第32卷 第1期 气 象 学 报 Vol. 32, No. 1
1962 年 3 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Mar., 1962

小尺度对流的发展和环境間相互作用的一个近似分析*

巢 紀 平
(中国科学院地球物理研究所)

提 要

本文应用一个近似的模式，分析了大气中小尺度对流发展时和环境(平均运动)間的非綫性相互作用. 分析結果指出，对流除在不稳定和中性稳定层結条件下可以发展外，在稳定层結条件下也可以得到发展，并且扰动的振幅最后均趋于有限值. 同时，由于扰动的发展，大气的平均状态也要发生改变，不論开始时大气的层結如何，最后均趋向于中性，而大气的平均风速最后一般都要減小.

一、引 言

观测指出，大气中小尺度对流(如对流云)不仅在不稳定或中性层結条件下可以得到发展，同时在稳定层結时也經常可以得到发展. 然而，在理論分析方面，众所周知，从熟知的气块法及热力学的薄片法[1,2]出发，是解释不了对流能够在层結稳定的条件下发展这一观测事实的. 事实上，对流是否发展这是一个动力学問題，必須从描写对流发展的动力学方程組入手才能期望深刻地了解对流发展的条件.

我們在最近的一篇文章中[3]，分析了描写小尺度运动的动力学方程組出現不稳定解的条件，从而討論了对流的发生、发展. 由于当时討論的对象是小振幅扰动，因此求得的判据也解释不了对流在稳定层結下的发展. 由此看来，进一步討論有限振幅扰动的发展才有可能解释上述的观测事实.

众所周知，在小振幅扰动的稳定性理論中，由于扰动的振幅很小，扰动发展的能量虽然取之于背景——平均場，但可以認为平均場不受扰动发展的影响. 对于有限振幅扰动則不然，这时平均場促使扰动发展，但当扰动发展到足够大时，它倒过来又将影响平均場，改变平均場对扰动的能量輸送率，从而使扰动的发展受到制約. 在另一方面，由于扰动場和平均場之間的这种非綫性相互作用，在小扰动不能发展的条件下，有限振幅扰动也可能得到发展. 自然，由于这种相互作用的非綫性性質，定量的研究这一問題存在着較大的数学上的困难. 因此討論这一問題时，不得不作相当多的簡化.

作为研究小尺度对流发展时和环境(平均場)之間非綫性相互作用的开始，在本文中我們暫且不求理論上的严謹，而設計一个簡单的数学模式，对这一問題作一次初步的分析.

二、数 学 模 式

布格尔斯(Burgers)[4]曾設計了一个便于作数学处理的模式，用来討論不可压縮流体中的湍流运动. 在我們現在的情况下，考虑了温度場的作用后，可以形式上按布格尔斯将

* 本文1961年10月20日收到.

描写小尺度对流的发展和平均場变化的方程組写成：

$$H\frac{dU}{dt}=P-\frac{\nu U}{H}-\frac{1}{H}\int_0^H\omega^2dz, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{U}{H}w+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-w\frac{\partial w}{\partial z}+\beta\theta, \tag{2}$$

$$H\frac{dT}{dt}=Q-\frac{\nu T}{H}-\frac{1}{H}\int_0^H\theta w dz, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\left(\frac{T}{H}-\gamma_a\right)w+\nu\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-w\frac{\partial\theta}{\partial z}. \tag{4}$$

在此，$U=U(t)$，$T=T(t)$，表示对高度平均过的平均速度和平均温度；$w=w(z,t)$，$\theta=\theta(z,t)$，表示扰动垂直速度和扰动温度；P是用以維持原始的平均运动U_0所需的外力(气压梯度力)；Q是維持原始平均温度T_0所需的热量；γ_a为絕热梯度；$\beta=g/\overline{T}$，g为重力加速度；$\overline{T}$为平均温度取作常数；t为时間；z为垂直坐标；H为运动的垂直厚度；ν为湍流交換系数.

当我們将扰动速度和扰动温度只取成是坐标z的函数时，这意味着这些量是对水平坐标平均过了的.

在这一个只具有等价意义的数学模式中，各项的意义如下：带有ν的项表示摩擦消耗的粘性力；(1),(3)两式中右面第三項是描写扰动运动和平均运动相互作用的雷諾应力；在扰动运动的(2)，(4)两式中右面第一項表示平均場对扰动場的作用，第三項为慣性項.(2)式中最后一項表示浮力.不难由比較得知，这个模式几乎包含了一般流体力学模式中各个主要因子的作用.

問題的边界条件取成：

$$z=0,\quad w=\theta=0, \tag{5}$$

$$z=H,\quad w=\theta=0. \tag{6}$$

三、問題的特解

我們的目的只在于通过近似的分析說明扰动場和平均場之間相互作用对小尺度对流发展的重要性.因此，为了数学处理上的方便我們略去扰动方程中的非綫性項，然而在平均运动方程中的非綫性項則仍然保留.当在扰动运动方程中保留非綫性項而不計扰动場和平均場之間的相互作用时，对于常定运动和非常定运动古特曼(Гутман)[5]和作者[6]分別作过計算，并一致得到結論，对流只有在不稳定层結大气中才能得到充分的发展.

簡化后的方程組为：

$$H\frac{dU}{dt}=P-\frac{\nu U}{H}-\frac{1}{H}\int_0^H\omega^2dz, \tag{7}$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{U}{H}w+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\beta\theta, \tag{8}$$

$$H\frac{dT}{dt}=Q-\frac{\nu T}{H}-\frac{1}{H}\int_0^H\theta w dz, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\left(\frac{T}{H}-\gamma_a\right)w+\nu\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}. \tag{10}$$

取扰动的形式为一簡諧波：

$$w = w_{\max}(t)\sin\frac{\pi z}{H},\quad \theta = \theta_{\max}(t)\sin\frac{\pi z}{H}, \tag{11}$$

将(11)式代入(7)—(10)式后得：

$$H\frac{dU}{dt} = P - \frac{\nu U}{H} - \frac{1}{2}w_{\max}^2, \tag{12}$$

$$\frac{dw_{\max}}{dt} = \left(\frac{U}{H} - \frac{\nu\pi^2}{H^2}\right)w_{\max} + \beta\theta_{\max}, \tag{13}$$

$$H\frac{dT}{dt} = Q - \frac{\nu T}{H} - \frac{1}{2}w_{\max}\theta_{\max}, \tag{14}$$

$$\frac{d\theta_{\max}}{dt} = \left(\frac{T}{H} - \gamma_a\right)w_{\max} - \frac{\nu\pi^2}{H^2}\theta_{\max}. \tag{15}$$

解出这一方程組后，就可以知道扰动場和平均場通过它們相互作用后随时間的演变. 然而由于这組方程是非綫性的，暫时我們不去同时也无必要先来寻求問題的非常定解，我們首先把注意力放在常定解的分析上.

方程組(12)—(15)第一組常定解显然为：

$$w_{\max} = 0,\ \theta_{\max} = 0,\ U = \frac{PH}{\nu},\ T = \frac{QH}{\nu}, \tag{16}$$

不难理解，这是相应于方程組当 $t \to -\infty$ 时的一組解，自然对这一組解我們不感到兴趣.

重要的是另一組当 $t \to +\infty$ 时的常定解，这一組解不难由下面四式求得：

$$P - \frac{\nu U}{H} - \frac{1}{2}w_{\max}^2 = 0, \tag{17}$$

$$\left(\frac{U}{H} - \frac{\nu\pi^2}{H^2}\right)w_{\max} + \beta\theta_{\max} = 0, \tag{18}$$

$$Q - \frac{\nu T}{H} - \frac{1}{2}w_{\max}\theta_{\max} = 0, \tag{19}$$

$$\left(\frac{T}{H} - \gamma_a\right)w_{\max} - \frac{\nu\pi^2}{H^2}\theta_{\max} = 0. \tag{20}$$

由(17)—(20)四式通过一些代数运算后，求得：

$$w_{\max}^2 = P - \frac{2\nu^2\pi^2}{H^2} + \sqrt{P^2 + 4\nu\beta(Q - \gamma_a\nu)}, \tag{21}$$

$$\theta_{\max}^2 = \frac{1}{4\nu^2\beta^2}\left[-P + \sqrt{P^2 + 4\nu\beta(Q - \gamma_a\nu)}\right]^2 \cdot \left[P + \sqrt{P^2 + 4\nu\beta(Q - \gamma_a\nu)} - \frac{2\nu^2\pi^2}{H^2}\right], \tag{22}$$

$$U = \frac{H}{\nu}\left[\frac{P}{2} + \frac{\nu^2\pi^2}{H^2} - \frac{1}{2}\sqrt{P^2 + 4\nu\beta(Q - \gamma_a\nu)}\right], \tag{23}$$

$$T = H\gamma_a + \frac{\pi^2}{2H\beta}\left[-P + \sqrt{P^2 + 4\nu\beta(Q - \gamma_a\nu)}\right]. \tag{24}$$

(21)式是运动最后达到平衡状态时扰动的最大垂直速度表达式，(22)式是相应的最大扰动温度的表达式，(23)，(24)各为由于相互作用后平均場最后的速度和温度.

或者，考虑到原始的平均速度和温度值各为：

$$U_0 = \frac{PH}{\nu}, \quad T_0 = \frac{QH}{\nu}. \tag{25}$$

以及等价地設

$$\frac{T_0}{H} = \gamma_0 \tag{26}$$

为原始的平均温度垂直梯度，将(25)，(26)二式代入(21)—(24)式后，得：

$$\omega^2_{\max} = \frac{U_0\nu}{H} - \frac{2\nu^2\pi^2}{H^2} + \sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)}, \tag{27}$$

$$\theta^2_{\max} = \frac{1}{4\nu^2\beta^2}\left[-\frac{U_0\nu}{H} + \sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)}\right]^2 \times$$

$$\times \left[\frac{U_0\nu}{H} + \sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)} - \frac{2\nu^2\pi^2}{H^2}\right], \tag{28}$$

$$U = \frac{H}{\nu}\left[\frac{U_0\nu}{H} + \frac{\nu^2\pi^2}{H^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)}\right], \tag{29}$$

$$T = H\gamma_a + \frac{\pi^2}{2H\beta}\left[-\frac{U_0\nu}{H} + \sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)}\right], \tag{30}$$

$$\gamma = \gamma_a + \frac{\pi^2}{2H^2\beta}\left[-\frac{U_0\nu}{H} + \sqrt{\left(\frac{U_0\nu}{H}\right)^2 - 4\nu^2\beta(\gamma_a - \gamma_0)}\right]. \tag{31}$$

由于(27)—(31)式右面各量皆可测量，因而我們提出的問題至此已經解决.

四、結 果 討 論

首先，我們注意到对于发展起来的扰动其速度和温度不能取虚数值，因此上列各式右面根号中的量必須恆取正值. 这一要求卽相当于下面的条件：

$$\gamma_0 - \gamma_a \leqslant 0, \tag{32}$$

或[1)]

$$U_0^2 > 4\beta H^2(\gamma_a - \gamma_0) > 0, \tag{33}$$

在这两个必要条件满足下，由(27)式我們不难求得对流能够发展的充分条件为：

$$\gamma_a - \gamma_0 < \frac{\nu\pi^2}{H^3\beta}\left(U_0 - \frac{\nu\pi^2}{H}\right). \tag{34}$$

由于一般来說在大气中总是 $U_0 > \frac{\nu\pi^2}{H}$ (例如取 ν=10 米²/秒，U_0=1 米/秒，只要 H>100 米，或者当 U_0 = 10 米/秒，只要 H > 10 米这一不等式就满足). 因此，当 $\gamma_a - \gamma_0 < 0$ 对(34)式总成立，亦卽对流总能发展；当 $\gamma_a - \gamma_0 > 0$ 时，只要条件(34)式成立，对流也能得

1) 当(33)式不滿足时，上面的解将取虚数值，这組解就不具有現实意义. 換句話說，卽扰动沒有发展的可能.

到发展．这时由于(34)式右面与H三次方成反比，因此在稳定层結下，尺度較小的扰动較容易得到发展．例如当 $\nu = 10$ 米²/秒，$U_0 = 4$ 米/秒，$\gamma_a - \gamma_0 < 10^{-2}$ 度/米时，$H \sim 100$ 米时的扰动总能发展．

上面这一簡单的分析表明了，扰动場和平均場之間的相互作用对小尺度对流的发展起着重要的影响，因为正如前述，在小扰动理論分析中是得不出稳定层結大气中对流能够发展这一結論来的．

下面我們分别以三种不同的情况对問題的解作进一步的分析．

情况(I)　开始时大气的层結是中性的，即 $\gamma_a - \gamma_0 = 0$．

这时当 $t \to +\infty$ 时，解为：

$$\omega^2_{\max I} = 2\left(\frac{U_0\nu}{H} - \frac{\nu\pi^2}{H^2}\right), \tag{35}$$

$$\theta^2_{\max I} = 0, \tag{36}$$

$$U_I = \frac{\nu\pi^2}{H}, \tag{37}$$

$$\gamma_I = \gamma_a. \tag{38}$$

考虑到(37)式后，可以将(35)式改写成下面的形式

$$\omega^2_{\max I} = 2\frac{\nu}{H}(U_0 - U_I). \tag{35'}$$

由于 $\omega^2_{\max I}$ 必须大于零，否則解不具有現实意义，因而

$$U_I < U_0. \tag{39}$$

由此可見，在中性层結下，由于对流的发展，最后大气的平均风速要減小，即扰动发展的能量完全取之于平均动能．同时，层結不受扰动发展的影响仍保持中性．

如取 U_0=6 米/秒，H=100 米(相当云泡的尺度)，ν=10 米²/秒，則 $U_I \approx 1$ 米/秒，$\omega_{\max I} = 1$ 米/秒．

很有意思，(35)，(37)与斯杜尔特(Stuart)[7]对于不可压縮流体的研究結果完全一致．因此可以認为，在中性层結的可压縮流体中，扰动发展的行为本质上与在不可压縮流体中相同．这一結論的物理意义是清楚的，因为在中性层結流体中內能沒有释放的可能．

情况(II)　开始时大气的层結是稳定的，即 $\gamma_a - \gamma_0 > 0$．

在这一情况中，平均气流最后的速度为：

$$U_{II} = U_I + \frac{1}{2}\left(U_0 - \sqrt{U_0^2 - 4\beta H^2(\gamma_a - \gamma_0)}\right). \tag{40}$$

我們也可以将这个式子換写成：

$$U_{II} - U_0 = U_I + \frac{1}{2}U_0\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{U^*}{U_0}}\right) \approx U_I - U_0 + U^*, \tag{41}$$

式中

$$U^* = \frac{\beta H^2(\gamma_a - \gamma_0)}{U_0} > 0. \tag{42}$$

自然，在(41)式中必須对 U^* 有下面的限制：

$$U^* < \frac{1}{4} U_0. \tag{43}$$

由此，我們不难得到：

当 $$U_0 > U_I > \frac{3}{4} U_0 \text{ 时，} U_{II} - U_0 > 0, \tag{44}$$

当 $$U_I < \frac{3}{4} U_0 \text{ 时，} U_{II} - U_0 < 0. \tag{45}$$

亦即在(44)式的情况下，大气的平均动能由于扰动的发展要增加，在(45)式的情况下，大气的平均动能要减小．在另一方面，显然由于 $U_{II} = U_I + U^*$，因此在稳定层結条件下最后达到的平均风速总要比中性层結条件下来得大．

大气最后达到的平均温度由(30)式，这时为：

$$T_{II} = H\gamma_a + \frac{\pi^2 U_0 \nu}{2\beta H^2}\left[-1 + \sqrt{1 - 4\frac{U^*}{U_0}}\right]. \tag{46}$$

在条件(43)式成立下，我們也不难近似地将(46)式改写成下面的形式：

$$T_{II} - T_0 = H\left(1 - \frac{U_I}{U_0}\right)(\gamma_a - \gamma_0) > 0.$$

由此可見，在稳定层結条件下，由于对流的发展大气最后的平均温度要增加．或者換句話說，大气最后的平均内能要增加．

由于大气的平均内能在这一情况下总要增加，因此当条件(44)成立时，即大气的平均动能亦在增加时，扰动不可能发展．这是显然的，因为在沒有外加能源时，平均总能量的增加必然将导致扰动总能量的減少[1]．因此，在稳定层結情况下，只有当(45)式成立时，对流才具有发展的可能．自然这时扰动发展的能量取之于平均动能．

在稳定层結下，扰动的最大垂直速度最后可以到达[由(27)式]：

$$\omega^2_{maxII} = \frac{U_0 \nu}{H} - \frac{2\nu^2\pi^2}{H^2} + \frac{U_0\nu}{H}\sqrt{1 - 4\frac{U^*}{U_0}}. \tag{47}$$

与上面同样，近似地不难将这一式子改写成：

$$\omega^2_{maxII} = 2\frac{\nu}{H}(U_0 - U_I - U^*) = 2\frac{\nu}{H}(U_0 - U_{II}). \tag{48}$$

由此可見，只有当 $U_0 - U_{II} > 0$ 时扰动才能发展．

联合(48)与(35′)两式，得到

$$\omega^2_{maxII} - \omega^2_{maxI} = -2\frac{\nu}{H}U^* < 0. \tag{49}$$

因此在稳定层結下对流虽然可以发展，但最后到达平衡状态时的垂直速度要比中性层結时来得小．如取 $\gamma_0 = 7 \times 10^{-3}$ 度/米，其余参数同以上的例子，則 $\omega_{maxII} \approx 0.8$ 米/秒，即約小 0.2 米/秒．

相应的扰动温度为

$$\theta^2_{maxII} = \frac{2\nu U^{*2}}{\beta^2 H^3}(U_0 - U_{II}). \tag{50}$$

1) 湍流作用总是使能量耗散．

如取与上面相同的参数，則 $\theta_{\max II} \approx 0.05$ 度.

由(48),(50)两式除重新可以得到結論，即在稳定层結条件下扰动发展的总能量皆取之于平均动能，并且不难求得能够发展的扰动的厚度为 $H>H_c=\frac{4}{3}\frac{\nu\pi^2}{U_0}$. 当取 $\nu\sim 10$ 米²/秒，$U_0\sim 1$ 米/秒时，$H_c\approx 100$ 米.

最后我們指出，达到常定时大气的平均层結为：

$$\gamma_{II}\approx\gamma_a-\frac{U_I}{U_0}(\gamma_a-\gamma_0), \tag{51}$$

或改写成

$$\frac{\gamma_a-\gamma_{II}}{\gamma_a-\gamma_0}\approx\frac{U_I}{U_0}. \tag{52}$$

在上面的参数值下，$U_I/U_0\approx 1/6$，$\gamma_a-\gamma_0=3\times10^{-3}$ 度/米，所以 $\gamma_a-\gamma_{II}\approx 0.5\times10^{-3}$ 度/米. 由此可見，在层結大气中由于有限振幅对流的发展，最后大气的靜力稳定度要变小，并趋向于中性.

情况(III) 开始时大气层結是不稳定的，即 $\gamma_a-\gamma_0<0$.

这时当运动达到常定时，大气的平均风速为：

$$U_{III}=U_I+\frac{1}{2}U_0\left(1-\sqrt{1+4\frac{U^{**}}{U_0}}\right), \tag{53}$$

式中

$$U^{**}=\frac{\beta H^2(\gamma_0-\gamma_a)}{U_0}=-U^*, \tag{54}$$

或者由于在一般情况下 $U^{**}\ll U_0$，故(53)式也可以近似地写成

$$U_{III}-U_0=-(U_0-U_I)-U^{**}<0. \tag{55}$$

由(55)式指出，在不稳定层結下平均风速最后要变小，亦即平均动能在对流发展的过程中要释放出来.

大气的平均温度最后为：

$$T_{III}=H\gamma_a+\frac{\pi^2U_0\nu}{2\beta H^2}\left[-1+\sqrt{1+4\frac{U^{**}}{U_0}}\right]. \tag{56}$$

或近似地写成

$$T_{III}-T_0=H\left(1-\frac{U_I}{U_0}\right)(\gamma_a-\gamma_0)<0. \tag{57}$$

由此可見大气的平均內能也要释放出来.

扰动达到平衡状态后的垂直速度和温度为：

$$w^2_{\max III}=\frac{2\nu}{H}(U_0-U_I+U^{**})=\frac{2\nu}{H}(U_0-U_{III}), \tag{58}$$

$$\theta^2_{\max III}=\frac{2\nu U^{**2}}{\beta^2H^3}(U_0-U_{III}). \tag{59}$$

由于 U_0-U_{III} 恆取正值，可以得出結論：在不稳定层結下对流将无条件地能够得到发展. 亦即由大气中释放出来的平均总能量除用在摩擦消耗上外，总还有剩余的能量供給

扰动.

如取 $\gamma_0-\gamma_a=3\times10^{-3}$ 度/米,其他参数同前,則 $\omega_{\max III}\approx 1.2$ 米/秒, $\theta_{\max III}\approx 0.05$ 度. 由此可見,对于发展的对流当达到常定状态时,虽有 $\omega^2_{\max III}>\omega^2_{\max I}>\omega^2_{\max II}$, 但一般差别不大.

同样地,当达到平衡状态时,大气平均层結的改变为:

$$\frac{\gamma_{III}-\gamma_a}{\gamma_0-\gamma_a}=\frac{U_I}{U_0}<1. \tag{60}$$

卽由于有限振幅扰动的发展,大气层結的不稳定度要变小,并也趋向于中性.

五、总 結

由以上的分析我們得到結論: 在对流发展时, 平均場和扰动場之間的非綫性相互作用,对对流的发展有重要的影响. 对流不仅在不稳定和中性稳定条件下可以得到发展,同时在一定条件下当层結是稳定时也可以发展. 当层結是不稳定时,对流发展的能量取之于大气的平均动能和平均内能;在中性层結下,对流发展的能量唯一地来自大气的平均动能;在稳定层結下,如果大气的平均动能减少,則对流能够发展,否則对流将得不到发展.

自然,由于模式的局限性, 上面的結論只包括了有限振幅对流发展时部分的規律性,同时看来某些結論当对模式作了合理的改进后,可以預料会有所修正. 但这个簡单的分析却指出了相互作用对扰动发展影响的某些趋向,这自然是有意义的. 进一步用一般流体力学模式来分析这一問題我們将另文討論[8].

参 考 文 献

[1] Bjerknes, J., *Q. J. Roy. Meteor. Soc.* **64** (1938), 325—330.
[2] Шишикин, Н. С., *Трудьı ГГО.* **82** (1958), 3—21.
[3] 巢紀平,对流发展局部气象条件的初步理論分析,气象学报,本期77—80.
[4] Burgers, J. M., *Adv. Appl. Mech.* **1** (1948), 171—201.
[5] Гутман, Л. Н., *ДАН СССР*, **112** (1957), 1033—1036.
[6] 巢紀平,层結大气中热对流发展的一个非綫性分析,气象学报, **31** (1961), 191—205.
[7] Stuart, J. T., Z. angew, Math & Mech, Sonderlıcft, 1956, 32—37.
[8] 巢紀平,論大气层結和风場对有限振幅小尺度对流发展的影响(尙未发表).

A PRELIMINARY ANALYSIS OF THE INTERACTION BETWEEN CONVECTION DEVELOPMENT AND AMBIENT ENVIRONMENT

CHAO JIH-PING

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, by using an approximate model, the interaction between the ambient environment and the convection development are discussed. It is shown that under certain condition the convection may also develop in a stable stratified atmosphere, because the ambient wind field and stratification variate with the development of convection.