第 29 卷 第 1 期 氣象學報 Vol. 29, No. 1
1958 年 2 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1958

一個討論大氣環流季節變化和長期預報的流體力學模式*

朱抱眞
(中國科學院地球物理研究所)

提 要

本文將流體動力學、熱力學方程與輻射傳遞方程聯結起來建立一個更合理的長期預報數值模式．在模式中除了考慮摩擦和湍流的作用外，輻射作用不是給定的分佈，而是在大氣運動的過程中相互調整．

根據所建立的預報方程組，提出了兩種適於積分的具體形式：兩層斜壓模式和三度空間問題的形式．

一．前 言

大氣運動的根本原動力是由太陽、大氣和地面之間的輻射作用通過大氣動力學規律的活動而來的．輻射過程在時間和空間上分佈的不均勻性支配了大氣環流在時間和空間上的變化．因此在研究大氣環流季節變化或長期預報的問題時，不能不考慮輻射的根本作用．

複雜的問題是一方面輻射作用要通過大氣動力學的規律來控制大氣的運行，另一方面輻射過程本身又同時受着大氣運動的影響．Phillips[1] 在 1956 年所作的大氣環流數値實驗雖然得到很好的結果，但是作爲第一近似，他將輻射給定一個合理的分佈，這樣一來輻射作用是和大氣運動無關的．要更有效地討論季節變化和長期預報問題，必須建立一個更合理的模式，在這個模式中輻射作用不是給定的分佈而是在大氣運動的過程中和大氣運動相互調整着．

實際上早在 1947 年 Кибель[2] 已爲這個問題指出了方向和方法，在四十年代及其以後的時期，Кибель 以及其他蘇聯學者[3,4,5,6]沿着這個方向考慮輻射在大氣過程中的自動調整，卓越地計算了溫度平均分佈及其年變等問題．然而在這些工作中還沒能很好地考慮氣流的水平運動和垂直運動對溫度場的作用．

本文目的即是考慮上述的不足，建立一個更合理的長期預報數值模式．沿着 Кибель 的方向和方法，由流體動力學、熱力學方程和輻射傳遞方程，考慮摩擦、湍流和輻射的自動調整過程求解流場的變化，藉以討論大氣環流季節變化和長期預報問題．

二．方程組的建立

我們採取 x, y, p 坐標系，近似地將第一、二兩個運動方程寫作

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = fv - \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_\nu \nabla^2 u + g\,\frac{\partial \tau_x}{\partial p}, \tag{1}$$

* 1957 年 10 月 12 日收到．

$$\frac{\partial v}{\partial t}+V\cdot\nabla v=-fu-\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_\nu\nabla^2 v+g\frac{\partial\tau_y}{\partial p},\tag{2}$$

其中 u, v 為水平風向量 V 的兩個分量，A_ν 為運動的渦旋粘性係數，τ_x, τ_y 為摩擦應力的兩個分量，g 為重力加速度，$f=2\Omega\sin\varphi$ 是地球自轉參變數，ϕ 為重力位勢.

靜力方程與連續方程各為

$$\frac{\partial\phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p},\tag{3}$$

$$\nabla\cdot V+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0,\tag{4}$$

其中 $\omega\equiv\frac{dp}{dt}$ 是氣壓的個別變化.

我們還有狀態方程

$$p=R\rho T\tag{5}$$

和熱流量方程

$$\rho c_p T\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\ln\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\tag{6}$$

其中 θ 是位溫，ε_1、ε_2、ε_3 各為湍流作用、輻射作用、水汽凝結作用的熱流量. 我們現在略去 ε_3，而只考慮 ε_1 和 ε_2.

湍流作用的熱流量 ε_1 具有下列形式

$$\varepsilon_1=\rho^2 g^2\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}+\frac{\rho}{RT}g^2\lambda\frac{\partial T}{\partial p}+\lambda'\nabla^2 T,\tag{7}$$

這裏的 λ 和 λ' 為垂直方向和水平方向上的湍流導熱係數. 而輻射作用的熱流量 ε_2 則按照 Schwarzschild-Emden 寫成下式:

$$\varepsilon_2=\alpha\rho_w(A+B+\gamma S-2E),\tag{8}$$

式中的 A 和 B 為向下和向上的長波輻射通量，S 為太陽短波輻射通量，α 為灰色長波輻射的吸收係數，$\alpha\gamma$ 為短波輻射的吸收係數，ρ_w 為水汽的密度，而

$$E=\sigma T^4,\tag{9}$$

其中 σ 為 Stefan-Boltzmann 常數. 而 A, B, S 適合下列的輻射傳遞方程

$$\frac{\partial A}{\partial p}=\frac{\alpha\rho_w}{g\rho}(E-A),\tag{10}$$

$$\frac{\partial B}{\partial p}=\frac{\alpha\rho_w}{g\rho}(B-E),\tag{11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p}=-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}S.\tag{12}$$

按照 Кибель 的方法，將(7)，(8)式代入(6)式中，並利用(9)—(12)式的關係消去 A 和 B (近似地可將 ρ_w/ρ 看作與 p 無關)，我們得到

$$-\frac{c_p g\rho^2 T}{\alpha^2\rho_w^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\ln\theta+\frac{g^3\rho^3}{\alpha^2\rho_w^2}\lambda\frac{\partial^4 T}{\partial p^4}+\frac{g^3\rho^2}{\alpha^2\rho_w^2}\frac{\lambda}{RT}\frac{\partial^3 T}{\partial p^3}+$$

$$+\frac{\lambda'}{\alpha\rho_w}\nabla^2\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}-\frac{2g\rho}{\alpha\rho_w}\left\{4\sigma T^3\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}+12\sigma T^2\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2\right\}+$$

$$
+\frac{g\rho\gamma}{\alpha\rho_w}\left(\frac{\alpha\rho_w\gamma}{g\rho}\right)^2 S=-\frac{\alpha\rho_w}{g\rho}\left[\frac{c_p\rho T}{\alpha\rho_w}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\ln\theta-\right.
$$

$$
\left.-\frac{g^2\rho^2}{\alpha\rho_w}\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}-\frac{\rho}{\rho_w\alpha}\frac{g^2}{RT}\lambda\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{\lambda'}{\alpha\rho_w}\nabla^2 T-\gamma S\right]. \tag{13}
$$

將上式和(1)—(5)方程組合起來足够求解未知的變數，但可以看到考慮了非綫性項和垂直運動的作用後熱流量方程變得異常複雜，造成求解這些物理方程組的困難.

我們現在考慮一種簡化的情況，略去$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$的二級微商，則上式可以大爲化簡，最後得到

$$
T\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\ln\theta=\frac{g^2\rho}{c_p}\lambda\left(\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right)+\frac{1}{\rho c_p}\lambda'\nabla^2 T+
$$

$$
+\frac{8\rho g^2}{\alpha\rho_w c_p}\sigma T^2\left\{3\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+T\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right\}+\frac{\alpha}{c_p}\frac{\rho_w}{\rho}\gamma(1-\gamma^2)S, \tag{14}
$$

式中的 S 可以利用大氣上界的邊界條件决定，即是

$$
\text{當 } p=0 \text{ 時,}\quad S=(1-\Gamma)w\equiv W, \tag{15}
$$

其中 Γ 爲地球的平均反照率，w 爲太陽短波輻射在大氣上界的分佈，都是已知的量.

由(12)式可得

$$
S=W\exp\left(-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}p\right), \tag{16}
$$

由此熱流量方程(6)式化作

$$
T\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla+\omega\frac{\partial}{\partial p}\right)\ln\theta=\frac{g^2\rho}{c_p}\lambda\left(\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right)+\frac{1}{\rho c_p}\lambda'\nabla^2 T+
$$

$$
+\frac{8\rho g^2}{\alpha\rho_w c_p}\sigma T^2\left\{3\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+T\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right\}+\frac{\alpha}{c_p}\frac{\rho_w}{\rho}\gamma(1-\gamma^2)W\exp\left(-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}p\right). \tag{17}
$$

這樣在上式右端包括 4 項非絕熱加熱作用：即垂直湍流交換、水平湍流交換、長波輻射和短波輻射作用項. 將(17)式和方程(1)—(5)式聯立起來成爲我們討論長期預報或環流季變的預報方程組.

三. 適於積分的兩種模式

1. 兩層斜壓模式

由於兩層地轉模式是最簡單而又能描寫大氣斜壓性質的模式，因此我們首先可以從兩層模式來考慮上列方程組的解答. 但這時無法考慮$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$的變化.

像 Phillips (1956)一樣，將大氣上層流場以 250 毫巴等壓面表示，下層流場以 750 毫巴等壓面表示，以角碼 0，1，2，3，4 分別代表 0，250，500，750，1000 毫巴上的值.

將(17)式寫於 500 毫巴上，則得

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla\right)(\phi_1-\phi_3)-\frac{\omega_2}{p_2}\left[\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2}\right](\phi_1-\phi_3)=\frac{g^2}{c_p}\frac{\lambda}{R}\frac{1}{\theta_2}\frac{\theta_3-\theta_1}{p_2}+
$$

$$
+\frac{1}{R}\frac{\lambda'}{\rho c_p}\nabla^2(\phi_1-\phi_3)+\frac{24\rho g^2}{\alpha\rho_w c_p}\frac{\sigma T_2^3}{\theta_2}\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{p_2}\right)^2+\frac{\alpha\rho_w}{c_p\rho}\gamma(1-\gamma^2)W\exp\times
$$

$$
\times\left(-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}p_2\right), \tag{18}
$$

並設其中的

$$\left[\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2}\right](\phi_1-\phi_3)=\text{常數}. \tag{19}$$

再將(1),(2)和(4)式寫成渦度方程並用於 250 和 750 毫巴等壓面上，並取上下界的邊界條件爲 $p=0$ 和 $p=p_4$ 時 $\omega=0$, 則得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_1\cdot\nabla\right)(\beta y+\zeta_1)-f_0\frac{\omega_2}{p_2}=A_\nu\nabla^2\zeta_1, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_3\cdot\nabla\right)(\beta y+\zeta_3)+f_0\frac{\omega_2}{p_2}=A_\nu\nabla^2\zeta_3-k\zeta_4, \tag{21}$$

這裏的 $\beta=\dfrac{df}{dy}$, k 是地面摩擦係數，並把 f_0 看作常數。

如此我們可以像 Phillips (1956) 一樣，由(18)—(21)式在一定的邊界條件下由已知時間 t 的流場求解 $t+\Delta t$ 時的流場，討論環流季變或長期預報的問題.

2. 三度空間的問題

我們也可不取兩層模式，而直接地求解三度空間的問題。

將粘性和摩擦作用簡單地以函數 $\boldsymbol{F}$ 表示，則由方程(1),(2)和(4)式可得渦度方程：

$$\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{f}J(\phi,\nabla^2\phi)+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=f^2\frac{\partial\omega}{\partial p}+f\nabla\times\boldsymbol{F}, \tag{22}$$

暫先略去$\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)$的變化，則(17)式可以利用(3)式改寫爲

$$-\frac{p}{R}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\cdot\nabla\right)\frac{\partial\phi}{\partial p}+\Gamma_p\omega=-\frac{g^2}{c_p}\frac{\lambda}{R^2T}\left(\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\frac{1}{\rho c_p}\frac{\lambda'}{R}\nabla^2p\frac{\partial\phi}{\partial p}+$$
$$+\frac{24\rho g^2}{\alpha\rho_w c_p}\frac{\sigma}{R^4}\left(p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)^2+\frac{\alpha}{c_p}\frac{\rho_w}{\rho}\gamma(1-\gamma^2)\hat{W}\exp\left(-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}p\right), \tag{23}$$

其中 $\Gamma_p=T\dfrac{\partial\ln\theta}{\partial p}$, 由(22)和(23)式消去 ω 可得

$$\left[\nabla^2-\frac{f^2}{R\Gamma_p}\left(p\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\frac{\partial\phi}{\partial t}=J\left(\frac{1}{f}\nabla^2\phi+f,\phi\right)+f\nabla\times\boldsymbol{F}-$$
$$-\frac{g}{c_p}\frac{1}{\Gamma_p}\left[\frac{g}{R^3T^2}\lambda\left(\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)^2-\frac{\lambda'}{gR}\frac{\partial^2\phi}{\partial p^2}\nabla^2\left(p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)+\frac{48\rho g\sigma}{\alpha\rho_w R^3}p\frac{\partial\phi}{\partial p}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\alpha\rho_w}{g\rho}\right)^2\gamma^2(1-\gamma^2)W\exp\left(-\frac{\alpha\gamma}{g}\frac{\rho_w}{\rho}p\right)\right]=-H(x,y,p). \tag{24}$$

在簡單的情況下，取靜力穩定度 Γ_p 爲常數，設 $\Gamma_p=-C$, 並使用下列變換：

$$\begin{aligned}&X=\frac{3f}{4\sqrt{RCp_0}}x=bx, && Y=by, && q=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{p}{p_0}},\\ &\Psi=\phi\exp\left(\frac{q}{2}+\alpha_1X+\alpha_2Y\right), && \alpha_1=\frac{\partial\ln b}{\partial X}, && \alpha_2=\frac{\partial\ln b}{\partial Y}.\end{aligned} \tag{25}$$

則(24)式可以化爲

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}-l^2\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{16}{9}\frac{RCp_0}{f^2}\exp\left(\frac{q}{2}+\alpha_1X+\alpha_2Y\right)H(x,y,p)=$$
$$=-H_1(X,Y,q), \tag{26}$$

其中 $l^2 = \dfrac{1}{4} + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. 上式爲標準型的 Helmholtz 方程，在一定的邊界條件下可以求解[7,8]. 上下邊界條件取作

$$\text{(i) 當 } p = 0 \text{ 時，即 } q = 0 \text{ 時，} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \tag{27}$$

$$\text{(ii) 當 } p = p_0 \text{ 時，暫不考慮地形作用，則 } \omega_0 = \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{p=p_0}.$$

由(6)式

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\Gamma_p}{T}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{p=p_0} = -\frac{1}{f} J\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial p}\right) - \frac{R}{p}\frac{g}{c_p}\left[g\rho\lambda\left(\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right) + \lambda' \frac{1}{\rho g}\nabla^2 T + \right.$$
$$\left. + \frac{8\rho g}{\alpha \rho_w}\sigma T^2 \left\{3\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + T\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}\right\} + \frac{\alpha \rho_w}{c_p \rho}\gamma(1-\gamma^2)S\right]\bigg|_{p=p_0} = -M(x, y, p)\bigg|_{p=p_0}.$$

利用(25)式的變換，得到

$$\text{當 } q = q_0 \text{ 時，}\left[\frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\frac{Cp_0}{T_0}\right)\right]\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{4p_0}{3} e^{\left(\frac{q_0}{2} + \alpha_1 X + \alpha_2 Y\right)} M_1(X, Y, \dot{q}). \tag{28}$$

若考慮地形作用，則很容易於下界的邊界條件引入，這時

$$\omega_0 = \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{p=p_0} + V_0 \cdot \nabla \eta,$$

其中 η 爲地形函數，如此 M 中多加了和 η 有關的一項.

參 考 文 獻

[1] Phillips, N. A., The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **82** (1956), 123—164.

[2] Кибель, И. А., Прогноз погоды как задача динамической метеорологии. "蘇聯科學院獻給偉大的十月社會主義革命三十周年紀念論文集", 第 1 卷(1947).

[3] Кибель, И. А., Распределение температуры в земной атмосфере. *ДАН СССР*, **39** (1943), 18—22.

[4] Кибель, И. А., К теории трансформации воздушных масс. *ДАН СССР*, **47** (1945), 420—424.

[5] Блинова, Е. Н., К вопросу о среднем годовом распределении температуры в земной атмосфере материков и океанов. *Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз.*, **11** (1947), 1—14.

[6] Курбаткин, Г. П., Определение методами гидродинамики годового хода температуры воздуха на уровне моря. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, № 2 (1957), 228—243.

[7] Kuo, H. L., The development of quasi-geostrophic motions in the atmosphere. *Geophysical Research Papers*, No. 24 (1953), 27—52.

[8] Kuo, H. L., On quasi-nondivergent prognostic equations and their integration. *Scientific Rep. MIT*. No. 2 (1955), 1—42.

A HYDRODYNAMICAL MODEL FOR SEASONAL VARIATION OF GENERAL CIRCULATION AND LONG-RANGE FORECASTING

CHU PAO-CHEN

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A hydrodynamical model suitable for numerical integration of seasonal variation of general circulation and long-range forecasting is set up from hydrodynamic and thermodynamic equations (1)—(9) with the equations of atmospheric radiation (10)—(12) in the text. The heating of radiation will thus be dependent on the motion.

Eliminating A and B from the equations (9)—(12), and neglecting the second derivative of $\frac{\partial T}{\partial p}$, the thermodynamic energy equation is simplified in the form of (17).

From the equations (1)—(5) and (17), a system of differential equations suitable for numerical integration is derived for 2-layer model [equ. (18)—(21)] as well as 3-dimensional model [equ. (26)].

In this text, the following notations are used: A_ν = lateral kinematic eddy-viscosity coefficient, τ_x and τ_y = x and y components of the frictional stress, ϕ = geopotential, λ and λ' = vertical and lateral eddy-conduction coefficient for heat, A and B = downward and upward flux of long wave radiation, S = flux of short wave radiation, α and $\alpha\gamma$ = absorption coefficient of long wave and short wave radiation, ρ_w = density of water vapour, σ = Stefan-Boltzmann's constant, Γ = mean albedo for the earth, w = distribution of the solar radiation in the upper boundary of atmosphere, and the other symbols have their conventional meaning in meteorology.