

利用湍流作數值分析及數值預報 中的平滑化過程*

顧 震 潮

(中國科學院地球物理研究所)

在高空大範圍流型的數值預報中技術上的困難問題之一就是如何消去原始高度場或預報高度場裏的小擾動。這種小擾動不論是眞的，還是假的(原始場中的觀測誤差，預報場中的截平誤差(Truncation error)，地轉風假定下原始小擾動的虛假發展等等)，都不是預報的對象，因此必須用種種平滑化過程設法除去。

在數值分析方面這種平滑化過程可以由幾種不同的方法來作^[1-5]，但最普通的辦法是用^[3-5]

$$\phi^* = \phi + k \nabla^2 \phi \quad (1)$$

$$\text{或} \quad \zeta^* = \zeta + k \nabla^2 \zeta, \quad (2)$$

其中 ∇^2 代表取定的一種差分拉普拉斯算子， ϕ 是高度， ζ 是相對渦度， k 是平滑係數，帶星號的是平滑化後的量。

但是過去的作者們並沒有發現這種平滑過程實質上可由湍流過程來實現。不難看出(2)式實際上可以由湍流擴散方程

$$\partial \zeta / \partial t = A \nabla^2 \zeta \quad (3)$$

求出， A 是交換係數。因爲(2)的差分式

$$\zeta^{\tau+1} = \zeta^{\tau} + \frac{A \Delta t}{(\Delta s)^2} \nabla^2 \zeta^{\tau}, \quad (4)$$

與(2)完全相當，只要

$$k = A \Delta t / (\Delta s)^2, \quad (5)$$

其中 Δt 是時間差分間隔， Δs 是 x 及 y 方向的差分間隔， τ 指 $t = \tau \cdot \Delta t$ 時的值。由此可見，利用湍流擴散項即可得到所要的平滑化，不須另外編製程序進行平滑化過程。

根據(2)可由各種不同的 Δt ， Δs 及 k 值，求出 A 的相應的不同數值。例如

* 1957 年 8 月 15 日收到。

Döös^[8] $\Delta s = 300$ 仟米, $\Delta t = 24$ 小時, $k = 1/16$, 得
 $A = 7 \times 10^8$ 厘米²/秒

Sigtryggsson^[4] $\Delta s = 600$ 仟米, $\Delta t = 12$ 小時, $k = 1/4$, 得
 $A = 2 \times 10^{10}$ 厘米²/秒

Машкович^[5] $\Delta s = 250$ 仟米, $\Delta t = 5$ 小時, $k = 3/160$, 得
 $A = 7 \times 10^9$ 厘米²/秒

(Машкович 沒有說疊代多少次平滑一下, 但另一文獻上提到每疊代二、三次平滑一下, 每次 $1\frac{1}{2}$ 小時。)

由此可見, 相應的 A 的數值, 比起一般用的 $A = 10^9$ 厘米²/秒 來, Döös 的太小, Sigtryggsson 的太大。

平滑化的效果可以由下項計算看出來, 由渦度方程式

$$\partial \zeta / \partial t + u \partial \zeta / \partial x + \beta v = A \nabla^2 \zeta, \quad (6)$$

其中 $\zeta = f^{-1} \nabla^2 \phi$. 令 $t = 0$ 時

$$\phi = \sum_{m,n} \phi_{m,n} e^{2\pi i(x/L_m + y/L_n)}, \quad (7)$$

其中 L 是波長, 那末(6)的解是

$$\phi = \sum_{m,n} e^{-\left(\frac{1}{L_m^2} + \frac{1}{L_n^2}\right) \pi^2 A t} e^{2\pi i \left(\frac{x-ct}{L_m} + \frac{y}{L_n}\right)}. \quad (8)$$

$c = u - \beta L^2/8\pi^2$. 顯然湍流擴散作用下, 擾動波長愈短, 平滑化愈厲害。在 24 小時

中, 阻尼因數 $e^{-2A \frac{\pi^2}{L^2} t}$ 的值 ($L_x = L_y = L$) 如下 (用差分式計算可以有些出入):

	$L = 3600$	2400	1200	600 仟米
Döös, Машкович	1.00	0.98	0.92	0.74
Sigtryggsson	0.74	0.55	0.08	0.00
Richardson ^[6]	1.00	0.99	0.98	0.91
	0.93	0.86	0.55	0.08

由此可見, 用 Sigtryggsson 的 A 平滑化, 可以影響到 $L = 3600$ 仟米的波, 所以只適宜於用求外推用的平均場, 用來消除小擾動就太過分。Döös 與 Машкович 的值比較合乎需要。

我們可以取 $A = 5 \times 10^9$, $\Delta t = 1$ 小時, $\Delta s = 300$ km, 這樣相當於疊代一次就平滑一次 (也可以二、三次再平滑化一次), 而 $k = 1/13$. 這時對各波長波動的阻尼因數見上表末一行。顯然這樣的分佈是比較更合適的。

值得注意的是 Richardson^[6] 的數值, Richardson 採用了 $A = 2 \times 10^8$ 厘米²/秒,

$\Delta t = 6$ 小時, $\Delta x = 400$ 仟米左右。相應的 k 值就只有 $1/350$ 。 A 與 k 的值都顯然太小。從阻尼情形來看, 24 小時內對一般短波衰減量也不到 $1/10$ 。因此 Richardson 的計算中小波動會有大發展的機會。在差分方程的穩定性來講, 穩定性也比較差。所以 Richardson 會算得大得不合理的氣壓傾向值。

由此可見挑選合式的 A 值對數值分析和數值預報都有很大的作用。實際大氣中的湍流過程使大氣不會發生過分的不穩定現象。

由於交換係數與尺度有關, 採取同一個交換係數數值來計算阻尼因數或許不大妥當。但是根據 Richardson^{[7][8]} 的結果可以知道在 $10^2 < l < 10^6$ 厘米之間, $A \sim 0.2 l^{4/3}$ 或 $0.6 l^{4/3}$ 。因 $L \sim l$, 由此可知考慮了 A 對 l 的變化後, 阻尼因數的指數中也仍有 $L^{-2/3}$ 的因子, 即仍然隨波長的減小而增大。姑且取比較小的 $A \sim 0.2 l^{4/3}$, 24 小時後的阻尼因數也都遠小於 $1/1000$ 。由此可見, 小尺度的擾動阻尼極為迅速, 很少能在長時間中保持發展。在這種情況下, 重力慣性波的不穩定性的計算不穩定性就不會成為應用原始方程來作數值預報的困難。而用平衡方程先過濾掉小系統^[9]或先把原始數據平滑化也都是不必要的。

依照 Richardson^[6] 用的格子 $l \sim \Delta s = 4 \times 10^7$ 厘米, 按 A 的公式應得 $A = 5 \times 10^9$; 固然 Richardson 的 $A \sim 0.2 l^{4/3}$ 公式是有限制的, 由於地轉偏向力等的作用, 它不能用到尺度在 10^7 厘米或更大的運動。但無論怎樣, 對 10^7 厘米尺度的運動, A 值不會比從這公式求得值小上十幾倍。因此 Richardson^[6] 在進行較大尺度的數值預報時所用的 A 值總是失之過小的。

總之, 考慮了湍流作用, 就會有平滑化過程, 並且小擾動的平滑化就自然會更強。因此不論是真的或是假的小尺度擾動的猛烈發展 (包括計算不穩定性) 都可以避免掉, 而數值分析及預報也可以更順利更自然的進行。

參 考 文 獻

- [1] Thompson, P. D., *Tellus*, **8** (1956), 384—393.
- [2] Shuman, F. G., *Tech. Mem.*, JNWPU, No. 7.
- [3] Döös, B. R., *Tellus*, **8** (1956), 76—81.
- [4] Sigtryggsson, H. and A. Wiin-Nielson, 斯德哥爾摩大學氣象系油印報告, 共 33 頁.
- [5] Мамкович, С. А., *М. и Г.*, 1957, № 1, 8—18.
- [6] Richardson, L. F., *Weather prediction by numerical process*, Cambridge Univ. Press, 1922, 共 422 頁.
- [7] Richardson, L. F., 及 H. Stommel, *J. Meteor.*, **5** (1948), 238—240.
- [8] Richardson, L. F., *Proc. Roy. Soc. (A)*, **110** (1926), 709—737.
- [9] Eliassen, A., *Sc. Report*, No. 4, Univ. Calif. (Los Angeles), 1956 年 3 月, 共 108 頁.

SMOOTHING PROCEDURE IN NUMERICAL ANALYSIS AND FORECASTING REALIZED BY TURBULENCE PROCESS

Koo CHEN-CHAO

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is pointed out in this note that the procedure of smoothing according

$$\phi^* = \phi + k \nabla^2 \phi,$$

(∇^2 the finite difference Laplacian) used in numerical analysis and forecasting, after every time step, is equivalent to introducing the turbulence term with

$$k = A \frac{\Delta t}{(\Delta s)^2},$$

where A is the austausch coefficient, Δt the time step and Δs the horizontal grid-size. It is also shown that the rate of damping of the wave for different wave length may be estimated from

$$\phi = \sum_{m,n} \phi_{m,n} e^{-\left(\frac{1}{L_m^2} + \frac{1}{L_n^2}\right) \pi^2 A t} e^{2\pi i \left(\frac{x - ct}{L_m} + \frac{y}{L_n}\right)},$$

which is a solution of the equation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta v = A \nabla^2 \zeta,$$

with $\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi$. It is evident that the small-scale waves damp much

more rapidly than the large-scale ones as the damping term involves L^{-2} in the exponential. Damping factor for 24hr with different values of A used by different authors are computed. A proper constant value of A seems to be 5×10^9 (see tables) for $\Delta s = 300$ km and $\Delta t = 1$ hr. Richardson's result of enormous tendency is attributed to the weak smoothing with small values of austausch (2×10^8) for the scale of the motion chosen ($l \sim \Delta s = 400$ km). It is easily seen that even with Richardson's formula $A = 0.2 l^{4/3}$ ($10^2 < l < 10^6$), the damping effect still increases with the decrease of wave length L , because in this case there is still a factor $L^{-2/3}$ in the exponential of the damping term. Therefore small scale motion is damped very effectively with the value of A given by the above formula.

It is emphasized that with turbulence term the smoothing of initial data ahead by a separate program and the use of balance equation at the initial moment are all not necessary; and the real instability of the inertio-gravitational wave and the false instability in computation will be no longer a serious problem. Thus the work of numerical analysis and forecasting, even with primitive equations of motion, could be carried out with more success.