

論层結和风場对小尺度扰动发展的非綫性影响*

巢 紀 平

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

本文考虑了小尺度扰动发展时,扰动場和平均場(环境)間的非綫性相互作用后,分析了大气层結和盛行风对扰动发展的影响。分析結果指出,在层結是中性或不稳定分布时,扰动总能够得到发展;在稳定层結的情况下,只要某一临界条件滿足,扰动也能发展。一般来說,盛行风将抑制扰动的发展;但对某些类型的风速廓綫,盛行风对扰动的发展也能起到积极的作用。

一、引 言

一个众所周知的观测事实是,在大气层結不稳定(或条件性不稳定)的条件下,对流云可以得到旺盛的发展。然而,在我国南方曾多次观测到,即使在副热带高压控制下,大气层結为稳定时,仍有对流活动,甚至在一些日子里,在某些局部地区,还能发展成浓积云。

我們曾注意到,在大范围稳定层結的条件下,在某一地区对流的发展,往往要通过几次反复的生灭过程后,才能发展旺盛而形成浓积云。由于这种对流发展的整个过程所歷經的时间,一般都很短,对流最后能得到旺盛发展的这一事实,是很难用在这一段时间过程中,大范围层結条件的改变来解释的。对流发展的这一过程有可能表明,在对流发展尚未最后达到旺盛的酝酿时期中,对流的逐次发展和环境間的相互作用,改变了局部地区大气层結的稳定度,从而为以后时刻对流的发展,創立了局部天气条件。

在另一方面,观测也表明,盛行风强时,对流云一般很难得到旺盛的发展。同时风場对对流发展的影响是极为复杂的,它与风速垂直廓綫的形状很有关系。J. 庫特納(Kuettner)^[1]和 V. G. 普兰克(Plank)^[2]就曾注意到这种关系。

对流发展条件的理論分析,虽然开始得很早,但对上述这些有意思的現象,却还没有較好的动力学解释。从气块法出发,所得到的結論是,在稳定层結下,对流不可能发展。由薄片法^[3,4]所求得的对流发展判据,也过于偏高。同时在这些工作中,也没有考虑到风場的影响。风速垂直切变在对流发展过程中的作用, J. S. 馬尔庫斯(Malkus)^[5,6]有过分析,但她的模式是过分簡化过了的,同时着眼点也和本文的目的不同。

我們认为,重要問題在于,对流的发展是一个动力学的問題。因而要分析对流发展的条件,必需联系到对流发展的动力学过程,才能期望得到較符合实际的結果。在文献[7]中,我們从描写对流发展的运动方程入手分析了問題的初值稳定性后,得到一个考虑了盛行风影响后的对流发展判据。不过由于运动方程作过綫性化的处理,这样就割断了扰动

* 本文1962年1月25日收到。

場和环境之間相互制約的过程。在本文中，我們將分析对流发展时扰动場和平均場之間的非綫性相互作用，从而探討环境的层結和盛行风对对流发展的影响。同样的問題在文献[8]中已作过漸近分析。在以下的分析中，我們近似地用扰动場来表示对流活动。

二、平均場的变化方程和对流发展的判据

如果不考虑湍流对动量和热量的耗散作用，則在 (x, z) 平面中的小尺度运动，可以用下面的方程組来描写：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a w = 0, \quad (4)$$

$$p = \rho RT. \quad (5)$$

式中 u, w 是沿水平坐标 x 和垂直坐标 z 方向的速度分量； ρ, p, T 分别为大气的密度、压力和温度； g 是重力加速度； R 为气体常数； γ_a 为干絕热温度遞減率，如空气已达到飽和状态則可以将 γ_a 改写成 γ_b ， γ_b 为湿絕热温度遞減率。

将各量分成平均的和扰动的两个部分：

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(z, t) + u'(x, z, t), & w &= w'(x, z, t), \\ T &= \bar{T}(z, t) + T'(x, z, t), & p &= \bar{p}(z, t) + p'(x, z, t), \\ \rho &= \bar{\rho}(z, t) + \rho'(x, z, t). \end{aligned} \quad (6)$$

其中平均量的定义为：

$$\bar{A} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} A dx,$$

L 为扰动的水平寬度， $2L$ 則为扰动的水平波长。

取(1),(4)两式对 x 的平均，考虑到(3)式后便得到平均状态的变化方程为：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z}, \quad (8)$$

或者由于 $\bar{\gamma} = - \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ ($\bar{\gamma}$ 为平均温度的垂直梯度)，由(8)式对 z 微分后得到大气层結的变化方程如下：

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{w'T'}}{\partial z^2}. \quad (9)$$

将(7)–(9)式对 t 微分后，我們得到平均場对時間的二阶导数：

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} \right); \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\gamma}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} \right). \quad (12)$$

仿此可以求得平均場对時間更高级的导数。当这些导数求得后，下一时刻的平均場就可以决定。然而要将各高阶导数都求出来，是很困难的。因此我們只局限在对一阶和二阶导数的分析上。这样，下面的分析結果，只适用于对流发展初期。

在垂直气柱中，平均动能和平均內能的变化，由下面各式决定：

$$E_t = \int_0^H \bar{u}\bar{u}_t dz, \quad E_{tt} = \int_0^H (\bar{u}\bar{u}_{tt} + \bar{u}_t^2) dz, \quad (13)$$

$$I_t = \frac{C_v}{T_m} \int_0^H \bar{T}\bar{T}_t dz, \quad I_{tt} = \frac{C_v}{T_m} \int_0^H (\bar{T}\bar{T}_{tt} + \bar{T}_t^2) dz, \quad (14)$$

式中 H 是对流柱的垂直厚度； C_v 是空气的定容比热； T_m 为平均温度的平均值，取作常量。下角 t 表示对時間的微商。

由于大气的平均状态和扰动状态組成了一个統一的整体，因此在不考虑湍流耗損的作用下，平均状态总能量的减少，则表示扰动总能量要增加；反之，则表示扰动总能量要减小。根据能量轉換这一原則，我們自然可以这样来定义对流发展的判据：

$$(E_t + I_t) + (E_{tt} + I_{tt})\Delta t \leq 0 \quad \text{对流} \begin{array}{l} \text{发展,} \\ \text{衰减.} \end{array} \quad (15)$$

三、扰动場的变化方程

将(6)式代入(1)–(5)式，便近似地得到扰动运动的变化方程：

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} w' = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \beta T', \quad (17)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} + (\gamma_a - \bar{\gamma})w' + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

式中 $\beta = g/\bar{T}$ ，取作常量。

由(18)式引进流函数 ψ' ，并且

$$u' = - \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad (20)$$

从(16)、(17)两式消去 p' 后得到繞 y 軸的涡度方程：

$$\Delta_z \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial \Delta_z \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Delta_z \psi'}{\partial z} \right) - \bar{u} \frac{\partial \Delta_z \psi'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \beta \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (21)$$

将(20)式代入(19)式得,

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial z} \right) - (\gamma_a - \bar{\gamma}) \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (22)$$

$$\text{在(21)式中 } \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在(21),(22)两式中, 如果方程的右端由初始場决定, 則由此可求得 ψ' , T' 对時間的一次导数. 这样描写平均場的(10)–(12)式的右端也为已知.

四、层結分布对对流发展的影响

在本节中, 我們首先分析大气层結对对流发展的影响, 以及对流的发展反过来对层結的影响. 假定在开始时刻 $\bar{u} = 0$, 并取平均温度的分布为:

$$\bar{T} = \bar{T}_0 - \bar{\gamma} z, \quad (23)$$

式中 $\bar{\gamma}$ 在初始时刻与高度无关.

将初始时刻的对流活动用下面的扰动場来近似地表示:

$$\begin{aligned} \psi' &= a \sin lz \sin kx, \\ T' &= b \sin lz \sin kx, \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $l = \frac{\pi}{H}$, $k = \frac{\pi}{L}$. 我們指出, 对于(24)式所表示的扰动有 $\overline{w'T'} = 0$.

将(24)式代入(21),(22)式的右端, 得到

$$\Delta_2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \beta b k \sin lz \cos kx, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -(\gamma_a - \bar{\gamma}) a k \sin lz \cos kx. \quad (26)$$

設(25)式的解为:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \beta b k F(z) \cos kx, \quad (27)$$

式中 $F(z)$ 根据(25)式由下式决定:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = \sin lz, \quad (28)$$

条件为:

$$F(0) = F(H) = 0. \quad (29)$$

由(28),(29)两式定出 F 后代回(27)式, 我們求得:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\frac{\beta b k}{l^2 + k^2} \sin lz \cos kx, \quad (30)$$

注意到对于(24)式所表示的扰动, 由(7)–(9)三式恆有:

$$\bar{u}_t = \bar{T}_t = \bar{\gamma}_t = 0. \quad (31)$$

在另一方面将(30)和(26)式代入(10)–(12)式, 則得:

$$\bar{u}_{tt} = 0, \quad (32)$$

$$\bar{T}_{tt} = -\frac{\pi}{2H} \left(\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right) \sin 2\pi \eta, \quad (33)$$

$$\bar{\gamma}_m = \frac{\pi^2}{H^2} \left(\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right) \cos 2\pi\eta, \quad (34)$$

式中 $\mu = k/l$, $\eta = z/H$.

当(33)式决定后,考虑到(14)式由(15)式求得对流是否发展的判据为:

$$-\frac{C_p \bar{\gamma} \Delta t H}{4T_m} \left(\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \text{发展,} \\ \text{衰减.} \end{array} \quad (35)$$

由此不难看出,由(24)式所决定的对流能够发展的条件为:

$$\frac{\beta b^2}{1 + \mu^2} > a^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}). \quad (36)$$

由此可见,在中性层结 ($\gamma_a - \bar{\gamma} = 0$) 和不稳定层结 ($\gamma_a - \bar{\gamma} < 0$) 条件下,对流总可以得到发展外,当大气层结是稳定时,只要条件(36)式满足,对流也能得到发展.

考虑到 $b = T'_{\max}$, $\frac{a\pi}{L} = w'_{\max}$, 则(36)式可以换成下式:

$$\gamma_a - \bar{\gamma} < \beta \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \frac{T'_{\max}}{w'^2_{\max}}. \quad (37)$$

(37)式指出,对于一定的稳定度,温度愈高的扰动,愈容易得到发展,垂直气流愈强的扰动,愈不容易得到发展.

一般來說,温度的测量要比垂直速度的测量来得容易,因而(37)式还可以用来估计在稳定层结下,对流发展时可能到达的最大垂直速度. 这个最大垂直速度显然为:

$$w'^2_{\max} = \beta \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \cdot \frac{T'^2_{\max}}{\gamma_a - \bar{\gamma}}. \quad (38)$$

如取 $\mu = 1$, $T'_{\max} = 0.5^\circ\text{C}$, $\gamma_a - \bar{\gamma} = 3 \times 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{米}$, 则 $w \approx 1.2$ 米/秒.

显然,在现在的情况下,扰动发展的能量来自大气的平均内能,然而大气的平均内能,只有当 $\overline{w'T'} > 0$ 时才能释放出来,而在我們所给的初始扰动中 $\overline{w'T'} \equiv 0$, 因此要平均内能释放,必然要有 $\int_0^H \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} dz > 0$ 方可. 由(24), (26), (30)式不难算出:

$$\int_0^H \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} dz = \frac{\mu^2}{4} \left[\frac{\beta b^2}{1 + \mu^2} - a^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right]. \quad (39)$$

由此可见, (36)式即为 $\int_0^H \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} dz > 0$ 的条件.

对于发展和不发展的对流所引起的局地层结的改变,可由(34)式算出. 数值例子见图1. 图1a是不发展的情况,这时参数取 $\mu = 1$, $H = 1$ 公里, $\gamma_a - \bar{\gamma} = 3 \times 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{米}$, $b = 1^\circ\text{C}$, $w_{\max} = 3$ 米/秒. 图1b是发展的情况,取 $H = 4$ 公里, $b = 3.6^\circ\text{C}$, $w_{\max} = 0.8$ 米/秒,其余同前. 由图可见,在不发展的情况下,中层的稳定度要减小,而在低层和高层稳定度要增大;在发展情况下则相反,中层稳定度要增大,低层和高层的稳定度要减小. 变化的最大值,在100秒后可以到达 $1.3 \times 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{米}$, 即约改变了原来层结的40%.

这一简单的分析,说明了扰动场和平均场之间的相互作用,在对流的发展过程中,起着重要的作用. 我們在研究对流发展的文章中^[9], 虽然由于考虑了扰动方程中的非线性

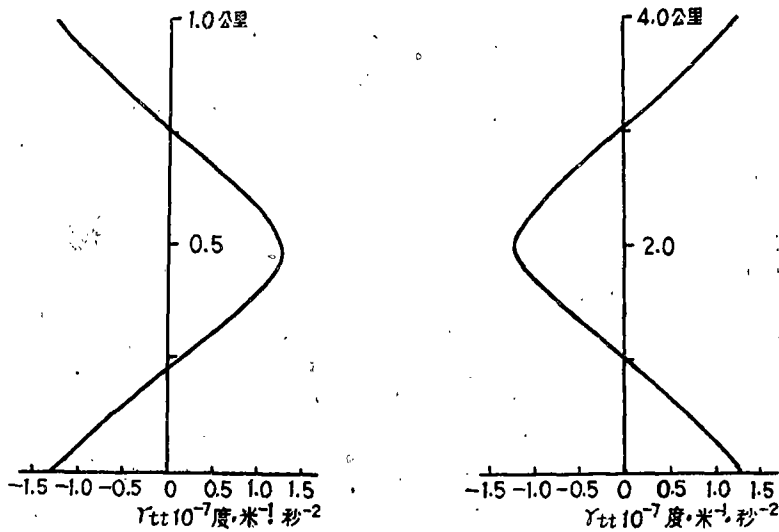


图 1a

图 1b

項后,得到了对流发展过程中的一些有意义的結果,但是,由于沒有考虑扰动場和平均場之間的相互作用,因而並沒有算出大气平均层結如此显著的改变。同时在那篇文章中,計算結果也表明,如果在开始时刻大气层結是稳定的,則对流很难得到显著的发展。同样的,Л. Н. 古特曼 (Гутман)^[10] 从常定非綫性扰动方程出发,也得到在稳定层結大气中对流云不可能发展这一結論。由此可見,只有考虑了这种相互作用后,才能解释层結稳定的大气中热对流能够发展这一观测事实。

五、盛行风对对流发展的影响

設在起始时刻大气中存在着盛行风 $\bar{u}(z)$, \bar{u} 随高度的分布是已知的, 为了分析簡便起見, 初始时刻的平均温度分布和扰动的形式仍取(23)和(24)式。

这时(21)和(22)式化为:

$$\Delta_z^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} = ak \left[(k^2 + l^2) \bar{u} + \bar{u}_{zz} + \frac{\beta b}{a} \right] \sin lz \cos kx, \quad (40)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -ak \left[(\gamma_a - \bar{\gamma}) + \frac{b}{a} \bar{u} \right] \sin lz \cos kx, \quad (41)$$

式中 $\bar{u}_{zz} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$.

假設(40)的解为下面的形式:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = ak F(z) \cos kx, \quad (42)$$

其中 $F(z)$ 满足方程:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - k^2 F = \left[(k^2 + l^2) \bar{u} + \bar{u}_{zz} + \frac{\beta b}{a} \right] \sin lz. \quad (43)$$

(43)的边界条件仍同(29)式。

方程(43)满足条件(29)的解为:

$$\bar{F}(\eta) = \int_0^1 G(\eta, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (44)$$

式中 $f(\xi)$ 为(43)式右端的非齐次部分, 而影响函数为:

$$\begin{aligned} G(\eta, \xi) &= \frac{\sinh n\eta \sinh n(\xi - 1)}{n \sinh n} \quad (\eta \leq \xi), \\ &= \frac{\sinh n\xi \sinh n(\eta - 1)}{n \sinh n} \quad (\eta \geq \xi), \end{aligned} \quad (45)$$

其中 $n = kH$.

下面我们分别以几种具有一定代表性的盛行风速廓线来讨论风场对小尺度对流发展的影响.

(1) $\bar{u} = \text{常数}$ (均匀气流)

这时我们求得:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = -ak \left(\bar{u} + \frac{\beta b}{a(k^2 + l^2)} \right) \sin lz \cos kx. \quad (46)$$

由计算不难证明, 在这种情况下, 平均场的变化与初始时刻无盛行风时完全相同. 平均动能保持不变, 平均内能的变化规律仍同上节. 所以, 对流发展的判据仍同(35)式. 这表明均匀气流对对流的发展并无影响.

(2) $\bar{u} = \bar{u}_0 + Az$

其中 \bar{u}_0 为地面风速, A 为风速垂直切变, 取为常数.

这时涡度方程的解为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial t} &= -ak \left[\left((\bar{u}_0 + Az) + \frac{\beta b}{a(k^2 + l^2)} \right) \sin lz + \frac{2l}{k^2 + l^2} A \cos lz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l}{k^2 + l^2} \frac{A}{\sinh kH} \left(\sinh kz - \sinh k(H - z) \right) \right] \cos kx. \end{aligned} \quad (47)$$

由直接计算得知, 平均场的一阶导数恒为零, 二阶导数则为:

$$\bar{u}_{xx} = \left(\frac{\pi}{H} \right)^3 \mu^2 a^2 A \left\{ -\frac{1}{2} \sin 2\pi\eta + \frac{1}{\sinh \mu\pi} [\sinh \mu\pi(1 - \eta) - \sinh \mu\pi\eta] \cdot \sin \pi\eta \right\}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{xx} &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] \frac{\pi}{H} \sin 2\pi\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ab\mu^2}{1 + \mu^2} \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 A \left[\frac{\cos \pi\eta (\sinh \mu\pi\eta - \sinh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu \sin \pi\eta (\cosh \mu\pi\eta + \cosh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} - \cos 2\pi\eta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{xx} &= \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] \left(\frac{\pi^2}{H^2} \right) \cos 2\pi\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ab\mu^2}{1 + \mu^2} \left(\frac{\pi}{H} \right)^3 \cdot A \cdot \left[2 \sin 2\pi\eta + 2\mu \frac{\cos \pi\eta (\cosh \mu\pi\eta + \cosh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mu^2 - 1) \frac{\sin \pi\eta (\sinh \mu\pi\eta - \sinh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

不难求得平均动能的变化为：

$$E_{ii} = A^2 \frac{a^2 \pi^2}{4H} \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)^2} \left[(\mu^2 + 1)(\mu^2 - 3) + \frac{16}{\pi} \mu \coth \frac{\mu \pi}{2} \right]. \quad (51)$$

由于上式中括号内的量对所有的 μ 值恒取正值，因此不论风速垂直切变是正值或是负值平均动能总要增加，即在这种情况下，扰动不可能从平均动能中取得发展的能量。

很有意思，虽然(49)与(33)式很不一样，但平均内能的变化却完全一样，即仍为：

$$I_{ii} = - \frac{C_v \bar{\gamma} H}{4T_m} \left(\frac{\beta b^2 \mu^2}{1 + \mu^2} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right). \quad (52)$$

这表明在小尺度运动中，当风速的廓线随高度呈线性变化时，扰动不可能从盛行气流中取得大气的平均内能。这是一个很有趣的结果。

由于风速垂直一次切变唯一的作用是使大气的平均动能增加，因此，风速垂直一次切变是不利于小尺度对流发展的因子。

联合(51)式与(52)式，我们得到对流发展的判别式为：

$$A^2 \frac{a^2 \pi^2}{H} \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)^2} \left((\mu^2 + 1)(\mu^2 - 3) + \frac{16}{\pi} \mu \coth \frac{\mu \pi}{2} \right) - \frac{C_v \beta \bar{\gamma} b^2 H}{T_m} \left(\frac{\mu^2}{1 + \mu^2} - \mu^2 \frac{a^2 \pi^2 (\gamma_a - \bar{\gamma})}{\beta b^2 H^2} \right) \leq 0 \quad \begin{matrix} \text{对流} & \text{发展,} \\ & \text{衰减.} \end{matrix} \quad (53)$$

由此可见，在现在的情况下，满足条件(36)式或(37)式，还只是给出了扰动发展的必要条件，要使条件成为充分，还必需对风速垂直切变的大小给以下面的限制：

$$|A| \leq A_c \quad \begin{matrix} \text{对流} & \text{发展,} \\ & \text{衰减.} \end{matrix} \quad (54)$$

其中临界风速垂直切变 A_c 为：

$$A_c = \frac{|T'_{\max}|}{|w'_{\max}|} (1 + \mu^2) \cdot \sqrt{\frac{C_v \beta \bar{\gamma}}{T_m}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\mu^2}{1 + \mu^2} - \frac{(\gamma_a - \bar{\gamma})}{\beta} \cdot \frac{w'^2_{\max}}{T'^2_{\max}}}{(\mu^2 + 1)(\mu^2 - 3) + \frac{16}{\pi} \mu \coth \frac{\mu \pi}{2}}}. \quad (55)$$

不同参数值下， A_c 的大小见图 2。

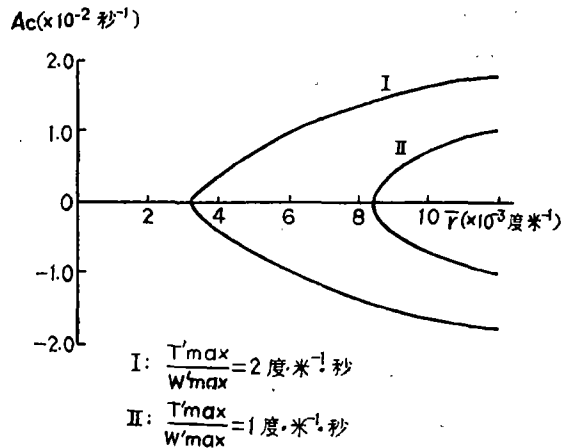


图 2

关于由于对流的发展和衰减所引起大气平均气流和层结的改变，在图 3 中给出了数值例子。

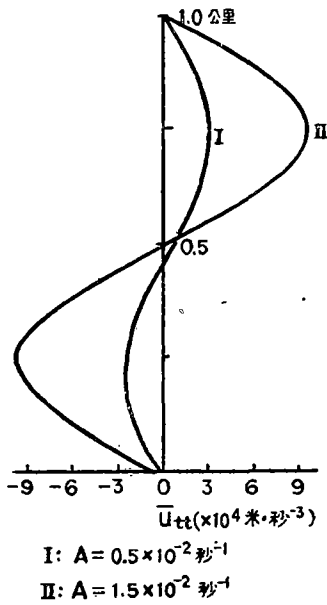


图 3a

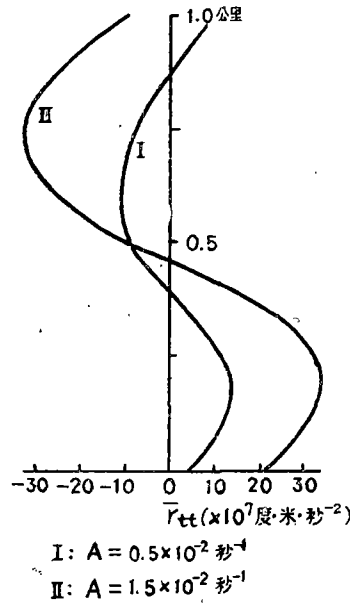


图 3b

$$(3) \bar{u} = 4\bar{u}_m\eta(1 - \eta)$$

我們指出在这一风速廓綫中，风速的垂直二次切变为 $\bar{u}_{zz} = -8\bar{u}_m/H^2$ ，恆小于零。

将(43)式的 \bar{F} 代入(42)式，得到在这一例子中的涡度方程的解为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial t} = & -ak \left\{ \left(\frac{\beta b H^2}{a(\mu^2 + 1)\pi^2} + \bar{u} - \frac{2(\mu^2 - 1)H^2}{(\mu^2 + 1)^2\pi^2} \bar{u}_{zz} \right) \sin \pi\eta + \right. \\ & + \frac{2H}{(\mu^2 + 1)\pi} \bar{u}_z(z) \cos \pi\eta + \frac{2H}{(\mu^2 + 1)\pi} \frac{1}{\sinh \mu\pi} \cdot \\ & \left. \cdot [\bar{u}_z(H) \sinh \mu\pi\eta - \bar{u}_z(0) \sinh \mu\pi(1 - \eta)] \right\} \cos kx. \end{aligned} \quad (56)$$

由(10)–(12)求得平均場的变化为：

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} = & \frac{a^2 k^2 \bar{u}_m}{H^2} \left\{ -2\pi(1 - 2\eta) \sin 2\pi\eta + \frac{4(\mu^2 - 3)}{\mu^2 + 1} \sin^2 \pi\eta + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi \sin \pi\eta}{\sinh \mu\pi} [\sinh \mu\pi\eta + \sinh \mu\pi(1 - \eta)] \right\}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{tt} = & -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) - \frac{8ab\bar{u}_m(\mu^2 - 3)}{H^2(\mu^2 + 1)^2} \right] \frac{\pi}{H} \sin 2\pi\eta - \right. \\ & - \bar{u}_m \frac{8ab\mu^2}{\mu^2 + 1} \frac{\pi^2}{H^3} \cdot \left[\frac{\cos \pi\eta (\sinh \mu\pi\eta + \sinh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} + \right. \\ & \left. \left. + \mu \frac{\sin \pi\eta (\cosh \mu\pi\eta - \cosh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} + (1 - 2\eta) \cos 2\pi\eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{tt} = & \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) - \frac{8ab\bar{u}_m(\mu^2 - 3)}{H^2(\mu^2 + 1)^2} \right] \frac{\pi^2}{H^2} \cos 2\pi\eta - \right. \\ & - \frac{4ab\mu^2}{\mu^2 + 1} \frac{\pi^3}{H^3} \bar{u}_m \left[-\frac{2}{\pi} \cos 2\pi\eta - 2(1 - 2\eta) \sin 2\pi\eta + \right. \\ & + 2\mu \frac{\cos \pi\eta (\cosh \mu\pi\eta - \cosh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} + \\ & \left. \left. + (\mu^2 - 1) \frac{\sin \pi\eta (\sinh \mu\pi\eta + \sinh \mu\pi(1 - \eta))}{\sinh \mu\pi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

不难求得平均动能的二阶导数为：

$$\begin{aligned} E_{tt} = & \frac{a^2(k^2 + l^2)\bar{u}_m^2}{4H} \left\{ \frac{16}{3} \left(1 - \frac{6}{\pi^2} \right) \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} - \frac{64\mu^2}{3(\mu^2 + 1)^2} \left(1 + \frac{3}{\pi^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{256}{\pi^2} \frac{\mu^2(3\mu^2 - 1)}{(\mu^2 + 1)^4} + \frac{256\mu^3}{\pi(\mu^2 + 1)^3} \tanh \frac{\mu\pi}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

由直接計算得知，(60)式对所有的 μ 值恆取正值。因此，这表示扰动不可能从平均气流中取得动能。

大气平均内能的二阶导数这时为：

$$\begin{aligned} I_{tt} = & -\frac{\bar{\gamma} C_v H}{4T_m} \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{8ab\bar{u}_m}{H^2(\mu^2 + 1)} \left[\frac{5\mu^2 - 3}{\mu^2 + 1} + 2\mu^2 \operatorname{csch} \mu\pi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

由于在大气中的小尺度对流一般 μ 值接近于1，而 $ab \sim \omega'_{\max} T'_{\max}$ 一般也大于零，因此(61)式中与风场有关的那一项总要使大气中的平均内能增加。联合对动能的分析，可以得出結論：具有二次垂直切变为負值的盛行气流，将抑制对流的繼續发展。当取 $H = L = 1$ 公里， $b = 1^\circ\text{C}$ ， $\omega_{\max} = 3$ 米/秒， $\bar{\gamma} = 7 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}/\text{米}$ ， $\bar{u}_m = 10$ 米/秒时 \bar{u}_{tt} ， $\bar{\gamma}_{tt}$ 的值见图4。

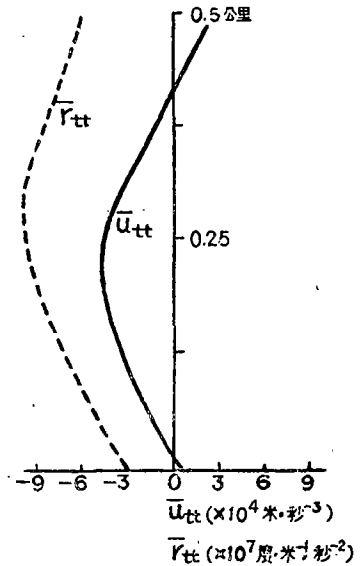


图 4

六、結果討論

以上的分析表明，盛行风的存在一般不利于对流的发展。这是与观测事实相符合的。但是，在某些情况下，例如 H. 第逊 (Dessens)^[11] 指出，强烈发展的对流云一般在高空伴随有强烈的盛行风。他并认为对流在高层将从盛行风中取得维持它发展的动能。因此我们要问，是否存在对对流发展有利的那样的风速廓线？我们来分析这一问题。

事实上，由以上的分析不难看出，涡度方程(21)式中与温度有关的那一项，对平均动能的释放并不起作用，但去掉了这一项后，在 (x, z) 平面中的小尺度运动的涡度方程与在 (x, y) 平面中的涡度方程具有相同的构造。因而，在 (x, z) 平面的小尺度运动中，平均动能的释放规律应该与 (x, y) 平面中运动平均动能的释放规律完全相同，而后者的规律性郭晓嵐有过详细的讨论^[12]，并指出：当风速廓线中存在着拐点（即二次切变为零的点）

时, 平均运动将输送动能给扰动; 反之, 如在风速廓线中不存在拐点时, 平均动能则要增加, 即动能的输送方向倒转。因此, 只要盛行风的垂直廓线中存在着拐点, 对流从盛行风中取得平均动能是可能的。不过在这种情况下, 我们还要进一步分析, 由于这一盛行风的存在, 会不会阻碍平均内能的释放。事实上平均动能和平均内能相反的输送过程是存在的。为了说明这一点, 我们举下面的例子。

取 $\bar{u} = \bar{u}_m \sin^2 lz$, 在这一风速廓线中存在着两个拐点 $\left(\frac{H}{4}, \frac{3H}{4}\right)$ 。平均温度场的分布和初始扰动的形式仍同前。

这时涡度方程的解为:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = -ak \left\{ \left[\frac{\beta b}{a(k^2 + l^2)} + \bar{u}_m \frac{3k^2 - l^2}{4(k^2 + l^2)} \right] \sin lz - \frac{k^2 - 3l^2}{4(k^2 + 9l^2)} \bar{u}_m \sin 3lz \right\} \cos kx. \quad (62)$$

平均场的变化为:

$$\bar{u}_{tt} = - \frac{k^2 a^2 \pi^2 \bar{u}_m (\mu^2 - 3)}{(\mu^2 + 9) H^2} \sin \pi \eta \sin 3\pi \eta, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{tt} = & - \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] \frac{\pi}{H} \sin 2\pi \eta + \right. \\ & \left. + \frac{ab}{2} \mu^2 \left(\frac{\pi}{H} \right)^3 \bar{u}_m \left[\left(1 - 2 \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 + 9} \right) \sin 4\pi \eta - \left(\frac{\mu^2 + 5}{2(\mu^2 + 1)} + \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 + 9} \right) \sin 2\pi \eta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{tt} = & \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] \frac{\pi^2}{H^2} \cos 2\pi \eta + \right. \\ & \left. + \frac{ab}{2} \mu^2 \left(\frac{\pi}{H} \right)^4 \bar{u}_m \left[2 \left(1 - 2 \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 + 9} \right) \cos 4\pi \eta - \left(\frac{\mu^2 + 5}{2(\mu^2 + 1)} + \frac{\mu^2 - 3}{\mu^2 + 9} \right) \cos 2\pi \eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

平均动能的变化不难求得为:

$$E_{tt} = \frac{a^2(k^2 + l^2) \bar{u}_m^2}{4H} \left\{ \frac{\pi^2}{2} \frac{(\mu^2 - 3)\mu^2}{(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 9)} \right\}. \quad (66)$$

由此可见, 当 $\mu^2 < 3$, 即 $\frac{H}{L} < \sqrt{3}$ 时, 平均动能要减小, 即对于 $\frac{H}{L} < \sqrt{3}$ 的对流可以从盛行风中取得平均动能。由于一般来说 $\frac{H}{L} \approx 1$, 因此这一条件通常都可以满足。

平均内能的二阶导数为:

$$I_{tt} = - \frac{\bar{\gamma} C_v H}{4T_m} \left\{ \left[\frac{\beta b^2 \mu^2}{\mu^2 + 1} - a^2 \mu^2 \frac{\pi^2}{H^2} (\gamma_a - \bar{\gamma}) \right] - \frac{ab\pi^2 \mu^2}{2H^2} \bar{u}_m \frac{\mu^4 + 30}{(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 9)} \right\}. \quad (67)$$

显然, 由于这一盛行风的存在将减少平均内能的释放。

因此, 对于 $\frac{H}{L} < \sqrt{3}$ 的扰动, 盛行风是否对扰动的发展有利要看条件

$$\bar{u}_m > \frac{\bar{\gamma} C_v H T'_{\max} (\mu^4 + 30) \mu}{T_m \pi \omega'_{\max} (\mu^2 + 1) (3 - \mu^2)} = \bar{u}_m^* \quad (68)$$

是否成立。当此条件成立时, 盛行风将促进对流的发展, 反之将抑制对流的发展。如取

$\bar{\gamma} = 7 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{米}$, $H = 1$ 公里, $\mu = 1$, $b = T'_{\max} = 1^\circ\text{C}$, $w'_{\max} = 3$ 米/秒, 則 $\bar{u}_m^* \approx 15$ 米/秒, 如取 $H = 5$ 公里, 其余参数同, 則 $\bar{u}_m^* \approx 75$ 米/秒. 一般來說, 在气团内部这一条件不易滿足, 只有在系統性条件下, 才有可能出現这样大的盛行風. 我們注意到在第遜所根据的資料中, 其風速廓綫的形状与現在这个例子很接近, 同时最大風速約为 80 米/秒. 因此, 看来第遜的假說有一定的可能性, 即盛行風的动能将是強烈对流发展的一个能源.

在以上所分析的几个例子中, 盛行風对平均內能的释放皆不能起到促进的作用, 究竟要什么样的風速廓綫才能对平均內能的释放起到积极的作用呢? 我們不难算出当風速廓綫能用一个对 z 的二次多項式来逼近, 并且二次切变为常数时, 在平均內能变化的公式中与風速有关的一項为:

$$I_{ii} = -\frac{\bar{\gamma} C_v H a b}{4 T_m} \bar{u}_{zz} \left(\frac{5\mu^2 - 3}{(\mu^2 + 1)^2} + \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{csch} \mu\pi \right) \quad (69)$$

由此可見, 平均內能的释放与風速二次切变有关, 当 $\bar{u}_{zz} > 0$ 时平均內能要减小, 即释放出来, 反之, 当 $\bar{u}_{zz} < 0$ 时則平均內能要增加.

自然, 本文所用的这种近似方法带来一定的局限性. 首先, 我們只計算了泰勒展开式中的二次項, 如果再考虑高次項的影响, 結論将会作某些修改. 不过高次項的影响可以作下面的定性估計. 設初始时刻的平均風速为 \bar{u}_0 , 以后时刻为 \bar{u} , 則平均动能的改变为^[12]:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_0^H (\bar{u}^2 - \bar{u}_0^2) dz = \int_H^0 \bar{u}_0 \Delta \bar{u} dz + \frac{1}{2} \int_H^0 (\Delta \bar{u})^2 dz. \quad (70)$$

如果 $\Delta \bar{u}$ 等于 $\frac{1}{2} t^2 \bar{u}_{tt}$, 那末式中右端第一項对应于 E 对時間的泰勒展开式中的二次項 $\frac{1}{2} t^2 E_{tt}$ (即我們所計算的項), 而右端第二項則对应于展开式中的 $\frac{1}{4!} t^4 \frac{\partial^4 E}{\partial t^4}$ 那一項. 因此只要 $\Delta \bar{u}$ 不恆等于零, (70) 式右端第二項恆取正值, 即总要使平均动能增加. 同样地, 也可以将平均內能写成与 (70) 式相类似的形式:

$$\Delta I = \frac{C_v}{2 T_m} \int_0^H (\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2) dz = \frac{C_v}{T_m} \int_H^0 \bar{T}_0 \Delta \bar{T} dz + \frac{C_v}{2 T_m} \int_H^0 (\Delta \bar{T})^2 dz. \quad (71)$$

因此, 平均內能对時間的泰勒展开式中的四次項也总要使平均內能增加. 由此可見, 在以上的分析中, 考虑了高次項后要加強对流衰減的趋势和減弱对流发展的趋势.

其次, 分析是針對某一特定扰动进行的, 对于不同形式的扰动, 定量的結果会有一些的差异. 不过上述能量轉換的机制看来是成立的.

最后, 我們指出, 在以上所求得的对流发展的判据中, 包含了扰动場中量 T' , w' , 而这两个量只有当对流已經发展后才能測定, 事先并不知道, 这就使得我們应用这些判据时受到一定的限制. 因此上面求得的条件, 只能作为对流已經发生后看它是否能进一步发展的判据.

参 考 文 献

- [1] Kuettner, J., *Tellus*, **11**, 1959, 267—294.
- [2] Plank, V. G., Cumulus dynamics, Conference on cumulus convection portsmouth, New Hampshire, 1959, 109—118.
- [3] Bjerknes, J., *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **64**, 1938, 328—330.
- [4] Шишкин, Н. С., *Труды ГГО*, **82**, 1958.

- [5] Malkus, J. S., *Trans. Amer. Geophys Un*, **30**, 1949, 19—25.
[6] Malkus, J. S., *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **78**, 1952, 530—542.
[7] 巢紀平, 对流发展局部气象条件的初步理論分析. *气象学报* **32** (1962), 87—90.
[8] 巢紀平, 小尺度对流的发展和环境間相互作用的一个近似分析. *气象学报* **32** (1962), 11—18.
[9] 巢紀平, 层結大气中热对流发展的一个非綫性分析. *气象学报* **31** (1961), 191—204.
[10] Гурман, Л. Н., *ДАН СССР* т. 112, 1957, 1033—1036.
[11] Dessens, H., *Physics of Precipitation cloud physics conference*, Woods Hole, Mass., 1959 333—336.
[12] 郭曉嵐, *Tellus*, **5**, 1953, 475—493.

ON THE EFFECTS OF STRATIFICATION AND PREVAILING WIND ON THE DEVELOPMENT OF SMALL SCALE DISTURBANCES

CHAO JIH-PING

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper deals with the non-linear interaction between the disturbances and the environment in the small scale systems and the effects of the stratification and the prevailing wind on the development of disturbances. It is shown that the disturbances always well develop in an unstable or a neutral stratified atmosphere and may also develop in a stable atmosphere under certain conditions. On the other hand, the prevailing wind generally prevents the development of disturbances, but with the exception of certain type of wind profile which has active effects on the growth of disturbances.