

对流崩溃过程的一个非线性理论*

胡 广 兴

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

本文利用 A. A. 德罗特尼村 (Дородницын) 所提出的方法解出了描写积云发展的非线性微分方程组来研究一种形成、发展很快, 而崩溃又很突然的积云发展过程。计算结果表明: 积云的崩溃过程是从云顶开始向下崩溃的; 非线性项的作用和大气层结的不稳定, 在对流运动崩溃过程中起着很重要的作用; 下沉运动是使积云崩溃的极重要的因素。

一、引 言

观测结果表明, 积云常常可以形成很快, 而崩溃过程也很迅速突然。例如, 在我国西北甘肃省马啣山夏季有时观测到在 10 分钟左右的时间内就发展成 1—2 公里厚的秃积雨云; 有时也观测到 2 公里厚的浓积云, 从它形成到消散只有十几分钟。我国南方亦能观测到维持时间约 20 分钟的积云。甚至还有人观测到一块发展很旺盛的浓积云在 9 分钟内可以消散掉^[1]。在不稳定的层结大气中, 云厚 1.5—4.5 公里的积云, 在 2—6 分钟内可以完全消散; 对流云从开始降水后 7 分钟就崩溃^[2]。我国亦有观测到 8 分钟就彻底崩溃的积云。当然, 大气中亦存在有较长生命过程的积云, 例如, 长达 2.7 小时^[3]或更长。但本文只限于研究前一类积云的生命过程。

过去许多作者^[2-11]对积云的形成、发展做了许多理论研究, 对积云形成、发展过程得到了初步了解。但是, 到目前为止, 关于积云崩溃过程的研究工作, 还很罕见。作者拟就这一问题试作探讨。

必需指出, 本文仅探讨积云迅速崩溃的过程, 并着重研究其宏观流场与温度场的演变, 而不涉及云雾微结构的影响。

二、方程组与解法

在轴对称圆柱坐标系内, 运动方程, 连续方程, 热流量方程及含水量方程可以写成下列形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial wr}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

* 本文 1962 年 1 月 20 日收到。

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \alpha(z)w = k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + u \frac{\partial m}{\partial r} + w \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{c_p \rho}{L} (\gamma_b - \gamma_a)w = k \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}. \quad (5)$$

初始条件和边界条件为

$$t = 0, \quad u = w = p = \vartheta = m = 0; \quad (6)$$

$$z = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 f(r, t); \quad (7)$$

$$z < H_c, \quad m = 0; \quad (8)$$

$$z = \infty, \quad w = m = \vartheta = 0; \quad (9)$$

$$r = 0, \quad u = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (10)$$

$$r = \infty, \quad w = \vartheta = p = 0; \quad (11)$$

其中

$$\alpha(z) = \begin{cases} \gamma - \gamma_a, & \text{当 } f < 100\%, \\ \gamma - \gamma_b, & \text{当 } f = 100\%. \end{cases} \quad (12)$$

u, w 为 r, z 方向的风速分量, r 为径向坐标轴, z 为垂直坐标轴, p, ϑ, m 分别为扰动气压、扰动位温和含水量, $\gamma, \gamma_a, \gamma_b$ 分别为实际大气温度垂直递减率、干绝热温度递减率和湿绝热温度递减率, c_p 为定压比热, ρ 为空气密度, L 为凝结潜热, ν, k 分别湍流粘性系数和湍流热传导系数, H_c 为凝结高度和 $\beta = \frac{g}{\theta}$.

我们利用德罗得尼村所采用过的方法, 将方程组初始条件和边界条件变为无因次形式, 且取普朗特 (Prandtl) 数为一, 进行下列坐标变换

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{T^* R^*}} r', \quad s = \frac{\sqrt{T^* R^*}}{2} \frac{z'}{\sqrt{t'}}. \quad (13)$$

无因次方程组取下列 t' 幂级数形式的解:

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\xi, s) t'^{\frac{n+2}{2}}, \quad u' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi, s) t'^{\frac{n+3}{2}}, \quad w' = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\xi, s) t'^{\frac{n+4}{2}}, \\ p' &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\xi, s) t'^{\frac{n+1}{2}}, \quad m' = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(\xi, s) t'^{\frac{n+2}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

类似地, 将边界条件中的加热函数亦展成 t' 幂级数形式

$$f(\xi, t') = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi) t'^{\frac{n+2}{2}}. \quad (15)$$

将(13)–(15)代入无因次方程组和边界条件, 得到 θ_n, w_n, u_n, p_n 及 m_n 的方程组

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+2}(\theta_n) &= 2 \sqrt{\frac{R^*}{T^*}} \left\{ \left(u_0 \frac{\partial \theta_{n-5}}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial \theta_{n-6}}{\partial \xi} + \cdots + u_{n-5} \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(w_0 \frac{\partial \theta_{n-5}}{\partial s} + w_1 \frac{\partial \theta_{n-6}}{\partial s} + \cdots + w_{n-5} \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{4F^* G^*}{R^{*2} T^*} \alpha'_0 w_{n-4} - \frac{8F^* G^*}{R^{*2} \sqrt{R^* T^*}} \alpha'_1 s w_{n-5} - \frac{16F^* G^*}{R^{*3} T^{*2}} \alpha'_2 s^2 w_{n-6}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Lambda_{n+4}(w_n) = 2\sqrt{\frac{R^*}{T^*}} \left\{ \left(u_0 \frac{\partial w_{n-5}}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial w_{n-6}}{\partial \xi} + \cdots + u_{n-5} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \left(w_0 \frac{\partial w_{n-5}}{\partial s} + w_1 \frac{\partial w_{n-6}}{\partial s} + \cdots + w_{n-5} \frac{\partial w_0}{\partial s} \right) \right\} - \frac{4G^*}{R^{*2}T^*} \theta_n, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \xi u_n}{\partial \xi} + \frac{R^* T^*}{4} \frac{\partial \xi w_n}{\partial s} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi} = -\frac{1}{2E^*} \sqrt{\frac{T^*}{R^*}} \Lambda_{n+3}(u_n) + \frac{1}{E^*} \left\{ \left(u_0 \frac{\partial u_{n-5}}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial u_{n-6}}{\partial \xi} + \cdots + u_{n-5} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) + \left(w_0 \frac{\partial u_{n-5}}{\partial s} + w_1 \frac{\partial u_{n-6}}{\partial s} + \cdots + w_{n-5} \frac{\partial u_0}{\partial s} \right) \right\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+2}(m_n) = & 2\sqrt{\frac{R^*}{T^*}} \left\{ \left(u_0 \frac{\partial m_{n-5}}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial m_{n-6}}{\partial \xi} + \cdots + u_{n-5} \frac{\partial m_0}{\partial \xi} \right) + \left(w_0 \frac{\partial m_{n-5}}{\partial s} + w_1 \frac{\partial m_{n-6}}{\partial s} + \cdots + w_{n-5} \frac{\partial m_0}{\partial s} \right) \right\} - \\ & - \frac{4F^* G^*}{R^{*2}T^*} \frac{c_p \rho}{L} \alpha'_0 w_{n-4} - \frac{8F^* G^*}{R^{*2}\sqrt{T^*}R^*} \frac{c_p \rho}{L} \alpha'_5 w_{n-5} - \frac{16F^* G^*}{R^{*3}T^{*2}} \frac{c_p \rho}{L} \alpha'_2 s^2 w_{n-6}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\alpha'_0, \alpha'_1, \dots$ 等为对应下列展开式

$$\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$$

的无因次系数。

边界条件为

$$s = 0, \quad \theta_n = f_n(\xi), \quad w_n = 0; \quad (21)$$

$$s < H_c, \quad m_n = 0; \quad (22)$$

$$s = \infty, \quad \theta_n = w_n = m_n = 0; \quad (23)$$

$$\xi = 0, \quad u_n = \frac{\partial \theta_n}{\partial \xi} = \frac{\partial w_n}{\partial \xi} = \frac{\partial p_n}{\partial \xi} = 0; \quad (24)$$

$$\xi = \infty, \quad \theta_n = w_n = p_n = 0. \quad (25)$$

与文献[9]中一样,采用慕希泰良^[12] (Мухитая) 和柴依吐良 (Зейтуля)^[13] 的解法,最后,得到的解为

$$\begin{aligned} \theta_n = & f_n(\xi) L_{n+2} + \sum_{k=0}^r \frac{a_k}{2(k-m)} (L_k - L_m) + \sum_{i,j} \frac{b_{ij}}{2} \left\{ \frac{A_i A_j}{A_{i+1} A_{j+1}} (L_{i+1} L_{j+1} - L_m) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^r 2^{k-1} (r-1)(r-2) \cdots (r-k+1) \frac{A_i A_j}{A_{i+k} + A_{j+k}} (L_{i+k} L_{j+k} - L_m) \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} w_n = & \sum_{k=0}^r \frac{a_k}{2(k-m)} (L_k - L_m) + \sum_{i,j} \frac{b_{ij}}{2} \left\{ \frac{A_i A_j}{A_{i+1} A_{j+1}} (L_{i+1} L_{j+1} - L_m) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^r 2^{k-1} (r-1)(r-2) \cdots (r-k+1) \frac{A_i A_j}{A_{i+k} A_{j+k}} (L_{i+k} L_{j+k} - L_m) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$u_n = -\frac{1}{4} R^* T^* \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\xi w_n \xi d\xi, \quad (28)$$

$$p_n = - \int_0^\xi \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^*}{R^*}} \Lambda_{n+3}(u_n) + \frac{1}{E^*} \left[\left(u_0 \frac{\partial u_{n-5}}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial u_{n-6}}{\partial \xi} + \cdots + u_{n-6} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) + \left(w_0 \frac{\partial u_{n-5}}{\partial s} + w_1 \frac{\partial u_{n-6}}{\partial s} + \cdots + w_{n-6} \frac{\partial u_0}{\partial s} \right) \right] \right\} d\xi, \quad (29)$$

$$m_n = \sum_{k=0}^r \frac{a_k}{2(k-m)} (L_k - L_m) + \sum_{i,j} \frac{b_{ij}}{2} \left\{ \frac{A_i A_j}{A_{i+1} A_{j+1}} (L_{i+1} L_{j+1} - L_m) + \sum_{k=2}^r 2^{k-1} (r-1)(r-2) \cdots (r-k+1) \frac{A_i A_j}{A_{i+k} A_{j+k}} (L_{i+k} L_{j+k} - L_m) \right\}. \quad (30)$$

三、数值计算结果

在数值计算中, 我们取了下列形式的加热函数

$$g' = (6t' - 10t'^2)e^{-t'^2}.$$

显然, 加热函数是对 z 轴对称的, 并且当 $t' = 0.3$ (相当于 9 分钟), 地面加热达到最大, $t' = 0.6$ (相当 18 分钟), 加热停止之后, 地面变为冷却。至于加热强度、范围以及加热、冷却出现的时间等, 可以调整上列函数的系数来达到。关于无因次变换中的各特征值, 取为

$$\tau = 1.8 \times 10^3 \text{ 秒}, \Delta\theta = 0.1^\circ\text{C}, V = 1.2 \text{ 米/秒}, L = 1.2 \times 10^3 \text{ 米},$$

$$k = 9.0 \times 10^2 \text{ 米}^2/\text{秒}, \alpha_0 = 0.5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{米}.$$

重力加速度 $g = 9.8 \text{ 米/秒}^2$, 平衡状态时的位温 $\bar{\theta} = 290^\circ$. 无因次参数值为

$$T^* = 0.556, R^* = 1.600, G^* = 7.168, F^* = 2.143.$$

以下结果是对大气层结取为整层不稳定计算得到的, 亦即在 $\alpha(z)$ 的展开式中, 我们令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$, $\alpha'_0 < 0$, 在具体计算中, $\alpha'_0 = -1$ (相当于不稳定度为 $-0.5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{米}$)。至于不同层结分布对积云形成、发展的作用, 已有详细讨论^[9]。计算进行到 $t' = 0.8$, 即 24 分钟。结果如下:

1. 温 度

i) 在对称轴上扰动温度高, 沿径向坐标向外迅速递减。在垂直方向, 当 $t' \geq 0.5$ (相当 15 分钟) 时, 在低层 $z = 600$ 米附近有一极值点, 极值点随时间向上移动。在 $t' = 0.65$ (相当于 19 分 36 秒), $z = 700$ 米, 最大扰动温度达 0.1°C 。极值点之上, 扰动温度迅速递减 (图 1a, b)。在 $t' = 0.8$ (相当于 24 分钟), $z \leq 1500$ 米, 最大扰动温度达 -0.1°C 左右 (图 1c)。

ii) 当 $t' > 0.6$ (即 18 分钟以后), 近地面厚 200 米左右的气层内 (此气层厚度亦随时增加), 对称轴上的扰动温度低于周围温度, 即扰动温度由轴心沿径向向外递增。

iii) 在 $z < 2$ 公里的气层内, 除贴近地面一薄层外, $t' = 0.4-0.5$ (即在 12—15 分钟) 增温率最大, $t' = 0.7-0.8$ (即在 21—24 分钟) 减温率最大。

2. 垂 直 速 度

i) 最大垂直速度出现在对称轴上, 且沿径向坐标向外迅速递减。在垂直方向上, 低

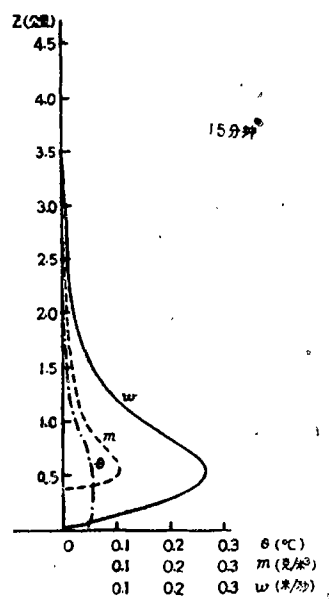


图 1a

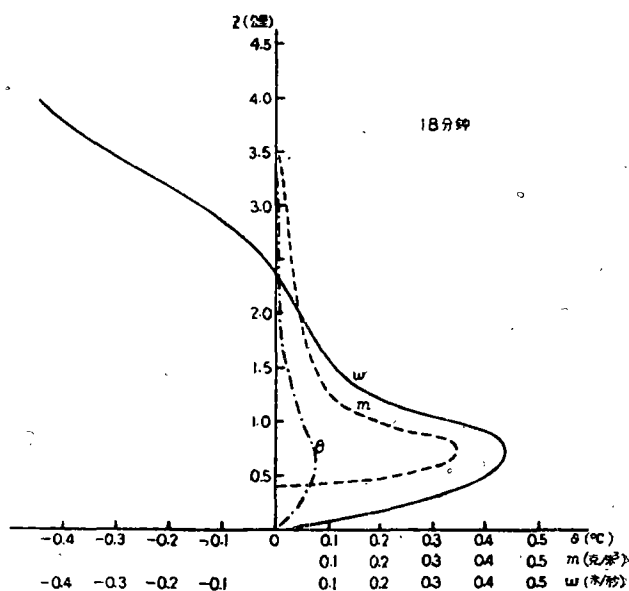


图 1b

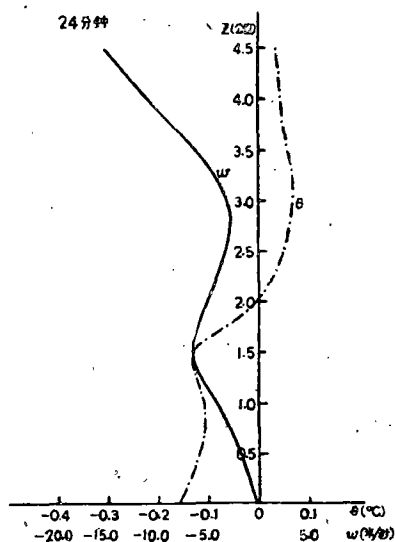


图 1c

层有一极值点,极值点随时间向上移动。极值点之上,垂直速度随高度迅速递减(图 1a, 2a—d)。

ii) 自 $t' = 0.52$ (相当于 15 分 36 秒) 起,垂直方向出现“另点”(即垂直速度变号高度),高度在 2 公里左右(“另点”之上为下沉运动,之下为上升运动)，“另点”随时间向下移动, $t' = 0.65-0.7$ (即 19 分 30 秒—21 分)“另点”消失。 $t' = 0.52-0.65$ (即 15 分 36 秒—19 分 30 秒)为对流(积云)由发展到开始完全崩溃的“过渡阶段”。

iii) $t' = 0.6$ (即 18 分钟) 之后,“另点”之上的下沉运动大于其下的上升运动。最大

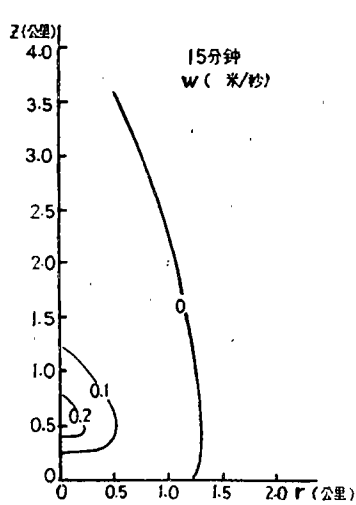


图 2a

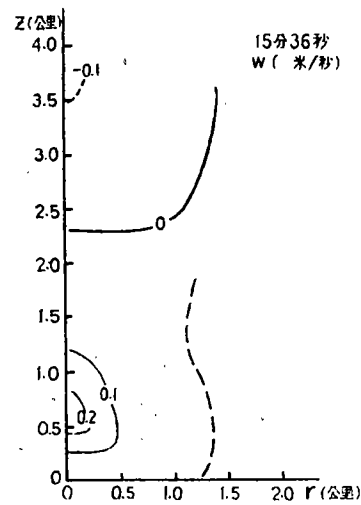


图 2b

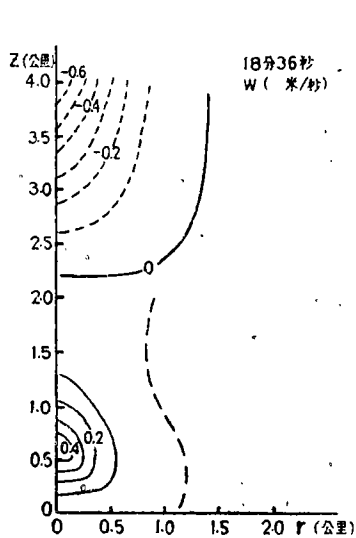


图 2c

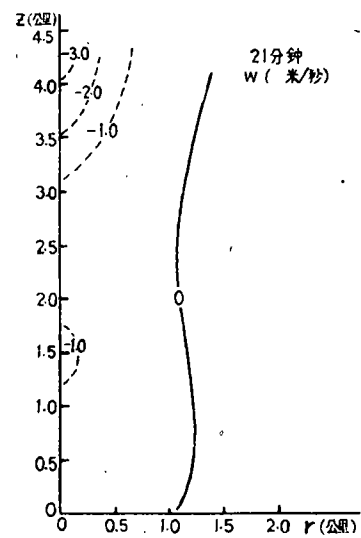


图 2d

上升速度出现在 $t' = 0.62$ (即 18 分 36 秒) 为 45 厘米/秒。 $t' = 0.7$ (即 21 分钟) 之后, 下沉速度突增, 且有二个极值中心。 $t' = 0.8$ (即 24 分钟), 一个极值中心在 $z = 1.5$ 公里, 最大下沉运动为 -6.5 米/秒, 另一极值中心在计算高度之外, 在 $z = 4.5$ 公里下沉运动, 为 -16.2 米/秒 (图 1c)。

3. 径向风速

i) 最大径向风速出现在对称轴附近。在 $t' \leq 0.5$ 时, 地面径向风速最大, 且随高度迅速递减。在 $z = 0.5-1.0$ 公里间有一“另点”(径向风速变号高度), 且随时间向上移动。“另点”之下为向轴心的径向风, 之上反之 (图 3a—d)。

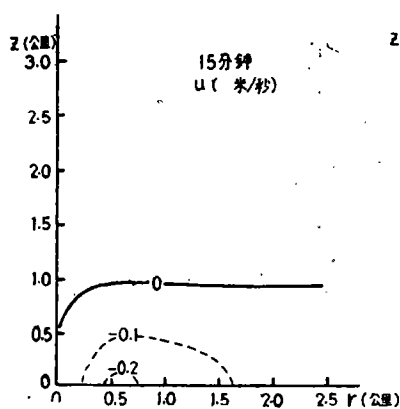


图 3a

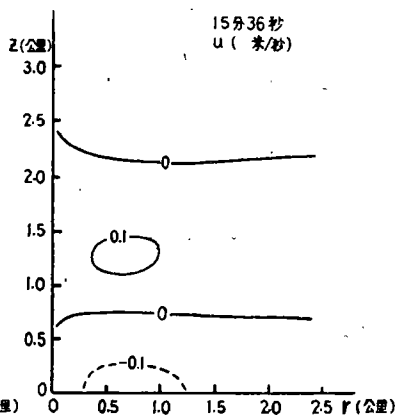


图 3b

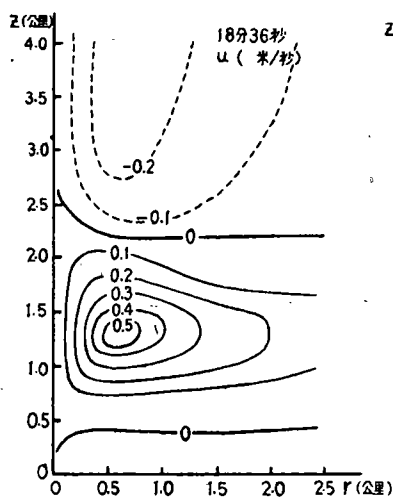


图 3c

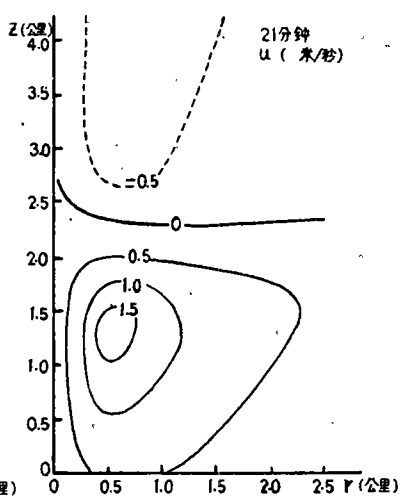


图 3d

ii) $t' = 0.52$, 出现二个“另点”, 一个在 $z = 0.5-1.0$ 公里之间, 另一个在 $z = 2.0-2.5$ 公里之间. 二“另点”之间的径向风为由轴向外吹. $t' = 0.52-0.65$, 二“另点”作振动下压. 最大径向风速出现在 $z = 1.5$ 公里, 且风速随时间增大.

iii) $t' = 0.65-0.7$, 低层“另点”消失, 地面风向有 180° 转变, 风速急增, 最大径向风速仍在 $z = 1.5$ 公里左右. $t' = 0.8$, $z = 1.5$ 公里, 最大径向风速达 11 米/秒.

iv) $t' = 0.52-0.65$, 为对流(积云)由发展到开始完全崩溃的径向风速转变的“过渡阶段”.

4. 含水量

i) 最大含水量出现在对称轴上, 沿径向坐标向外递减. 在垂直方向有一极值点, 极值点随时间向上移动(图 1a, b). $t' = 0.65$, $z = 700$ 米, 最大含水量达 0.6 克/米³. 在极值点之上, 含水量迅速递减(图 1a, b).

- ii) 与垂直速度分布比较, 最大含水量区与最大上升运动区很吻合(图 1a, b).
 iii) $t' = 0.4$ 以后, 最大含水量值增长较快. $t' = 0.7$, 含水量迅速消失.

5. 对 流 云

我们取 0.1 克/米³ 等含水量线作为对流云边界, 且假定云底高为 400 米, 由图 4a—d 可见, 对流云消散过程是很快的. 由表 1, 计算得到最大云顶高度为 2050 米, 最大云厚为 1650 米, 云顶平均上升速度为 6.6 米/秒. 这样大小的云体在 $1-2$ 分钟内即可崩溃, 在崩溃之前, 云顶有一次突然的上升, 随后云顶上升速度迅速递减. 这些现象是与观测事实符合的^[2].

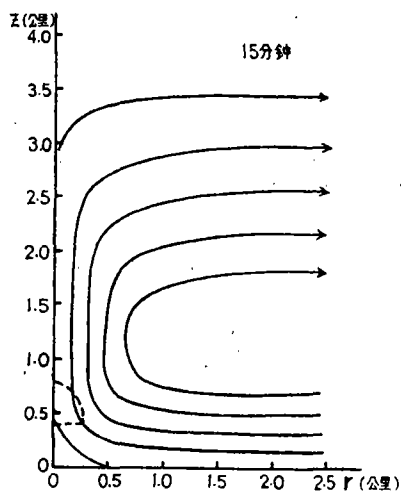


图 4a

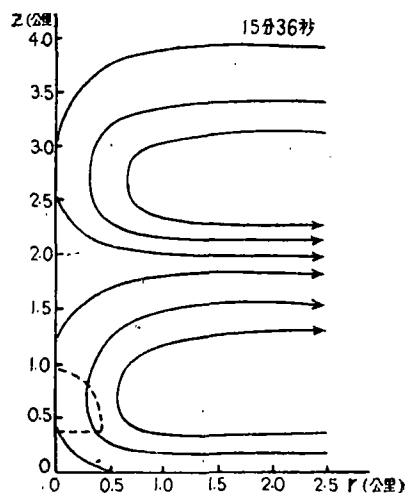


图 4b

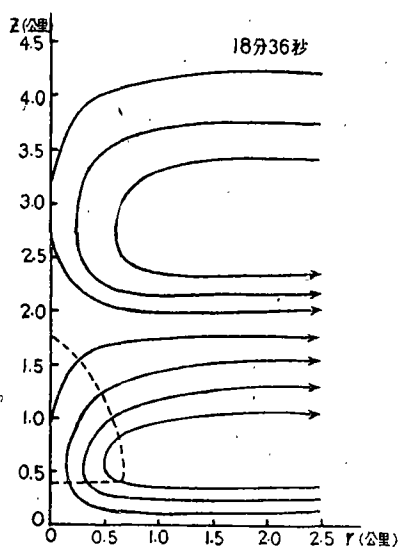


图 4c

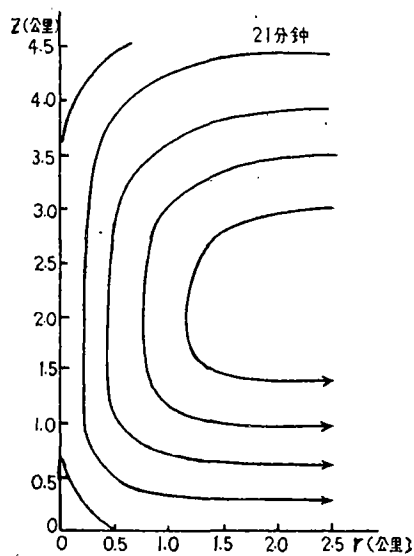


图 4d

表 1
(云底高度为 400 米)

时 間	云 頂 高 度 h (米)	云 厚 H (米)	云頂上升速度 V (米/秒)
15 分 00 秒	700	300	4.2
15 分 36 秒	850	450	2.7
18 分 00 秒	1250	850	13.9
18 分 36 秒	1750	1350	5.6
19 分 30 秒	2050	1650	
共 4 分 30 秒	$h_{\max} = 2050$	$H_{\max} = 1650$	$\bar{V} = 6.6$

四、結 論

根据以上計算結果,对流(积云)消散是很快的,积云崩潰是由云頂开始的,这与大气中常被观测到的一类积云是一致的。虽然对流(积云)由发展到崩潰进行得很快,但其“过渡阶段”是明显存在的。由上文的结果看来,下沉运动对促使积云的崩潰显然是起着非常主要的作用。

在計算結果中,各种要素的剧烈迅速变化,其中运动本身的非綫性和大气层結的不稳定是起着重要作用。

致谢: 作者对顾霞潮、叶篤正两位先生所給予的热忱鼓励与指导以及与巢紀平同志的有益討論表示感謝。

参 考 文 献

- [1] Reynolds, G. W., *Met. Magazine*, Vol. 88, 1959, 144—145.
- [2] Шишкин, Н. С., 1956 *Труды ГГО*, 63, 1956, 3—31.
- [3] Шишкин, Н. С., *Труды ГГО*, 102, 1960, 49.
- [4] Malkus, J. S., *J. Met.* Part I. V. 10, 1953, 30—41.
- [5] Malkus, J. S., *J. Met.* Part 2. V. 10, 1953, 105—120.
- [6] Malkus, J. S., and G. Witt, in *The atmosphere and sea in motion* 1959, 425—439.
- [7] Гутман, Л. Н., *Док. АН СССР*, т. 112 № 6, 1957, 1033—1036.
- [8] Гутман, Л. Н., *Изв. АН СССР*, № 7, 1961, 1040—1057.
- [9] 巢紀平, 层結大气中热对流发展的一个非綫性分析, *气象学报*, 31 (1961), 191—204.
- [10] Haltiner, G. J., *Tellus*, V. 11, 1959, 4—15.
- [11] Stommel, H., *J. Meteor.* V. 4, 1947, 91—94.
- [12] Мхитарян, А. М., *Док. Армянской ССР*, 19 (2) 1954 33—40.
- [13] Зейтунян, Х. Н., *Док. АН СССР*, т. 133. 1960, 1319—1322.

A NON-LINEAR THEORY OF THE DECAY OF THERMAL CONVECTION

HU KWANG-SHING

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

By the method suggested by Dorodnitsyn a solution of the simultaneous non-linear differential equations for the thermal convection are obtained. The rapid dissipation of cumulus is investigated. The cumulus dissipation starts from the cloud top and propagates rapidly downward. In this case the effects of non-linearity and unstable stratification are important. It is pointed out that the downdraft is a chief feature in the cumulus dissipation.