第32卷 第2期 气象学报 Vol. 32, No. 2
1962年6月 ACTA METEOROLOGICA SINICA June, 1962

云和雨的相干散射与雷达气象方程*

李 其 琛
(北京大学地球物理系)

提 要

研究了云雨质点对雷达波的相干散射，从而推得比較普遍的雷达气象方程. 旧的雷达气象方程是新方程在云雨质点互相独立时的特殊表現形式. 对新方程作了一些討論，发現旧方程之所以在某些方面与实验不符，可能是因为忽略了相干散射作用的緣故.

一、前 言

雷达是近代气象学的重要工具之一，它在降水天气系統的观测、云雾物理研究等方面正起着越来越重要的作用. 雷达气象学目前已发展成了近代气象学中的一个独立学科.

雷达气象方程是雷达气象学的理論基础，它将云雾降水的物理特性与雷达回波的強度联系了起来，使我們有可能通过回波的测定而推知云雾降水的物理特性.

目前广泛应用的雷达气象方程取下列形式[1]:

$$\bar{P}_r = \frac{P_2 A_p^2 \cdot \theta \cdot \Phi \cdot \tau \cdot c}{72\lambda^2 R^2} \sigma \bar{n}, \tag{1}$$

式中 $\bar{P}_r$ 是回波的平均功率，P_t, A_p, λ, θ, Φ, τ, c 分别是雷达的发射功率、天綫截面、发射波长、垂直张角、水平张角、脉冲持續时間、光速，σ 和 $\bar{n}$ 分别是散射質点的雷达截面和平均数密度，R 是构成回波 $\bar{P}_r$ 的散射質点离雷达的平均距离.

本文要研究的是 $\bar{P}_r$ 与散射質点数的关系. 为方便起見，将(1)式簡写为:

$$\bar{P}_r = C \cdot \sigma \cdot N, \tag{1'}$$

式中 C 是由雷达参数以及距离 R 决定的系数，N 是构成回波 $\bar{P}_r$ 的散射質点总数.

推导方程(1)时，有一个很重要的假設[2]，卽認为散射質点是互相独立的，它們发出的散射波沒有固定的相角关系，不互相干涉. 所以方程(1)只有在独立散射(或称不相干散射)的条件得到满足时，才能准确成立.

因为方程(1)非常重要，所以曾有不少工作者試图通过实驗来驗明它的正确性. 达到这个目的的途径之一是在同一个时刻直接对回波功率、雷达参数以及雨滴譜作准确测量，这样就可以驗明(1)式是否准确成立. 目前，在这方面还沒有得到令人滿意的結果，主要困难是在于很难在测定回波的同时，直接测出构成回波的那块云雨的滴譜. 检驗方程(1)的另一途径是同时用几种波长的雷达作测量，由(1')可知比值 $\frac{C(\lambda_1)}{C(\lambda_2)} \times \frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma(\lambda_2)}$ 代表了 $\frac{\bar{P}_r(\lambda_1)}{\bar{P}_r(\lambda_2)}$ 的理論值，它可以准确决定，而 $\frac{\bar{P}_r(\lambda_1)}{\bar{P}_r(\lambda_2)}$ 又可以通过实驗测定，将二者进行比較就能够检驗

* 本文 1962 年 1 月 15 日收到.

方程(1)正确与否,这个方法是更現实可行的.

根据后一种想法, J. E. N. 霍泊 (Hooper) 和 A. A. 基帕赫 (Kippax)[3] 用三种波长的雷达做观測实驗,得到的結果如下:

	$\lambda_1 = 9.1$ 厘米 $\lambda_2 = 3.2$ 厘米	$\lambda_1 = 9.1$ 厘米 $\lambda_2 = 1.25$ 厘米
$\bar{p}_r(\lambda_1)/\bar{p}_r(\lambda_2)$ 理論值	-6.4 db	-3.4 db
$\bar{p}_r(\lambda_1)/\bar{p}_r(\lambda_2)$ 观測値	-6.0—-6.3 db	-2.3—-2.5 db

实驗表明: $\bar{P}_r$ 随 λ 的递減而增大的速度,比按方程(1)計算的为小. H. 戈尔德斯坦 (Goldstein)[2] 也曾指出同样的事实. 值得注意的是这个矛盾不可能解释为 $\frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma(\lambda_2)}$ 的計算中沒有考虑到可能存在的 Mie 散射效应,事实上若在計算中作了 Mie 效应的訂正[3],則理論値与实測值的差异将更大. 所以,这个矛盾只能解释为方程(1)不够准确.

另一方面, A. 尼尔宋 (Nelson) 在雨滴譜的測量中发現[4], 雨滴在空間上的分布并不是独立質点的泊松分布. 他发現, 雨滴具有聚合成羣的特性,羣的容积小于 1 公升(因受仪器分辨能力的限制,未能肯定比 1 公升小多少),每羣平均有几个雨滴,羣与羣間为較大的空隙所分开. A. 尼尔宋認为雨云之所以是这种結构, 可能是由于雨滴增长和破碎、湍流运动以及雨滴荷电等效应. 这个观測事实是很重要的, 成羣的雨滴相互間必定具有一定联系,它們不可能是完全互相独立的. 从云的情况来看也是这样,在云雾微結构的观測中很容易发現[5],云是一种类似于湍流統計理論所描述的那种湍块結构,这可能是由云中必然存在的湍流涡动所引起的. 同一湍块內的云滴也必定具有一定的联系. 由此可見, 推导雷达方程 (1) 时所作的散射質点互相独立的假設,可能与云雨的实际情况不尽相符,因而使方程(1)不能准确成立.

本文的目的就是試图考虑散射質点之間的关联,估計相干散射的作用,在这基础上推导比較普遍的雷达气象方程.

二、雨滴的相干散射

解决这个問題时,先以尼尔宋得到的关于陣雨微結构的观測事实为依据,合理地概括雨云的特性而得出如下模型: 1. 半个脉冲所占空間中的 N 个雨滴分成 m 羣 ($m \gg 1$), 其中第 l 个羣的尺度为 a_l, 該羣內有 n_l 个雨滴; 显然 $\sum_{l=1}^{m} n_l = N$; 2. 各雨滴羣彼此独立,羣在空間中作无規分布; 3. 同一羣中的雨滴具有相同的統計特性; 4. 全部雨滴具有相同的半径(計算中取它們的中值); 5. 雨滴坐标的变化是平稳随机过程.

N 个雨滴在天綫处构成的合成电場应为:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \frac{p}{\sqrt{4\pi}} \frac{E_0(R)}{R} e^{i\omega t} \sum_{i=1}^{N} e^{-\frac{4\pi}{\lambda} R_i}.$$

而回波平均功率 $\bar{P}_r$ 应为

$$\bar{p}_r = \frac{c}{4\pi}\langle EE^*\rangle = C\sigma\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-\frac{4\pi}{\lambda}(R_i-R_j)}\right\rangle$$
$$= C'\left[N + \left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} e^{-ig(R_i-R_j)}\right\rangle\right], \tag{2}$$

式中〈　〉号代表平均，$*$号代表共軛复数，$g = \frac{4\pi}{\lambda}$.

事实上方程(2)中的前一項代表了独立散射，而后一項代表了相干散射．因为質点互相独立时，$R_i - R_j$ 取各种值的几率相等，后一項应为零．

下面計算相干散射項．我們将属于同一羣的"質点对"的貢献和分属不同羣的"質点对"的貢献分开，于是就有：

$$\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq i}^{N} e^{-ig(R_i-R_j)}\right\rangle = \sum_{i=1}^{N}\left\langle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} e^{-ig(R_i-R_j)}\right\rangle$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\sum_{p=1}^{n_l}\left[\left\langle\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{n_l} e^{-ig(R_{l,p}-R_{l,s})}\right\rangle + \left\langle\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{m}\sum_{s=1}^{n_k} e^{-ig(R_{l,p}-R_{k,s})}\right\rangle\right], \tag{3}$$

式中 $R_{l,p}$，$R_{k,s}$ 等符号中的前一个下角是羣的序数，而后一个下角是雨滴在羣中的序数．

(3) 式中 [　] 号內的第二項代表了分属不同羣的"質点对"的貢献($k \neq l$)．这一項应該等于零，因为各个羣是互相独立的，它們在空間中作无規則分布，$(R_{l,p}-R_{k,s})_{l\neq k}$ 取各种值的几率相等．因此，問題只在于計算(3)式中前一項所代表的属于同一羣的"質点对"的貢献．

以函数 $W_l(y)$ 代表随机变量 $R_{l,p} - R_{l,s} = (\Delta_l R)_{p,s}$ 的分布密度．考虑到同一羣內各質点的統計特性相同，就有：

$$\left\langle\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{n_l} e^{-ig(R_{l,p}-R_{l,s})}\right\rangle = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{n_l}\langle e^{-ig(\Delta_l R)_{p,s}}\rangle$$
$$= (n_l - 1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-igy} W_l(y)\,dy. \tag{4}$$

为将(4)式算出，需要知道分布密度 $W_l(y)$ 的表达式．为此，我們考虑两种可能的情况：1)羣是圓柱形，其半径为 a；2)羣是球形，其半径为 a．无論羣取什么形状，都可以認为雨滴在羣內各点出现的几率处处相等．和这两种情况相应的分布密度 $W_l(y)$ 分別用符号 $W_l^{(1)}(y)$ 和 $W_l^{(2)}(y)$ 来表示．

1. 圓柱形的羣

以函数 $\eta_l^{(1)}(R - \bar{R}_l)$ 代表雨滴坐标取值 R 的分布密度，此处用 $\bar{R}_l$ 表示羣的中心的坐标(見图 1)，显然，

$$\begin{cases}\eta_l^{(1)}(R-\bar{R}_l) = \dfrac{1}{\pi a_l^2}\cdot\dfrac{dS(R)}{dR}\\ \qquad = \dfrac{2}{\pi a_l^2}\sqrt{a_l^2-(R-\bar{R}_l)^2}, \quad 当\ |R-\bar{R}_l| \leqslant a\ 时；\\ \eta_l^{(1)}(R-\bar{R}_l) = 0, \quad 当\ |R-\bar{R}_l| > a\ 时.\end{cases} \tag{5}$$

由概率論[6]可知，随机变数之差 ΔR 的分布密度与随机变数 R 的分布密度 $\eta(R-\bar{R}_l)$ 之間有如下的关系(卷积公式)：

$$W_l^{(1)}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\eta_l^{(1)}(z)\eta_l^{(1)}(z+y)dz. \tag{6}$$

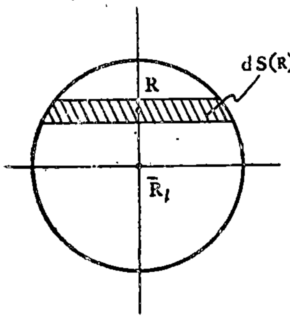

图 1

以(6)式代入(5)式，当 $2a_l \geqslant y \geqslant 0$ 时，有

$$W_l^{(1)}(y)=\left(\frac{2}{\pi a_l^2}\right)^2 a_l^3\int_{-1}^{1-y/a_l}[1-u^2]^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(u+\frac{y}{a_l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du; \tag{7a}$$

当 $-2a_l \leqslant y \leqslant 0$ 时，有

$$W_l^{(1)}(y)=\left(\frac{2}{\pi a_l^2}\right)^2 a_l^3\int_{-1}^{1-\left(\frac{-y}{a_l}\right)}[1-u^2]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[1-\left(u+\frac{-y}{a_l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du; \tag{7b}$$

当 $|y|>2a_l$ 时，

$$W_l^{(1)}(y)=0. \tag{7c}$$

綜合(7a)，(7b)，(7c)可得到

$$\begin{cases} W_l^{(1)}(y)=W_l^{(1)}(-y)=\dfrac{4}{\pi^2 a_l}\displaystyle\int_{-1}^{1-\left|\frac{y}{a_l}\right|}[1-u^2]^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(u+\left|\frac{y}{a_l}\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du, \quad |y|\leqslant 2a, & (8a)\\ W_l^{(1)}(y)=0, \quad |y|>2a. & (8b)\end{cases}$$

将被积函数作冪級数展开，即可将(8a)中的积分算出，結果如下：

$$\begin{cases} W_l^{(1)}(y)=\dfrac{4}{\pi^2 a_l}P^{(1)}\left(\left|\dfrac{y}{a}\right|\right), \quad |y|\leqslant 2a_l; & (9a)\\ W_l^{(1)}(y)=0, \quad |y|>2a_l; & (9b)\end{cases}$$

式中 $P^{(1)}\left(\left|\frac{y}{a_l}\right|\right)$ 是无穷冪級数 $P^{(1)}\left(\left|\frac{y}{a_l}\right|\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left|\frac{y}{a_l}\right|^n$，

$$c_0=\frac{4}{3},\ c_1=0,\ c_2=\frac{-23}{15},\ c_3=\frac{4}{3},\ c_4=-\frac{5}{6},\ c_5=\frac{5}{12},$$

$$c_6=-\frac{1}{8},\ c_7=\frac{1}{60},\ c_8=\cdots.$$

$W_l^{(1)}(y)$ 的特性如图 2 所示，在下面的計算中，我們将用图中虛綫所示的綫性函数来代替无穷冪級数，即

$$\begin{cases} W_l^{(1)}(y)\doteq\dfrac{1}{a_l}\times 0.6\times\left(1-\dfrac{1}{1.7}\left|\dfrac{y}{a_l}\right|\right), \quad 当\ |y|\leqslant 1.7; & (9a')\\ W_l^{(1)}(y)=0, \quad 当\ |y|>1.7. & (9b')\end{cases}$$

由图显見，这样取近似造成誤差不大。

2. 球 状 的 霾

以函数 $\eta_l^{(2)}(R-\bar{R}_l)$ 代表雨滴坐标取值 R 的分布密度，显然：

$$\begin{cases}\eta_l^{(2)}(R-\bar{R}_l)=\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}\pi a_l^3}\cdot\dfrac{dV(R)}{dR}=\dfrac{3}{4a_l^3}[a_l^2-(R-R_l)^2], & \text{当 } |R-\bar{R}_l|\leqslant a;\\ \eta_l^{(2)}(R-\bar{R}_l)=0, & \text{当 } |R-\bar{R}_l|>a.\end{cases}$$

利用和上段类似的方法，可以求得 $W_l^{(2)}(y)$，結果如下：

$$\begin{cases}W_l^{(2)}(y)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\dfrac{1}{a}p^{(2)}\left(\left|\dfrac{y}{a_l}\right|\right), & \text{当 } |y|\leqslant 2a; \quad (10a)\\ W_l^{(2)}(y)=0, & \text{当 } |y|>2a; \quad (10b)\end{cases}$$

式中 $p^{(2)}\left(\left|\dfrac{y}{a_l}\right|\right)=\sum_{n=0}^{5}c_n'\left|\dfrac{y}{a_l}\right|^n$，$c_0'=\dfrac{16}{15}$，$c_1'=0$，$c_2'=\dfrac{4}{3}$，$c_3'=\dfrac{2}{3}$，$c_4'=0$，$c_5'=-\dfrac{1}{30}$。$W_l^{(2)}(y)$ 的特性如图 3 所示，我們也可以用綫性函数来近似它：

$$\begin{cases}W_l^{(2)}(y)=\dfrac{1}{a_l}\times 0.675\left(1-\dfrac{1}{1.5}\left|\dfrac{y}{a_l}\right|\right), & \text{当 } |y|\leqslant 1.5; \quad (10a')\\ W_l^{(2)}(y)=0, & \text{当 } |y|>1.5. \quad (10b')\end{cases}$$

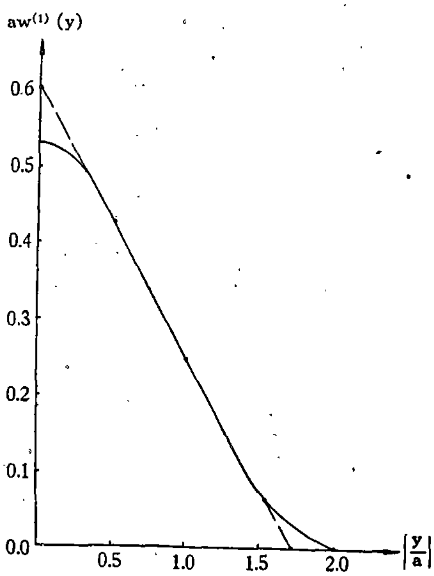

图 2

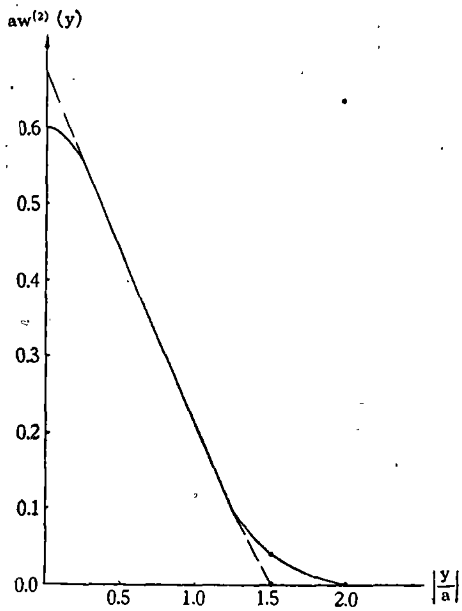

图 3

分别将(9′)，(10′)式代入(4)式，并将积分算出，再代入(3)式卽可得到相干散射项的表达式：

$$\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}e^{-ig(R_i-R_j)}\right\rangle=\sum_{l=1}^{m}\sum_{p=1}^{n_l}(n_l-1)f(h_l)=\sum_{l=1}^{m}n_l(n_l-1)f(h_l), \quad (11)$$

式中

$$h_l=4\pi\frac{a_l}{\lambda},\quad f(h)=\begin{cases}f^{(1)}(h)=0.706\times(1-\cos 1.7h)\dfrac{1}{h^2}, & \text{柱状的羣},\\ f^{(2)}(h)=0.900\times(1-\cos 1.5h)\dfrac{1}{h^2}, & \text{球状的羣}.\end{cases} \quad (12)$$

(11)式可以写成 $m\,\overline{n_l(n_l-1)f(h_l)}$，——号代表对 m 个羣求平均．考虑到 $m\gg 1$，所以这个平均值可以用 $n(n-1)f(h)$ 的数学期望来代替它，即

$$\overline{n_l(n_l-1)\delta(h_l)}=\int_{h_{\min}}^{h_{\max}}\int_0^{n_{\max}}n(n-1)f(h)W(h,n)dndh=\overline{n(n-1)f(h)},\qquad(13)$$

式中 $W(n,h)$ 是羣內的質点数和羣的 $h=\frac{4\pi a}{\lambda}$ 值的联合分布密度．

最后，将(11)，(12)式代入(2)式，就得到考慮了相干散射作用的雷达气象方程：

$$\bar{p}_r=C\sigma[N+m\,\overline{n(n-1)f(h)}].\qquad(14)$$

在这个新的雷达气象方程中，[ ]号內的第一項代表了独立散射，第二項代表了相干散射．由(13)式可知，相干散射給雷达天綫提供了附加的回波，并且回波的強度 $\bar{p}_r$ 不单和散射質点总数有关，它还和質点分組成怎样的羣有关．下面我們对这个新方程进行一些討論．

1. 相干散射項正比于 $m\,\overline{n(n-1)f(h)}$，各羣中的雨滴数 n_l 越大时，它的数值越大．当 $n_l=1(l=1,\cdots,m)$，即每羣只由一个質点組成时，它自动消失，方程(14)还原为方程(2)，意味着相干散射不存在．这結果是合理的，因为前面已設各个羣相互独立，所以 $n_l=1$，$(l=1,\cdots,m)$，就意味着 N 个質点都互相独立，这正是推导旧雷达气象方程时所用的条件．在这个条件下，相干散射不存在，方程(14)自然应取旧方程(2)的形式．

2. 相干散射項的大小及其变化規律：相干散射作用的大小取决的羣的总数 m 和羣的特性联合分布密度 $W\left(n,\frac{4\pi a}{\lambda}\right)$．因目前还缺乏关于 $W\left(n,\frac{4\pi a}{\lambda}\right)$ 的詳細观測資料，为估計相干散射作用的大小，我們暫时設所有的羣都有同样的半径 a 和含有同样数目的雨滴(n 个)，于是 $m\,\overline{n(n-1)f(h)}=N(n-1)f(h)$．按(12)式計算的函数 $f(h)$ 的值如图4所示，而对应于各个波长值 λ 和羣的半径值 a 的 $h=\frac{4\pi a}{\lambda}$ 值如下表所示．

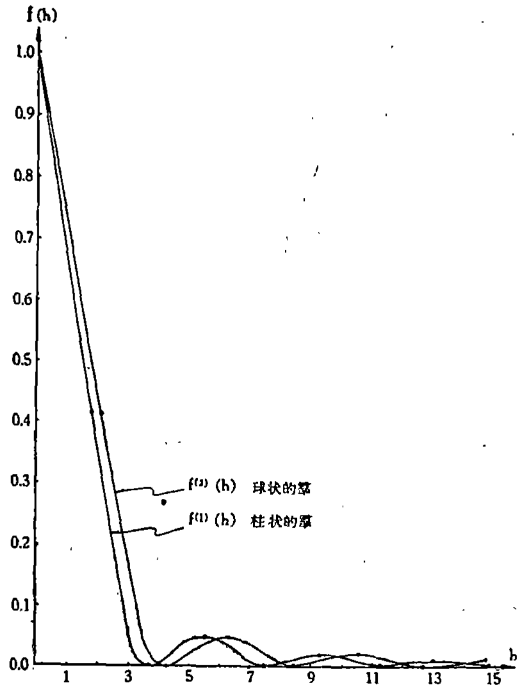

图 4

a \ λ h		λ (厘米) 10	5	3	1
a (厘米)	1	1.3	2.6	4.4	13
	2	2.6	5.2	8.7	26
	3	3.9	7.8	13.0	39
	5	6.5	13.0	21.7	65
	10	13.0	26.0	43.3	130

由图4看出，$f(h)$ 大致随 h 值的減小而递增，球状的羣 $[f^{(2)}(h)]$ 和柱状的羣 $[f^{(1)}(h)]$ 构成的相干散射性質相近．以 α

代表相干散射与独立散射的比值，则 $\alpha = (n - 1)f(h)$. 当 $h < 7$, $n = 6$ 时，α 一般大于 25%，当羣小时，它甚至可以超过 100%（例如 $n = 6$, $a = 0.75$ 厘米，$\lambda = 3.2$，或 $n = 6$, $a = 2.75$ 厘米，$\lambda = 10$ 时，均有 $\alpha = 1$）. 根据尼尔宋的观测，n 为几个，a 的量級为厘米，这表明对于实际的雨云来說相干散射項和独立散射項是能够相比拟的. 当羣較大，波长較短时，h 值較大，这时候相干散射不重要. 因此，相干散射只是由厘米量級的羣构成的. 另外，由图看出，相干散射項的数値是有振动的，振动的幅度随 h 值的增大而減小，它和光的小孔衍射图案相似. 这結果也是合理的，因为这两种物理过程的本質本来是一样的，它們都是波的干涉. 在实际的雨云中，羣的半径和質点数是有一个分布 $W(n, h)$ 的，因此振动的效应将被平均掉.

3. 因为 $f\left(\frac{4\pi a}{\lambda}\right)$ 是和波长有关的，因此，按(14)式，有：

$$\frac{\bar{p}_r(\lambda_1)}{\bar{p}_r(\lambda_2)} = \frac{C(\lambda_1)}{C(\lambda_2)} \times \frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma(\lambda_2)} \times \frac{1 + f\left(\frac{4\pi a}{\lambda_1}\right)(n-1)}{1 + f\left(\frac{4\pi a}{\lambda_2}\right)(n-1)}$$

$$= \frac{C(\lambda_1)}{C(\lambda_2)} \times \frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma(\lambda_2)} \times \frac{1 + \alpha(\lambda_1)}{1 + \alpha(\lambda_2)}. \tag{15}$$

和按旧雷达方程(1′)計算的結果相比較，现在多了一个因子 $\frac{1 + \alpha(\lambda_1)}{1 + \alpha(\lambda_2)}$. 当相干散射作用能够和独立散射作用相比拟时，这个因子是不能略去的. 若 $\lambda_1 > \lambda_2$，則 $\frac{\sigma(\lambda_1)}{\sigma(\lambda_2)} < 1$，但 $\frac{1 + \alpha(\lambda_1)}{1 + \alpha(\lambda_2)}$ 則 > 1，这正好解释了前言中指出的旧雷达方程的推論与观測事实之間的矛盾. 根据尼尔宋的观測資料，取 $n = 6$, $a = 5$，則当 $\lambda_2 = 1.25$ 厘米，$\lambda_1 = 9.2$ 厘米时，$\frac{1 + \alpha(\lambda_1)}{1 + \alpha(\lambda_2)} = 1$ db，按(15)式計算的理論值就和观測值完全吻合，这間接証明了現在推得的包含了相干散射的雷达方程(14)的正确性.

三、云滴对雷达波的散射

云滴的数密度比雨滴大得多，它不象雨滴那样分成孤立的羣，所以上节所講的雨云的模型此处不能应用. 合理的处理方法是把云看作是具有"湍块"結构的連續介質（这里指的是湍流統計理論意义上的湍块）. 我們就在这个基础上来处理云对雷达波的散射問題. 当雨滴比較弥散，羣的結构不十分显著时，也該用本节所講的方法来处理. 所以本节討論的方法是比較有普遍意义的.

用向量 $\mathbf{R}$ 代表空間坐标，$\mathbf{K}$ 代表发射波的波矢量，半个脉冲所占空間 V 內的全部質点在接收天綫处构成的总散射波电場应为：

$$E = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \iiint_V \frac{E_0(\mathbf{R})}{R} e^{+i(\omega t - 2\mathbf{K}\cdot\mathbf{R})} \cdot \beta(\mathbf{R}) d\mathbf{R}, \tag{16}$$

式中的 β 代表单位体积內的云滴构成散射波电場的能力. 若用函数 $n(r)$ 代表云滴譜，用 $n = \int_0^\infty n(r)dr$ 代表单位体积內的云滴总数，則

$$\beta=\int_0^\infty p(r)n(r)dr=p(\bar{r})n,\quad \bar{r}\text{ 是中值.} \tag{17}$$

由于云的湍块結构，质点的数密度 n 和平均半径 $\bar{r}$ 都有起伏，所以，β 是时間和空間上的随机函数，它有无規的涨落起伏，因此可以表示为：

$$\beta(\mathbf{R},t)=\bar{\beta}+\Delta\beta(\mathbf{R},t), \tag{18}$$

式中的 $\Delta\beta(\mathbf{R},t)$ 也是时間空間上的随机变量．因为雷达測量涉及的时間和空間都不太大，所以我們可以設随机变量場 $\Delta\beta(\mathbf{R},t)$ 在空間上是均匀各向同性的，在时間上是平稳的．

将(18)式代入(16)式并計算回波平均功率 $\bar{p}_r$，就有

$$\begin{aligned}\bar{p}_r=\frac{C}{4\pi}\langle EE^*\rangle=C\Bigg\{&\left|\bar{\beta}\iiint_V e^{-i\cdot 2\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R}\right|^2\\&+\left[\left(\bar{\beta}\iiint_V\langle\Delta\beta(\mathbf{R},t)\rangle e^{-i\cdot 2\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R}\right)\iiint_V e^{+i\cdot 2\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}'}d\mathbf{R}'\right]\\&+\left[\left(\bar{\beta}\iiint_V\langle\Delta\beta(\mathbf{R}',t)\rangle e^{+i\cdot 2\mathbf{K}'\cdot\mathbf{R}'}d\mathbf{R}'\right)\iiint_V e^{-i\cdot 2\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}'}d\mathbf{R}\right]\\&+\left[\iiint_V d\mathbf{R}\iiint_V\langle\Delta\beta(\mathbf{R},t)\Delta\beta(\mathbf{R}',t)\rangle e^{i\cdot 2(\mathbf{K}'\mathbf{R}'-\mathbf{K}\cdot\mathbf{R})}d\mathbf{R}'\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{19}$$

(19)式中的第一项已由 A. J. F. 西吉尔特 (Siegert) 和 H. 戈尔德斯廷[2]計算过，証明它可以忽略．第二項和第三項因为 $\langle\Delta\beta(\mathbf{R},t)\rangle=0$，所以它們都等于零，仅余下末一項．这一項中积分号下所含的 $\Delta\beta(\mathbf{R},t)$ 的协方差可用相关函数 $C(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$ 表示：

$$\langle\Delta\beta(\mathbf{R},t)\Delta\beta(\mathbf{R}',t)\rangle=\langle(\Delta\beta)^2\rangle C(\mathbf{R}-\mathbf{R}'). \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式，引进新变数 $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{R}'-\mathbf{R}$，考虑到相关函数 $C(\boldsymbol{\rho})$ 只在 ρ 值很小时才显著异于零，因此可取近似 $\mathbf{K}'=\mathbf{K}$，$\iiint_V[\cdots]d\boldsymbol{\rho}\doteq\iiint_\infty[\cdots]d\boldsymbol{\rho}$，于是 (19) 式就变为：

$$\bar{p}_r=C\langle(\Delta\beta)^2\rangle\iiint_V d\mathbf{R}\iiint_\infty e^{i\cdot 2\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}c(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}. \tag{21}$$

根据湍流統計理論，相关函数的富氏逆变换就是譜密度 $\Phi(\mathbf{k})$[7]，

$$\Phi(\mathbf{k})=\iiint_\infty e^{i\cdot\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}c(\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho}. \tag{22}$$

所以(21)式变为：

$$\begin{aligned}\bar{p}_r&=C\langle(\Delta\beta)^2\rangle\iiint d\mathbf{R}\cdot\Phi(2\mathbf{k})\\&=C'V\cdot\langle(\Delta\beta)^2\rangle\Phi(k)\Big|_{k=\frac{4\pi}{\lambda}}.\end{aligned} \tag{23}$$

这是适用于具有湍块結构的云(或雨)的雷达气象方程．由(23)式直接看出：

$$\bar{p}_r\propto\langle(\Delta\beta)^2\rangle=\langle(np'(\bar{r})\Delta\bar{r}+p(\bar{r})\Delta n)^2\rangle$$

即 $\bar{r}$ 和 n 的数值以及它們的起伏越大，则回波越強．另外，

$$\bar{p}_r\propto\Phi(k)\Big|_{k=\frac{4\pi}{\lambda}},$$

就是説回波平均功率正比于波数为 $\frac{4\pi}{\lambda}$，尺度为 $\frac{\lambda}{2}$ 的那种湍块的譜密度．这里得到的結

果也和光学中的小孔衍射相似. 附尺度为波长之半的湍块外，其他湍块都对 $\bar{p}_r$ 沒有貢献.

下面我們再对方程(23)进行一些討論.

1. 若象推导旧雷达方程(1)时假設的那样，認为质点互相独立，并且是匀譜. 这时相关函数就是 δ 函数，$C(\rho)=\delta(\rho)$，由(22)式 $\Phi(\mathbf{k})=1$，另一方面[8] $\langle(\Delta\beta)^2\rangle=\langle(\Delta n)^2\rangle|p|^2=n|p|^2$，方程(23)就还原为(2)式，由此可見(23)式較(2)式为普遍.

2. 在推导方程(23)的过程中，我們并沒有对相关函数 $C(\rho)$ 和譜密度 $\Phi(\mathbf{k})$ 的形式作任何規定，因此它适用于任意的湍流場. 我們証明了 $\bar{p}_r$ 正比于 $\Phi\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)$，云中的湍流譜 $\Phi(\mathbf{k})$ 到底是什么样的形式，目前似乎还沒有人研究过. 至于在自由大气中則已有下列四种形式被引用过[9].

名　　称	貝 色 尔	指　　数	高　　斯	勾　　犀
$C(\rho)$	$\frac{\rho}{\rho_0}k_1\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$	$e^{-\rho/\rho_0}$	$e^{-(\rho/\rho_0)^2}$	$\frac{1}{[1+(\rho/\rho_0)^2]^2}$
$\Phi(k)$	$\frac{6\pi^2\rho_0^3}{[1+k^2\rho_0^2]^{5/2}}$	$\frac{8\pi^2\rho_0^3}{[1+k^2\rho_0^2]^2}$	$\frac{\pi^{3/2}\rho_0^3}{e^{\frac{k^2\rho_0^2}{4}}}$	$\frac{\pi^2\rho_0^3}{e^{k\rho_0}}$

各式中的 ρ_0 是湍块的平均尺度(或称尺度长)，云中湍流可否应用上表中之某一种形式的譜密度尙待研究.

3. 方程(23)表明，波长的因子不只包含在 C，$P_\lambda(\bar{\gamma})$ 中，而且也包含在 $\Phi\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)$ 中. 根据这个結果，我們或許有可能用不同波长的雷达同时测量，从而推断云中的湍流情况.

四、結　論

1. 当云雨质点結合成較小尺度的羣或湍块时，相干散射作用不容忽視，这时，雷达气象方程应取下列形式：

$$\text{雨：}\quad \bar{p}_r=\frac{P_tA_p^2\theta\cdot\Phi\cdot\tau\cdot c}{72\lambda^2R^2}\cdot\sigma\cdot\bar{n}\left[1+\frac{m}{N}\overline{n(n-1)f\left(\frac{4\pi a}{\lambda}\right)}\right],\tag{24}$$

其中 $\bar{n}$ 是雨滴的平均数密度，其他符号如文中所述；

$$\text{云：}\quad \bar{p}_r=\frac{P_tA_p^2\theta\cdot\Phi\cdot\tau\cdot c}{72\lambda^2R^2}\cdot\langle(\Delta\beta)^2\rangle\Phi\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right).\tag{25}$$

形如(25)式的雷达气象方程原則上也适用于雨，且可能比(24)式准确，但不及(24)式应用起来方便.

当雷达波通过时，若受到的削弱散射作用不能忽略，則(24)，(25)式还要乘上一个因子 $F(\lambda, R)$.

2. 为了提高雷达测量的精确度，有必要进一步掌握云雨微結构的某些規律，例如羣和湍块的特性等.

致謝：本文承赵九章、謝义炳、顾震潮教授指正，作者謹致深切謝意．赵柏林先生曾給予作者許多指导和帮助，作者借此机会也对他表示衷心的感謝．

参　考　文　献

[1] Battan, L. J., Radar Meteorology. The University of Chicago Press 1959. Chap. 4.

[2] Kerr, D. E., Propagation of Short Radio Waves McGraw-Hill Book Company, 1951. Chap. 7; Appendix. B.

[3] Hooper, J. E. N., & Kippax, A. A., *Proceeding of I. E. E.* pt. I. Vol. 97 (1950), pp. 89—94.

[4] Nelson, A., Proceeding of Eighth Weather Radar Conference, 1960. pp. 99—106.

[5] Левин Л. М., Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. Москва Изд. АН СССР, 1961.

[6] Б. В. 格涅坚科，概率論教程．高等教育出版社，1956，§23.

[7] Татарский, В. И., Теория Флутуационных Явлений При Распространении Волн в Турбулентной Атмосфере. Изд. АН СССР, 1959, Глава 1.

[8] М. В. 伏尔坚斯坦，分子光学，上册，高等教育出版社，1958，第五章．

[9] Wheelon, A., *Journal of Nat. Bureau of standard* Vol. 63 D. No. 2 (1959).

RADAR EQUATION CONSIDERING THE COHERENT SCATTERING OF RADAR WAVES FROM CLOUD AND RAIN DROPS

Lee Chi-chen

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

Attention has been paid to the fact that grouping association between particles exists in clouds as well as in rain. Coherent scattering of radar waves from cloud and rain drops dependent to each other has been evaluated and a new radar equation derived. The new equation involves the old one as its special form in the case of incoherent scattering. It is found that the effect of coherent scattering in some cases is not quite small and should not be neglected.