

## 正压模式中系统移动速度问题的研究\*

刘瑞芝 赵明哲

(中国科学院地球物理研究所)

### 提 要

本文应用考虑大气整层辐散作用的正压涡度方程,在快速电子计算机上对一个移动性系统的流型进行数值预报。结果发现系统移动速度偏慢,这种偏慢现象和正压模式所取的平均高度以及考虑控制超长波后退的方法有关。最后提出了一种经验的改进方案。

### 一、前 言

长波移动动力学机制的发现<sup>[1]</sup>,使得天气系统移动的预报问题得到了本质上的改进。在大型电子计算机制成以后,人们得以利用简单的正压模式有效地作出系统移动的数值预报。但从过去不同地区的试验结果<sup>[2,3]</sup>可以发现关于正压模式中的系统移动还存在着不少的问题。对于实际业务工作来说,系统位移的正确预报显然是首要的任务。因此,对这样问题的研究是迫切的。本文拟由个例预报结果对系统移动问题进行一些简单的分析,提出一种改进方案以供业务部门参考。

### 二、预报方程和计算模式

根据近代天气学的实践和理论,我们知道大型流场的演变可以用涡度方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(f + \zeta) = -f \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1)$$

来描写。考虑大型水平运动的正压性,可以认为大气有一平均等压面层  $p'$ ,在这层上的辐散相当整层大气的辐散作用,而后者和此平均层上的高度倾向有线性关系<sup>[4]</sup>即

$$-f \nabla \cdot \mathbf{V}' = \alpha \frac{\partial z'}{\partial t} \quad (2)$$

同时,平均层上的大气运动接近于地转近似,由此,可将(1)式转化为仅含一个未知函数  $z'$  (平均层上的高度)的预报方程,即

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial z'}{\partial t} = J \left( \frac{gm^2}{f} \nabla^2 z' + f, z' \right), \quad (3)$$

其中  $\lambda^2 = \frac{f}{m^2 g} \alpha$ ,  $\nabla^2$  为直角坐标中拉普拉斯算子,  $m$  为地图投影放大系数,符号

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$$

方程(3)式中各项以下列差分式来代替

\* 本文1962年1月18日收到。

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{1}{d^2} \left[ \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i-1,j} + \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i+1,j} + \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i,j+1} + \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i,j-1} - (4 + \lambda^2 d^2) \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)_{i,j} \right],$$

$$J(\eta, z)_{i,j} = \frac{1}{4d^2} [(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})(z_{i,j+1} - z_{i,j-1}) - (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(z_{i+1,j} - z_{i-1,j})],$$

$$\nabla^2 z_{i,j} = \frac{1}{2d^2} [z_{i+1,j-1} + z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j-1} + z_{i+1,j+1} - 4z_{i,j}],$$

其中  $i, j$  为正方形差分网格点的序号。

在一般情况下平均层取为 500 毫巴。若已知 500 毫巴的初始高度场分布, 采用李布曼(Liebmann)逐次迭代法求解以差分变换后的(3)式, 可得 500 毫巴高度倾向分布, 再根据  $\frac{\partial z}{\partial t}$  分布, 按对时间的差分式

$$z^{t+\Delta t} = z^{t-n\Delta t} + m \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^t \Delta t, \quad (4)$$

当  $t = t_0$  时,  $n = 0, m = 1,$

当  $t > t_0$  时,  $n = 1, m = 2,$

可得下一时间步长的  $z'$  场。連續循环求解(3)和(4)式, 即可得到 500 毫巴的预报场。

我們采用以北极为中心, 南至北緯  $30^\circ$  附近、边界为八角形的正方形网格。网格距 ( $d$ ) 取 585.78 公里 (共 1004 个网格点), 时间步长  $\Delta t$  取为 1 小时。公式(3)中  $m, f$  均为緯度的函数, 可按以下公式計算。

$$f = 2\pi \frac{1 - r^2}{1 + r^2},$$

$$m = 1 + r^2,$$

$$r^2 = \left( \frac{d}{2R} \right)^2 [(i - i_0)^2 + (j - j_0)^2],$$

其中  $i_0, j_0$  为北极点坐标,  $R$  为地球半径。

在边界上我們取如下条件,  $\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{A_{ij}} = \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{B_{ij}} = 0, A_{ij}, B_{ij}$  代表网格边界上第一、二圈序号, 为了消除由于計算誤差引起的不穩定, 我們每隔三个时间步长对高度场进行一次平滑。所用的平滑公式如下:

$$z'_{ij} = (1 - 4k)z_{i,j} + k(z_{i,j+1} + z_{i,j-1} + z_{i+1,j} + z_{i-1,j}),$$

上式中  $k$  取 9/800。

### 三、一个移动性系統流型的预报結果

我們使用此方案对三个实例 (1957 年 1 月 9 日, 1958 年 1 月 9 日, 1957 年 1 月 27 日) 进行了計算。結果表明, 对新生系統不能报出, 对于移动性系統可以較正确的报出其方向, 但移动的速度往往比实况慢。应用相似的模式所作的其它的一些計算例子也有相同的現象。为了研究系統移动的预报問題, 我們將 1957 年 1 月 9 日的预报結果进行一些分析。

图 1 a—d 是 1957 年 1 月 9—12 日的 500 毫巴实况图, 在这一时期中, 太平洋东部有一发展很强的高压脊, 美洲为一深厚的大低压所盘踞, 这两个系统是准静止性的超长波系统。从大西洋向东到太平洋的西部, 整个区域的环流是纬向的。上面迭加着四个系统, 其中第一个系统是大西洋的高压脊, 在东移过程中逐渐加强。到 12 日已经发展成为一个较强的阻塞高压, 在它东侧的低压槽也在东移过程中加深。第二个系统是乌拉尔山的波动, 它在东移的过程中减弱消失。第三个系统是贝加尔湖区的低槽, 它在东移的过程中也有加强, 到 12 日成为东亚海岸的一个主槽。影响我国这一时期的天气发展主要是这个系统的活动。这几个系统都是很明显的移动性系统, 因此以这个例子研究系统移动问题是适宜的。

图 2 a—c 各为以 9 日作初始场的 24、48、72 小时预报图, 在实况变化中, 美洲大陆低压中心在 24 小时中在原地维持, 在 48 小时以至 72 小时中略微东移, 而预报结果略有退后现象(24 小时后退了 3 个经度, 而 72 小时后退了约 17 个经度)。

两大洋上的高压脊的实况变化是在逐渐加强。预报结果虽然反映了这一趋势, 但强度不够, 其中大西洋高压脊在东移过程中最后发展为闭合的阻塞高压。这一点, 在预报图上完全没有反映出来。

分布在欧亚大陆上的三个低压槽, 三天内均在东移。乌拉尔区的低压槽在 24 小时内东移了 10 个经度左右, 以后逐渐削弱、消失。24 小时预报结果该槽只东移了 4 个经度, 比实况慢 6 个经度左右。这个槽的减弱、消失和环流变平在以后的预报图上基本上能反映出来。欧洲西岸的主槽东移较快, 24 小时大约前进了 24 个经度, 预报的移动速度也相当地快, 但比实况仍落后了 10 个经度。中心强度则没有变化。48 小时预报的系统移动的速度与实况较为一致。但由于 48 小时预报是在 24 小时预报基础上进行的, 因此前 24 小时系统移动的落后误差仍反映在 48 小时预报图上。贝加尔湖以西的槽 24 小时东移了 16 个经度, 48 小时移到日本海, 且强度有显著加深, 成为东亚大槽, 72 小时东移到大洋上。预报的速度落后于实况。24 小时预报之槽东移了 9 个经度, 差不多为实况的一半。槽的北部落后现象更为显著, 在 48 小时预报图上继续有落后现象。总的说来, 从这一实况中, 我们看到关于系统移动速度的预报存在着两个主要的问题:

- (1) 对于移动性系统预报偏慢, 在东亚尤为显著;
- (2) 对于准静止性的超长波系统预报后退, 我们在下一节将对这两个问题略加讨论。

#### 四、问题的讨论

关于预报系统移动偏慢的原因可能很多。从模式所作的简化来看, 可能包括下列一些问题:

正压模式反映气压场的演变是靠一个平均层的涡度平流作用和大气整层辐散作用, 因此利用 (3) 式预报系统移动速度较慢的现象可能是由于 500 毫巴和正压假定所要求的平均层并不一致。在涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta = -f \operatorname{div} \mathbf{V}$$

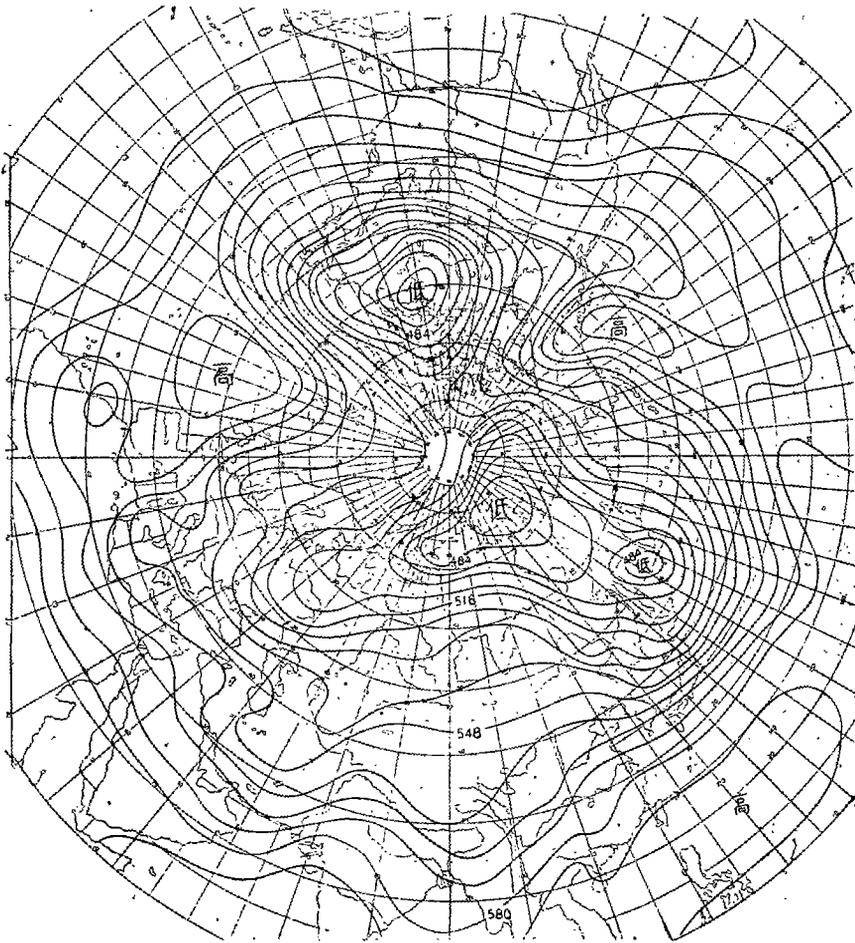


图1: 1957年1月9日500毫巴实况图

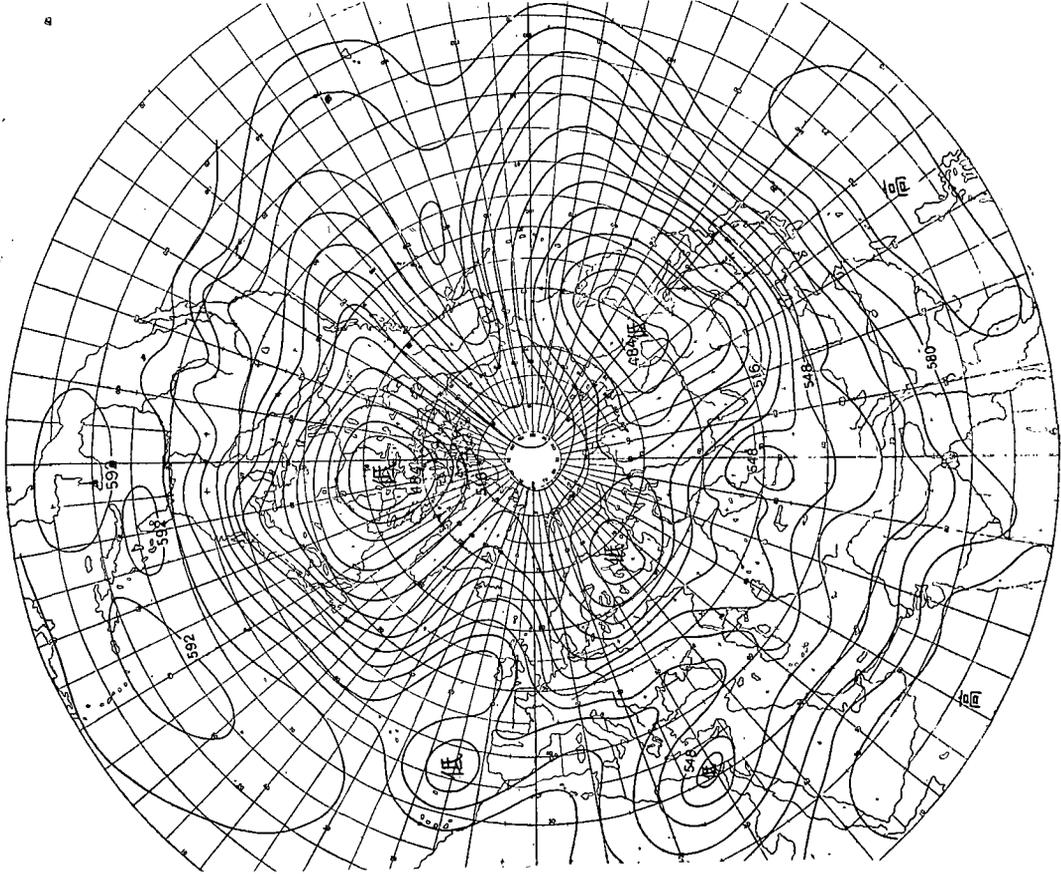


图 1b 1957 年 1 月 10 日 500 毫巴实况图

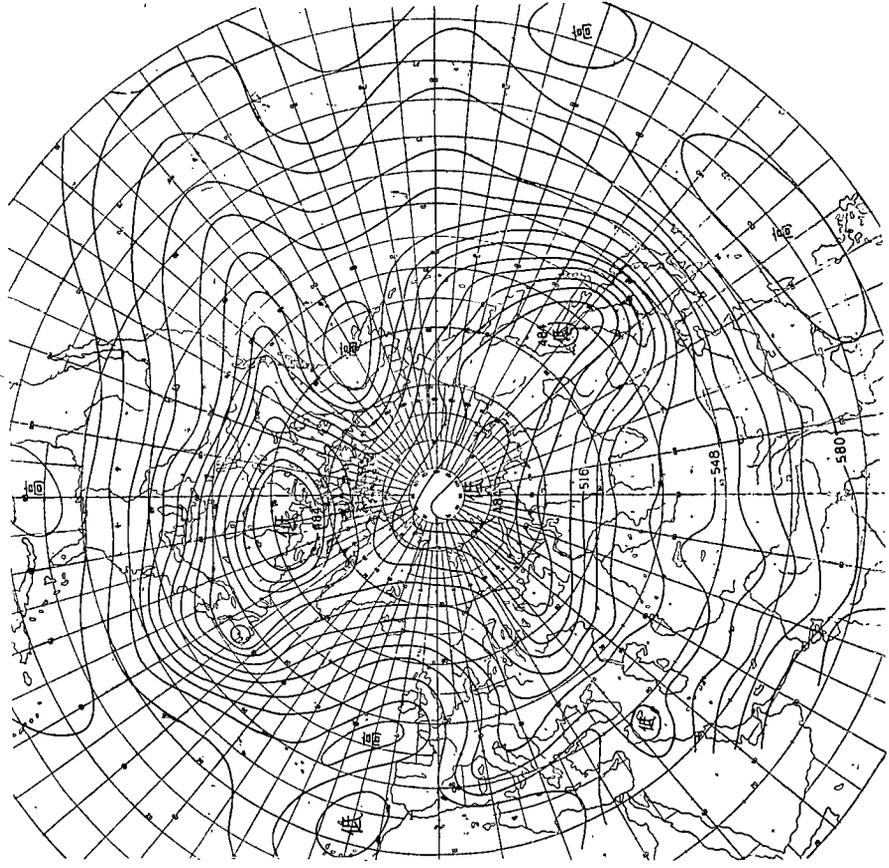


图 1c 1957 年 1 月 11 日 500 毫巴实况图

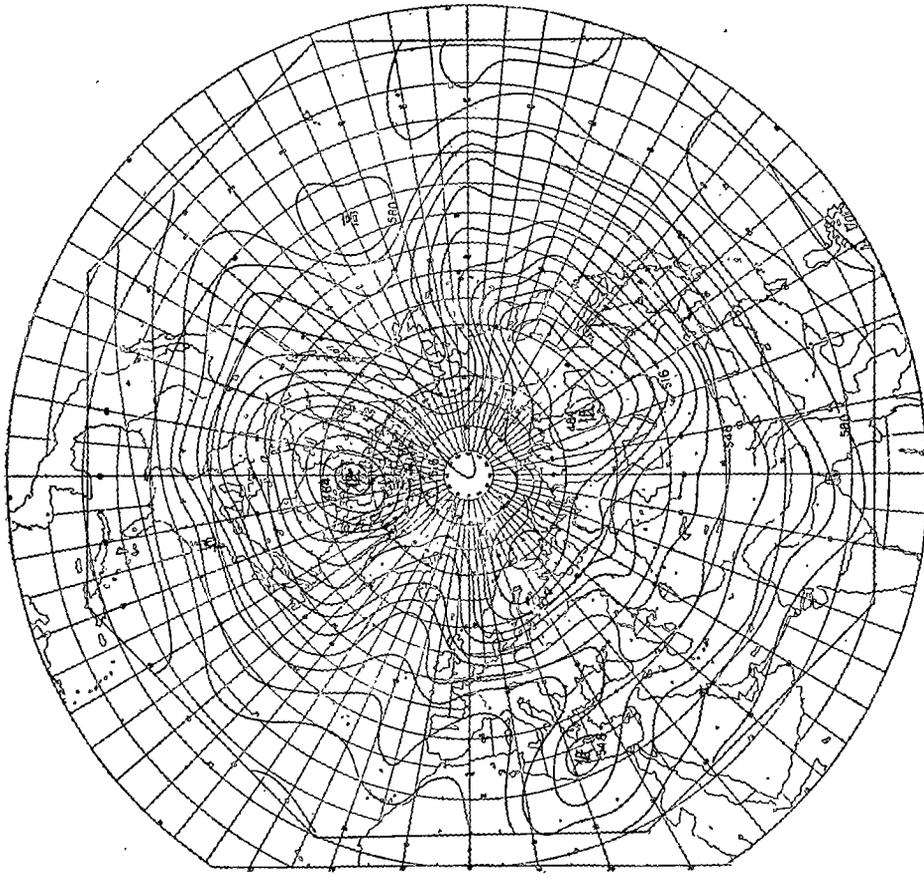


图 2a 24 小时预报图

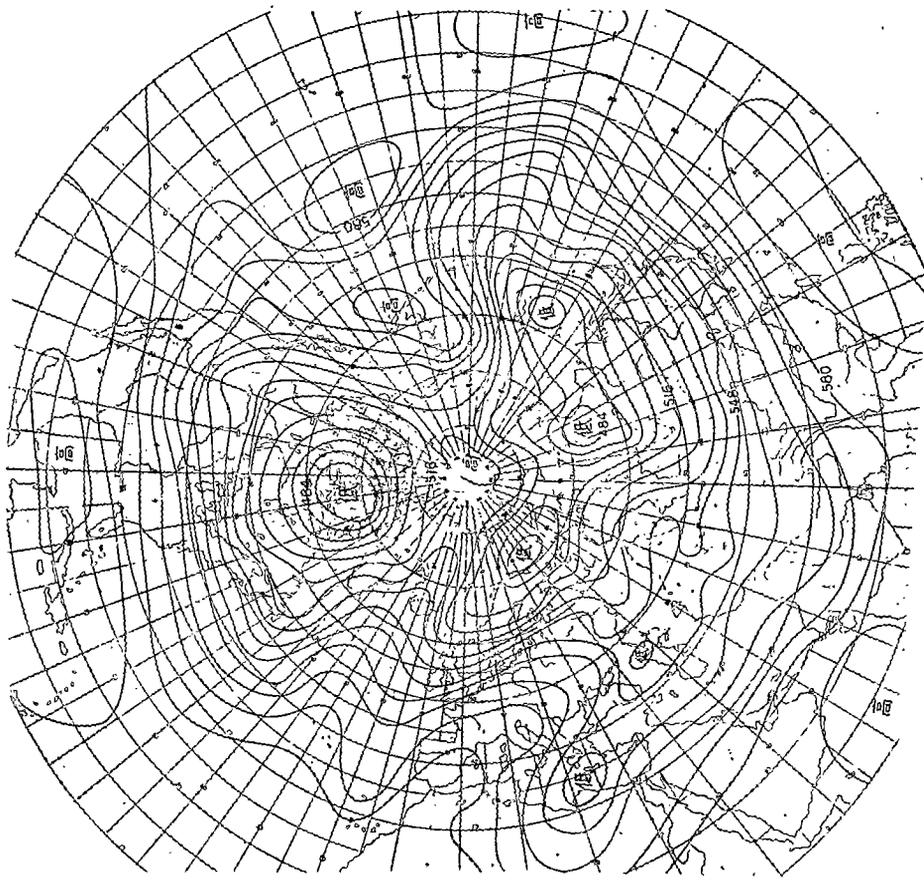


图 1d 1957 年 1 月 12 日 500 毫巴实况图

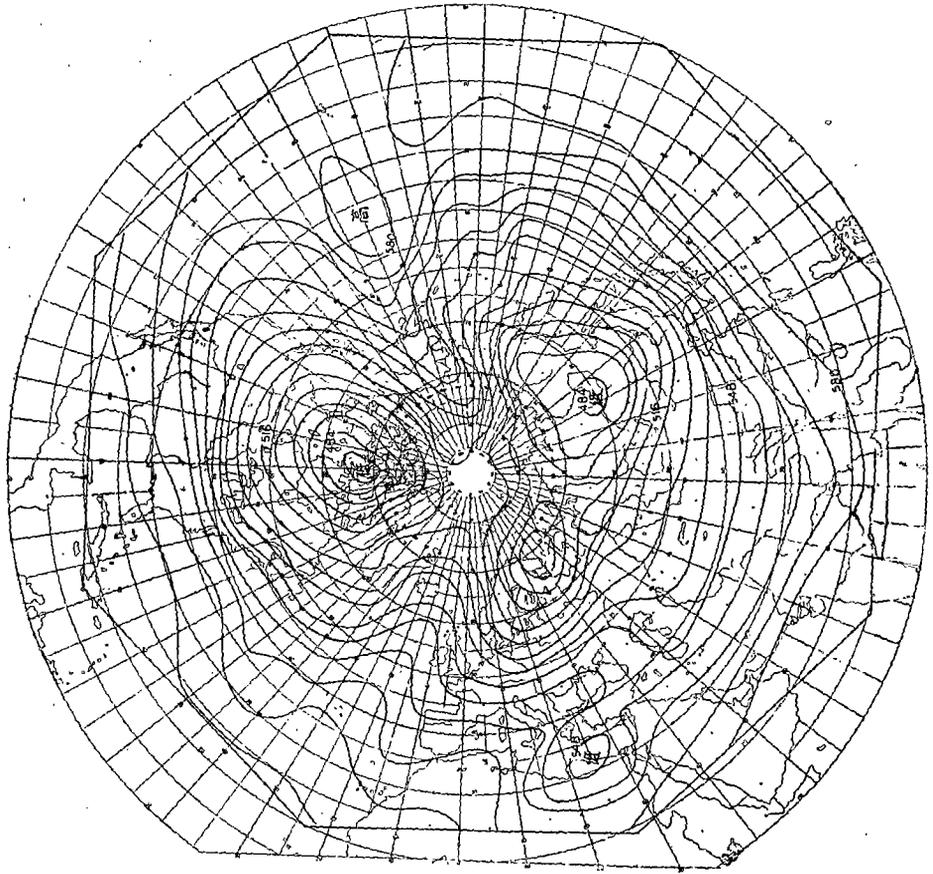


图2b 48小时预报图

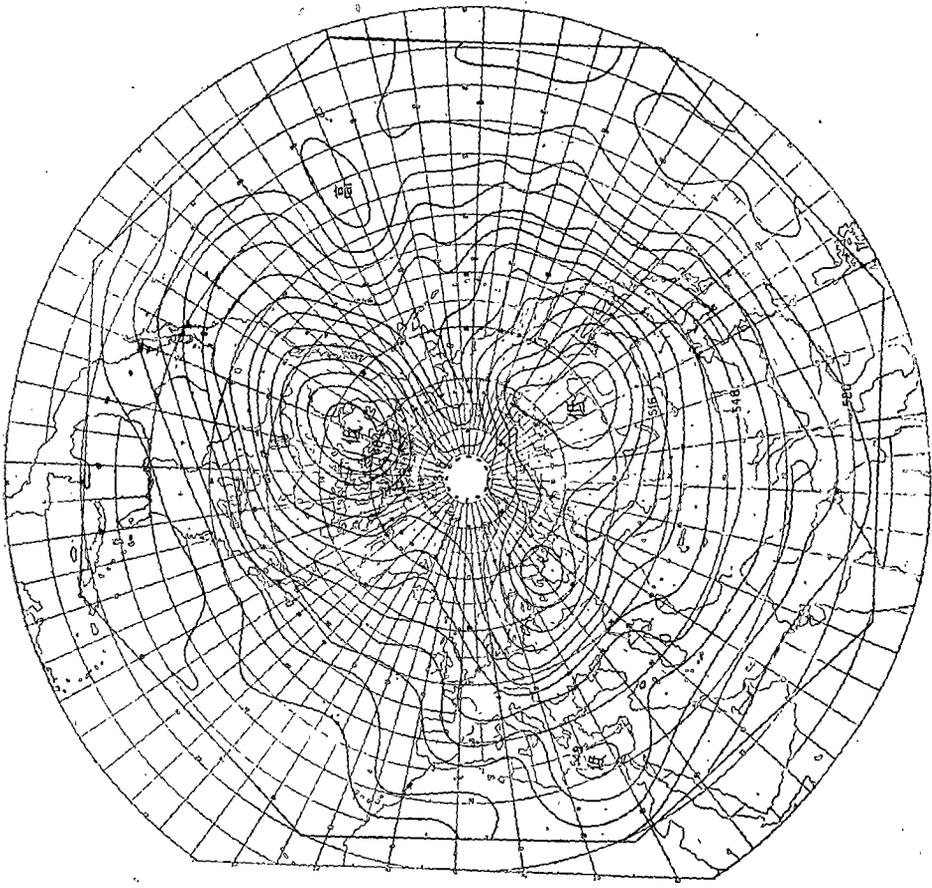


图2c 72小时预报图

中引入风随高度变化的假定关系  $\mathbf{V} = A(p)\mathbf{V}'$ , 其中  $\mathbf{V}'$  为 500 毫巴图上的风速. 对涡度方程由  $p = p_0$  到  $p = 0$  进行积分, 则得

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\frac{\bar{A}^2}{A} \mathbf{V}' \cdot \nabla \zeta' - \mathbf{V}' \cdot \nabla f - f \operatorname{div} \mathbf{V}', \quad (7)$$

其中  $\bar{A} = \frac{1}{p_0 - p_0} \int_{p_0}^0 A(p) dp$ . (7) 式两边乘以  $\frac{\bar{A}^2}{A}$ , 并取  $A(p^*) = \frac{\bar{A}^2}{A}$ , 则得

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = -\mathbf{V}^* \cdot \nabla (\zeta^* + f) - f \operatorname{div} \mathbf{V}^*. \quad (8)$$

由(8)式很清楚的看出, 一层模式(3)是适用于  $p^*$  层, 而不是 500 毫巴. 为了求出  $p^*$  的所在高度, 我们在欧洲及亚洲地区各选三个测站, 以 1957 年 1 月 10 日 02 点探空资料 (因 1957 年 1 月 9 日 15 点探空资料不全), 计算  $\frac{\bar{A}^2}{A}$  及  $p^*$  值, 计算结果列于表 1. 可以看出在

表 1 1957 年 1 月 10 日 00 点 (世界时)  
欧亚数个测站的  $u$ ,  $A(p^*)$  及  $p^*$  值

站号	P (毫巴)											$A(p^*)$	$p^*$ (毫巴)
	100	200	300	400	500	600	700	800	850	900	1000		
03,744	22	24	45	39	27	23	18	12	8	5	0	1.1	450
10,633	18	24	28	34	26	19	14	11	9	7	2	0.9	525
16,080	30	27	28	25	28.2	24.0	6.6	4.0	3.5	3.0	0	1.2	500
30,710		28	25	19	13	16	18	15	12.5			1.6	380
47,108		29	22	14.5	13	11	9	6	5	3	-2	1.3	350
31,735	45	33	28	23.5	20.0	16.0	13.0	12.7	12.5			1.5	270

欧洲  $\frac{\bar{A}^2}{A}$  接近于 1, 也就是  $p^*$  接近于 500 毫巴, 在亚洲  $\frac{\bar{A}^2}{A}$  均大于 1 (约为 1.5 左右),  $p^*$  应在 300 毫巴附近. 这可能由于在亚洲地区地面海拔较高的影响, 所以在东亚范围内我们所采用的一层模式应该用于高于 500 毫巴的等压面. 因此要改进系统移动的预报有两个途径: 一是在(7)式中引用(2)式和地转关系; 把相对涡度平流加以合理订正, 或是将(3)式用于 300 毫巴上做预报.

用(7)式作预报可以改进系统移动速度, 由线性化后的(7)式得到波速公式

$$C = \frac{A(p^*)u - \frac{\beta}{m^2 + n^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{m^2 + n^2}}, \quad (9)$$

其中  $m, n$  为东西和南北向的波数.

从上式可以看出, 在改变相对涡度平流  $A^*$  倍后, 在波速公式中相当于使西风风速  $u$  增加  $A^*$  倍而与  $\beta$  项无关, 这样当  $A^* > 1$  时, 一方面可以使短波移动速度增加, 另一方面, 不但可以减少超长波的后退, 甚至可以使超长波东移. 这是仅考虑  $\lambda^2$  项以控制超长波后退所不能获得的.

以上是从线性分析所得的结论, 下面我们从事非线性关系来看(7)式的效果. 同样由图

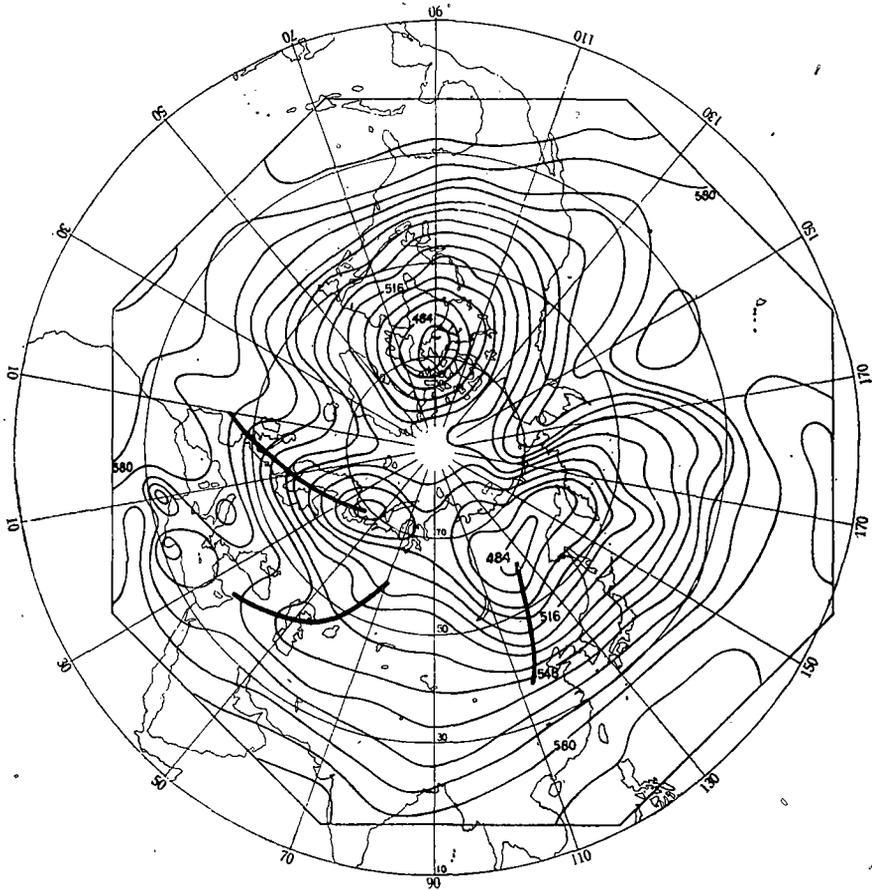


图3 1957年1月9日500毫巴24小时预报图

1a 作初始場,用(7)式进行24小时预报計算,根据表1我們取  $\frac{\bar{A}^2}{A} = 1.5$ ,計算結果見图3. 为了更清楚的比較不同方案的效果,我們作出图4来比較槽綫的位置,并給出表2表示

表2 预报系統移动速度与实际速度比值  
(V为预报速度, V'为实际速度)

$V/V'$	不考虑 $\lambda^2$ 項 500 毫巴预报	考虑 $\lambda^2$ 項 500 毫巴预报	修改相对涡度平流系 数項, 500 毫巴预报	300 毫巴预报
东亚槽(北緯 50°)	1/2	1/2 弱	1	1
烏拉尔槽(北緯 50°)	3/5	1/3	4/5	1/2
欧洲槽(北緯 60°)	7/8	5/8	7/8 弱	3/4

预报速度和实况速度的比值。我們可以清楚的看到预报的系統移动的速度有显著的改进,尤其是亚洲槽的24小时预报位置与实况很接近。 $\frac{V'}{V}$  接近于1。然而槽綫北部略慢于实况,南部則比实况稍快,这可能是由于实况的北部为急流区,西风风速強, $\frac{\bar{A}^2}{A}$  取为1.5 尚

嫌不足,而在南部又嫌有余. 欧洲槽在(7)式计算结果中亦有较大改进,但仍落后于实况,从温压场结构来看,这里斜压作用较明显,可能影响这个槽的发展,看来这不是修改一层模式所能完全改善的.

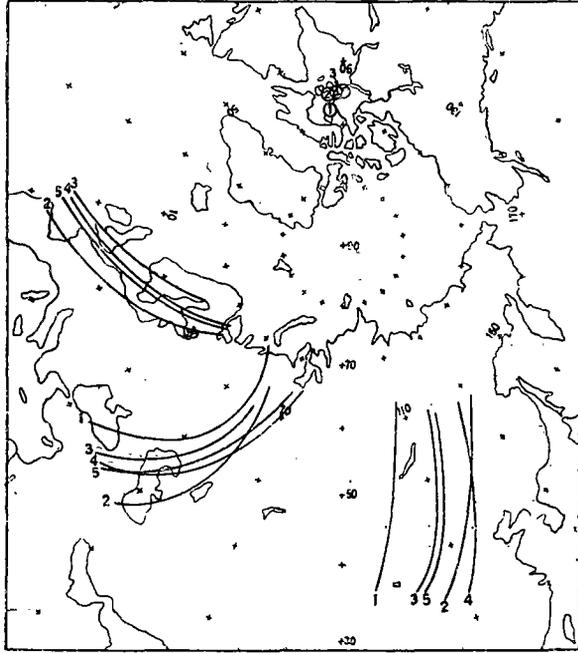


图 4 24 小时正压预报的槽线分布综合图

以 300 毫巴作为平均层对同一例子又进行计算,结果见图 5,再参看图 4 及表 2,亚洲槽的移动速度大有改进,与实况相合,欧洲槽改进不大,乌拉尔槽移动速度改进更小.从这个例子看来,采用 300 毫巴等压面作为平均层并不理想,而采用 500 毫巴作平均层,同时在计算公式上加以订正较为优越.

为了进一步分析超长波的后退及其影响问题,我们把 9 日和 10 日实况以及三种预报方案在北纬  $50^\circ$  上的高度进行谐波分析.按照下式进行的头 7 个波的正弦和余弦的振幅.

$$z(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^7 [a_m \cos mx + b_m \sin mx],$$

其中  $x$  表示经度,由  $a_m$  和  $b_m$  计算波幅  $A_m$  和相角  $\phi$ ,得

$$z(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^7 A_m \cos(mx - \phi).$$

图 6 自上而下表示总的扰动成分超长波分量  $m = 1, 2, 3$  的合成波及长波分量  $m = 4, 5, 6, 7$  的合成结果,略掉了  $\frac{a_0}{2}$ . 我们可以看到下列几点可注意的事实:

(1) 对于美洲的准静止大低压预报后退主要是由于超长波分量报得后退的关系.考虑整层辐散作用后,使得预报结果得到改善也主要是由于超长波的后退速度减慢了.

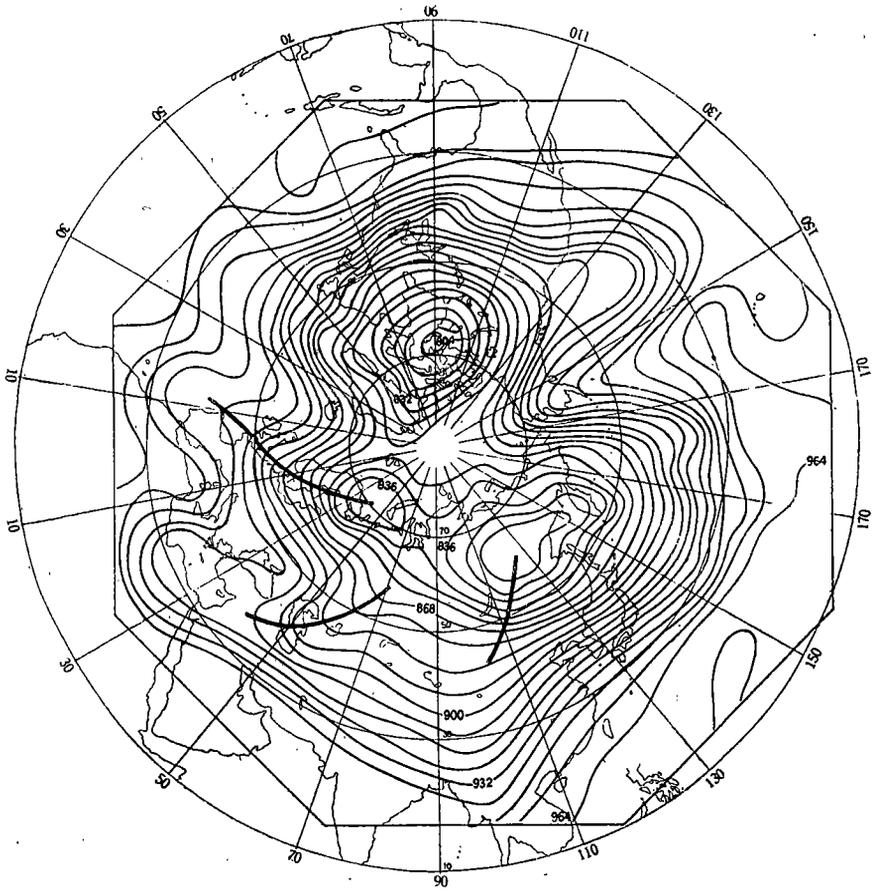


图5 1957年1月9日300毫巴高度场24小时预报结果

(2) 欧亚几个长波系统移动偏慢，是由于超长波分量报得后退和长波分量前进不够的总合，也就是说超长波分量的后退对长波系统东移偏慢发生一定影响。

(3) 考虑整层辐散的因子  $\lambda^2$  后，可使超长波后退减慢，但同时使得长波部分的前进速度也减慢了。把相对涡度平流乘以系数  $A^*$  以后，既可减慢超长波后退，又增加了长波分量的前进。

从以上事实可以看到，超长波分量的移动报得不好时，不但影响准静止性大系统的位置，并且会通过非线性制约引起后者报得也不好。利用考虑整层辐散作用可以改进超长波的位移，但这个方法同时对长波位移的预报发生不良的影响，这影响还可

表3 变高中心数值 (单位: 十米/日)

	西 欧	中国东北	白 令 海	北美西岸	北美东岸	大 西 洋	冰岛东南
实 况	-28	-18	-29	-21	22	-15	31
考虑整层辐散模式	-21	-12	-17	-8	15	-10	17
无 辐 散 模 式	-29	-15	-18	-13	21	-10	19

以从另一方面表示出来。表 3 为实况变高与预报变高中心数值的比较。可以看出，考虑整层辐散作用的模式比无辐散模式所求得变高偏小，因为(3)式的解可近似的表成

$$\frac{\partial z'}{\partial t} \approx - \frac{J}{m^2 + n^2 + \lambda^2} \quad (10)$$

由此看出， $\lambda^2$  必然使变高减小，另一方面从波速公式(9)可以看到系数  $A^*$  的引入虽然改进系统移动速度，但与波长无关。它对任何系统具有同样的影响。因此仍需考虑  $\lambda^2$  项来

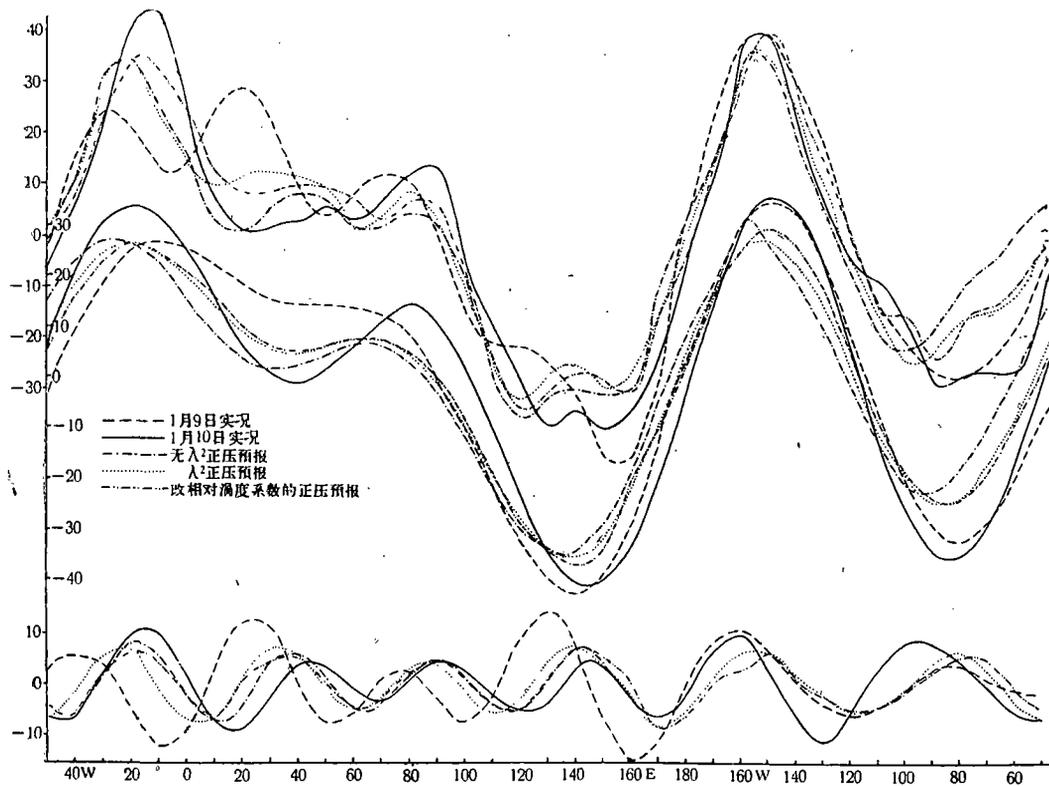


图 6 沿北纬 50 度的高度场谱分析图

控制超长波的移动。为了同时又能消除  $\lambda^2$  对变高强度所引起的不良影响，我们建议在绝对涡度平流项引入经验的订正系数  $B$ 。最后的预报方程则变为：

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial z'}{\partial t} = -BJ(A^* \zeta' + f, z'). \quad (11)$$

这样

$$\frac{\partial z'}{\partial t} \approx - \frac{BJ}{m^2 + n^2 + \lambda^2},$$

而此时波速公式为

$$C = B \frac{A^* u - \frac{\beta}{m^2 + n^2}}{1 + \frac{\lambda^2}{m^2 + n^2}}, \quad (12)$$

$B$ ,  $A^*$  及  $\lambda^2$  值可以由多次试验中适当确定。显然这些经验常数是与大气的过程类型有关，并非定不变的，需要进一步从天气学分析和日常数值预报工作中总结出来。

致謝：本工作是在朱抱真先生指导下及紀立人同志參加討論之下進行的，計算程序是在中國科學院計算所協助下完成的，作者在此深表謝意。

### 参 考 文 献

- {1} Rossby, C. G., Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and displacement of semi-permanent centers of action. *J. of Marine. Res.* 2, 38—55, 1939.
- {2} Charney, J. G., Fjörtoft, R., von Neumann, J., Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 237—254, 1950.
- {3} Walff, P. M., The error in numerical forecasts due to retrogression of ultralong waves. *M. W. R.*, 245—250, 1958.
- {4} Wiin-Nielson, A., On barotropic and baroclinic models with special emphasis on ultralong waves. *M. W. R.*, 171—183, 1959.

## A STUDY ON THE SPEED OF MOVEMENT OF THE PRESSURE SYSTEMS IN BAROTROPIC MODEL

LIU RUEY-CHIH, CHAO MING-TZE

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

The divergent barotropic vorticity equation has been used in the 500 mb forecasts for Eurasia. The result shows that the movement of pressure systems obtained from this model is slower than that of actual case. It is estimated that this phenomenon is firstly due to the unsuitable choice of the mean level adopted in this barotropic model, and secondly due to the effect of the factor which controls westward movement of the ultralong waves. Finally an improved barotropic model is proposed.