$$R_0^{(n,n+1)} = T_0 - (u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + u_3^{(n+1)} + u_4^{(n+1)} - 4u_0^{(n)}).$$

(4.23)式中的 $\bar{s}'$ 由(2.14)式确定. 算子 A 与(4.18)式相同.

§ 4.3 等边三角形格网系统中的公式 I_1 、 Π_1 上面 § 4.1—2 中的方法, 可以用来构造正三角形格网系统中椭圆型偏差分方程的影响矩阵. 应当注意到, 正三角形格网点集是由长边 $h_1 = \sqrt{3}h/2$, 短边 $h_2 = h/2$ 的矩形格网系统中的“跳点”格网点所组成的点集. h 是等边三角形格网的边长. 显然, 这样的格网点集具有对偶性, 因此在求影响矩阵及系数矩阵的特征值时可以利用点集的对偶性. 此时, 构造公式 I_1 及 Π_1 的过程与正方形格网中情形相同, 故不赘述.

最后我们指出两点: 其一, 按照相容原则, 可以在 D_e 上直接解局部差分方程以定影响系数, 而在 D_h 中形成影响矩阵. 这样做非常方便, 并可用之于九点差分格式及 Helmholtz 差分方程. 其二, 如果 D_h 的形状不规则, 只要它是有界的, 总可以作一个较大的矩形区域 $D'_h \supset D_h$, 然后在 D'_h 中求影响矩阵 H 及系数矩阵 W 的特征值作为 H 及 W 在 D_h 中的特征值的估值.

§ 5. 数 值 结 果

§ 2 中构造迭代序列的基本概念可以用来建立平衡方程的数值解法, 公式 Π_1 可以作为解法的主要组成部分. 详细过程将另文讨论. 这里首先将公式 Π_1 在电子计算机上应用的情况作一概要叙述, 然后简单谈谈公式 I_1 在台式计算机上的计算收敛情况.

考虑椭圆性计算条件 $f' > -2g\Delta H^{[8]}$, 经过变换并作差分代微分的处理, 平衡方程的计算公式为

$$(\Delta\psi)_0 = \frac{1}{m_0^2} \left\{ -1.46s_0 + \left[2.1316s_0^2 - \frac{2gm_0^2}{(h')^2} (\Delta H)_0 + \frac{m_0^4}{2} (\psi_5 + \psi_7 - \psi_6 - \psi_8)^2 - 0.73m_0^2 \left((\psi_1 - \psi_3)(s_1 - s_3) + (\psi_2 - \psi_4)(s_2 - s_4) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \equiv F(\psi, H, s).$$

式中下角符号见图 1, $h' = 10^4 h$, h 为格网步长, 取为 400 公里, $s = \sin \varphi$, m 为地图投影放大系数, Δ 表示拉普拉斯差分算子, H 为等压面位势高度, 流函数 $\psi = 10^{-4} h^2 \Psi$, 当右端 $F(\psi, H, s)$ 用前一級近似 $\Psi^{(d)}$ 计算出来时, 则可用零級近似

$$\Psi^{(d+1)} = \Psi^{(d)} \quad (d = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\Psi^{(0)} = \frac{10^4}{h^2} \frac{g}{f_0} H = \Psi^{(0)}.$$

按上述迭代公式

$$\Psi^{(d+1)} = \Psi^{(d)} + s' A \{ F(\Psi^{(d)}, H, s) - \Delta \Psi^{(d)} \}, \quad (5.1)$$

$$\{ \Psi^{(d+1)} - \Psi^{(d)} \}_{\Gamma_h} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

求解 Poisson 方程边值问题:

$$\Delta \Psi = F(\Psi, H, s), \quad (5.3)$$

$$\Psi^{(d+1)}|_r = \Psi^{(0)}|_r = \frac{10^4}{h^2} \frac{g}{f_0} (H)|_r. \quad (5.4)$$

(5.1) 式中 A 代表运算符:

$$A(\cdot) = \frac{3}{8}(\cdot)_0 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 (\cdot)_i + \frac{1}{16} \sum_{i=5}^8 (\cdot)_i.$$

$s' \sim 1.000$.

到目前为止,我们用(5.1),(5.2)式计算了一个理想高度场

$$H = -30 \sin[(i+j)12^\circ] - 15 \sin[(i-j)12^\circ] - 7.5[\cos i20^\circ + \cos j20^\circ],$$

和若干个实况高度场相应的流函数 Ψ 场。 D_h 为长方形区域 ($a \times b = 24 \times 22h^2$), 因为公式 II₁ 的实例计算收敛情况与理想高度计算情况相当接近, 这里只把理想场计算情况列于表 1 及表 2 中, 计算误差减小到 2^{-9} 最多需迭代 5 次.

表 1 ($s' = 1$)

輪換次數	0	1	2	3	4	5	6	
輪換誤差	0.18915	0.09850	0.017488	-0.00907	-0.00791	-0.00707	-0.00627	
迭代次數	5	2	1	1	1	1	1	
迭代誤差	-0.012889	-0.021476	-0.001464	0.001411	-0.001678	-0.001564	-0.001617	
	-0.004344	-0.001586						
	-0.003395							
	-0.002502							
	-0.001861							

輪換控制誤差 $\epsilon_d = 2^{-8}$, 迭代控制誤差 $\epsilon_n = 2^{-9}$

表 2 ($s' = 15/16$)

輪換次數	0	1	2	3	
輪換誤差	0.18915	0.00490	-0.00404	-0.00378	
迭代次數	1	1	1		
迭代誤差	-0.00158	-0.00134	0.00122		

輪換控制誤差 $\epsilon_d = 2^{-8}$, 迭代控制誤差 $\epsilon_n = 2^{-9}$

我們還在台式計算機上用公式 I₁ 計算 1958 年 1 月 10 日 00 時 500 毫巴高度場的第一個時間步長的傾向。這裡, 渦度方程右端雅可比平流項是電子計算機算出的結果, 並歐範圍計算區域 $D_h = 24 \times 8h^2$, 在 D_h 中用公式 I₁ ($s' = \frac{1}{4}$) 循環運算三次。計算誤差減小情況為: 第一次 $\max_{ij} R_n = 1.339$ (與雅可比同量級); 第二次 $\max_{ij} R_n = 0.904$; 第三次 $\max_{ij} R_n = 0.613$.

§ 6. 結 語

由表 1 和表 2 中的結果以及公式 I₁ 在台式計算機上實例計算情況都表明, 從表面上看來毫不相干的兩種方法——準確的格林函數法和逐次迭代近似方法——在物理意義基

础上结合起来派生一新迭代法, 不仅有理论概括的优点, 而且有很大的实用前途。如果对影响系数选取以及计算过程的简化作更进一步研究, 新迭代法的潜力会更好地被发挥出来。

参 考 文 献

- [1] Frankel, S. P., Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, *MTAC* 4 (1950).
- [2] Young, D., Iterative methods for solving partial difference equation of elliptic type *Trans. Amer. math. Soc.*, 76 (1954).
- [3] Karlquist, O., Numerical solution of elliptic difference equation by martrix methods, *Tellus* 4 (1952).
- [4] Petterssen, S., Weather analysis and Forecasting. Vol. 1 (1956).
- [5] Charneg, J. G. and Phillips, N. A., Numerical integration of the quasigeotrophic equation for baropic and simple baro clinic flows, *J. Meteo.*, 2 (1953).
- [6] Forsythe, G. E. and Wasow, W. R., Finite difference methods for partial equations, 1960.
- [7] Fjörtoft, R., On a numericil method of integrating the barotropic vorticity equation, *Tellus*, 3 (1952).
- [8] Bolin, B., Numerical forecasting with the barotropic model, *Tellus* 1 (1955).
- [9] Courant-Hilbert, Method of mathematical physics, Vol. 1 (1955).
- [10] Arms, R. J., Gates, L. D. and Zondek, B., A method of block iteration, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 4 (1956).
- [11] Cuthill, E. H., Varge, R. S., A method of block normalized iteration, *J. Associ. Compu. Machinery*, 6 (1959).
- [12] 叶篤正等, 北半球冬季阻塞形势的研究, 科学出版社, 1962, 102.
- [13] 朱抱真, 一个讨论大气环流季节变化和长期预报的流体力学模式, *气象学报*, 29 (1958).
- [14] 顾震潮, 论 Poisson 方程的简单差分解法, *气象学报*, 29 (1958).
- [15] 徐尔颢, 论 Helmholtz 方程的近似数值解法, *气象学报*, 31 (1960).
- [16] Машкович, С. А., Упрощенный способ интегрирования уравнения вихря в прогностических целях, *Труды ЦИП* Вы. 78 (1958).
- [17] Белоусов, С. Л., К исследованию погрешностей численного решения уравнения переноса вихря на среднем уровне атмосферы, *Труды ЦИП* Вы. 86 (1959).
- [18] Фаддеев, Д. К. и Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, (1960).
- [19] Кибель, И. А., Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды (1957).
- [20] Юдин, М. И., Изменчивость метеорологических элементов в пространстве и времени. А. И. Воейков и современные проблемы климатологии, 1956.

ON THE NUMERICAL ITERATIVE METHOD FOR SOLVING DIRICHLET PROBLEM INVOLVING ELLIPTIC EQUATIONS ARISING IN METEOROLOGY

WANG CHUNG-HAO

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

ABSTRACTS

Based of the synoptic facts and the simple form of Green's function for the solution of the elliptic adjoint boundary-value problem, an iterative method suitable for solving the second-order elliptic self-adjoint partial differential equations arising in meteorology is given. It is quite general. The approximate methods, generally used in meteorology, such as Belousov's, Mashkovitch's, Fjörtoft's and the extrapolated Liebmann's technique may be considered as special cases of the present method. Based on the general form of the present method the accuracy and convergence of the above mentioned techniques may be examined and further the ways of improve them may also be given. As a numerical test of the present method, formula II₁ equation (2.7) was used in solving the balanced equation. Table 1 and 2 are the examples of the calculate results.