气 象 学 报
第27卷 第4期 1956年12月

论 著

斜压大气中渦旋运动方程及其在天气預报中的应用*

謝义炳 陈秋士
(北京大学)

提 要

本文根据流体力学的基本理論，得出了斜压大气中的渦旋运动方程．并討論了决定渦旋运动的六个基本因子．对日常应用的高空引导观念給予比較明确的物理解釋并加以修正．文中对这方程在預报台風移动的应用作了初步說明，也附帶簡單地談到了中緯度系統的移动．在附录中还指出了关于系統內力作用的誤解，幷簡單地討論了台風运动的摆动周期和振幅．

一．引 言

渦旋是指具有渦旋中心的流場区域，如气旋、台風、反气旋等，对于天气現象(包括降水等)有密切的关系．关于它們的移动，人們早已在預报天气的实踐中积累了大批的經驗規律．但直到目前还缺乏一个完善的理論，把这些經驗規律总結起来提高到理論阶段，再从而改进和提高我們的預报質量．

1948年起，Rossby[1,2]首先从理論上討論了渦旋的运动，指出了在渦旋区域內由于緯度变化所造成的內力．而后叶篤正[3]、郭曉嵐[4]、正野重方[5]、Takeuchi[6]对正压封閉系統的兩維渦旋作了比較詳細的研究．在Magata[7]的工作中，已經开始提到了斜压性，不过他沒有得出結果．在Yoshitake[8]的著作中，对这問題有了进一步的發展，他列出了关于开放系統的比較全面的运动方程，幷对影响开放系統的內力作了初步討論．但他沒有考虑到外力及斜压性的作用．

在本文中將从事下列三方面的工作：

1. 全面地分析一下决定大气中渦旋运动的基本因子；

* 北京大学与中央气象局关于中国降水問題研究合同报告之二．1956年8月1日收到．

2. 对引导观念提供一个比較严格的动力学基础，并对日常所采用的定性的經驗法則，加以修正和补充；

3. 初步定量地計算渦旋边界比較明确的台風的运动，并附帶討論一些中緯度天气系統的移动。

二. 渦旋运动的基本方程

取一运动坐标 $oxyz$，其原点位于渦旋中心，随渦旋一起运动，x 軸指向东方，y 軸指向北方。把地球中心假設是不动的，其上放一固定坐标 $o'x'y'z'$。考虑大气是理想流体，推导出运动坐标 $oxyz$ 中的动力学方程。

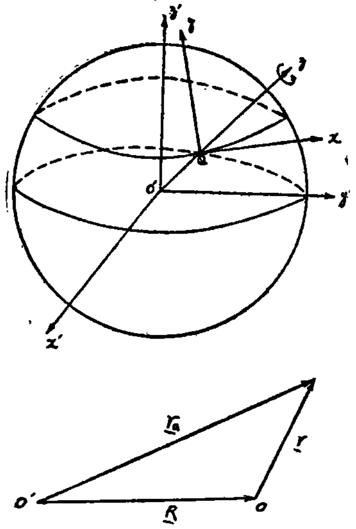

圖 1. 固定坐标与运动坐标

$\vec{r}$ 为运动質点相对于运动坐标 $oxyz$ 原点的矢量半徑；

$\vec{V}_r$ 为运动質点相对于运动坐标 $oxyz$ 的速度；

$\vec{R}$ 为运动坐标原点相对于固定坐标原点的矢量半徑，它的絕对值是地球半徑；

$\vec{\omega}$ 为运动坐标 $oxyz$ 相对于固定坐标之角速度；

$\vec{r}_a$ 为質点相对于固定坐标原点的矢量半徑，$\vec{r}_a=\vec{R}+\vec{r}$；

$\vec{V}_0$ 为运动坐标原点相对于固定坐标的速度；

$\vec{F}$ 为質点所受的質量力。

根据运动坐标与固定坐标中質点运动的关系，得

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{F}-2(\vec{\omega}\times\vec{V}_r)-\frac{d\vec{V}_0}{dt}-2(\vec{\Omega}\times\vec{V}_0)-$$

$$-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{R})-\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \qquad (1)$$

这里 $\vec{\Omega}$ 为地球角速度。

令 $\vec{\omega}'$ 表示运动坐标 $oxyz$ 相对于地面运动而产生的角速度，則 $\vec{\omega}=\vec{\Omega}+\vec{\omega}'$。

当渦旋移动为 10 米/秒时，$|\omega'|=\frac{10}{6.4\times10^6}\approx1.6\times10^{-6}$ 秒$^{-1}$，而 $|\vec{\Omega}|=7.29\times10^{-5}$ 秒$^{-1}$，所以 $|\vec{\Omega}|\gg|\vec{\omega}'|$。

因为 $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=0$， 所以 $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}+\frac{d\vec{\omega}'}{dt}=\frac{d\vec{\omega}'}{dt}$。

当渦旋加速度为 6 緯度弧/日^2，半徑 $r\sim7^\circ$ lat 时，則

$$\frac{d\vec{\omega}'}{dt}\times\vec{r}\sim7.9\times10^{-6}\text{ 米/秒}^2.$$

在第三节的各項的数量級的比較中，可以看出其他各項都是 10^{-5} 或 10^{-4} 米/秒^2 的数量級，故 $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times r$ 可以忽略。

$\vec{\Omega}\times[\vec{\Omega}\times(\vec{R}+\vec{r})]$ 为地球自轉所造成的慣性离心力。

重力 $\vec{g}=\vec{F}-\vec{\Omega}\times[\vec{\Omega}\times(\vec{R}+\vec{r})]$。

在方程(1)中，拋去小量再經过移項后，則得

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt}+2\Omega\times\vec{V}_0=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{g}-2(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r)-\frac{d\vec{V}_r}{dt}. \tag{2}$$

在流体力学的一般問題中，是已知运动坐标的运动情况，求相对速度 $\vec{V}_r$。但在本文所处理的問題中，是根据已知的渦旋中的流場結構，即已知 $\vec{V}_r$ 来求 $\vec{V}_0$。

因 $\vec{V}_r$ 是运动坐标系統中广闊空間的速度場，当处理渦旋运动时，仅在渦旋区域內了解它的結構。因此必須对这渦旋区域积分，把所考虑的 $\vec{V}_r$ 限制在渦旋区域內。

設 τ 为渦旋的区域，$d\tau$ 为体积元素，則

$$\int_\tau\rho\left[\frac{d\vec{V}_0}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_0\right]d\tau=\int_\tau\rho\vec{g}d\tau-\int_\tau\nabla pd\tau-\int_\tau\rho\frac{d\vec{V}_r}{dt}d\tau-2\int_\tau\rho(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r)d\tau. \tag{3}$$

根据場論及連續方程，幷注意

$$\int_\tau\rho\left[\frac{d\vec{V}_0}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_0\right]d\tau=M\left[\frac{d\vec{V}_0}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_0\right],$$

其中 $M=\int_\tau\rho d\tau$，則方程(3)可写为

$$M\left[\frac{d\vec{V}_0}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_0\right]=M\vec{g}-\oint_\sigma pd\sigma-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\vec{V}_rd\tau-\oint_\sigma(\rho\vec{V}_r)\vec{V}_r\cdot d\sigma-$$
$$-2\int_\tau\rho(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r)d\tau, \tag{4}$$

其中 σ 为包圍 τ 之面积，$d\vec{\sigma}$ 为 σ 之矢量面积元素。

在方程 (4) 中，左端仅是时間 t 的函数；而右端在已知外界温压場与渦旋內部的風速結構时，也只是 t 的函数。因此，可按照質点动力学方法，解出渦旋中心运动的軌迹来。

由方程(4)可知，渦旋加速运动是由下面六个因子决定的：

1）$-2\vec{\Omega}\times\vec{V}_0$ 由于渦旋在自轉地球上运动，因此运动时产生一科里奥利力。

2) $-\oint p\,d\vec{\sigma}$ 为通过渦旋周圍所加給渦旋的总压力。

3) $\vec{Mg}$ 为整个渦旋区域内所受的重力，当只考虑渦旋的水平移动时，鉛直方向的重力不發生作用。

4) $-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho\vec{V}_r d\tau$ 为渦旋区域內相对于原点在渦旋中心的运动坐标的总动量的变化。

5) $-\oint(\rho\vec{V}_r)\vec{V}_r\cdot d\vec{\sigma}$ 把渦旋看成一个开放系統，在它和外界产生相对于运动坐标的动量交換时，对渦旋移动的影响。

6) $-2\int_{\tau}\rho(\vec{\Omega}\times\vec{V}_r)d\tau$ 渦旋內部風速結構对渦旋运动所产生的內力，其中包含罗斯培所曾經分析过的力。

大气渦旋其所以能發生水平的加速移动，正是由于上面除开重力作用以外的其他五个因子決定的。

在这里沒有考虑近地面边界層的湍流摩擦作用，也沒有考虑地形对渦旋移动的影响。在实际的大气里，它們是有一定的作用的。

三. 基本方程各項物理意义的分析和討論

写出方程(4)的水平标量方程，以 φ_0 表示渦旋中心所在的緯度

$$M\left(\frac{dV_{0x}}{dt}-2\Omega\sin\varphi_0 V_{0y}\right)=-\oint_{\sigma}Pd\sigma_x-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho V_x d\tau-\oint\rho V_x\vec{V}_r\cdot d\vec{\sigma}$$

$$-2\int_{\tau}\rho(V_z\Omega\cos\varphi-V_y\Omega\sin\varphi)d\tau, \tag{5}$$

$$M\left(\frac{dV_{0y}}{dt}+2\Omega\sin\varphi_0 V_{0x}\right)=-\oint_{\sigma}Pd\sigma_y-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho V_y d\tau-\oint_{\sigma}\rho V_y\vec{V}_r\cdot d\vec{\sigma}$$

$$-2\int_{\tau}\rho\Omega\sin\varphi V_x d\tau. \tag{6}$$

1. 气压項　把实际大气中的气压場和温度場看成是由渦旋外界溫压場和內部溫压場疊加而成的。

令 S 表示渦旋某一高度的水平面积，则

$$\iint_s\frac{\partial P}{\partial x}ds=S\overline{\frac{\partial P}{\partial x}},\quad \iint_s\frac{\partial T}{\partial x}ds=S\overline{\frac{\partial T}{\partial x}},$$

$\overline{\frac{\partial P}{\partial x}}$，$\overline{\frac{\partial T}{\partial x}}$ 相当于大型溫压場在 S 区域內的平均梯度。

把渦旋区域取为圓柱坐标 r,θ,z，則

$$-\oint P d\sigma_x = -\int_0^{2\pi}\int_0^{z_1} P\cos\theta\, r d\theta\, dz = -\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, r d\theta\int_0^{z_1} P dz,$$

z_1 为渦旋所达的高度，θ 为周界的法綫方向和 x 軸之夾角，也等于方位角。

$$-\int_0^{z_1} P dz = -\int_0^{z_1}\rho RT dz = \frac{R}{g}\int_{P(0)}^{P(z_1)} T dp = \frac{R}{g}T_m[P(z_1)-P(0)] =$$

$$= \frac{R}{g}P_0 T_m\left(e^{-\frac{gz_1}{RT_m}}-1\right) = \frac{R}{g}P_0 T_m\left(e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}-1\right),$$

这里 $\alpha' = \frac{gz_1}{R}$，因此

$$-\int_0^{z_1}\oint P d\sigma_x = \frac{R}{g}\int_0^{2\pi} P_0 T_m\left(e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}-1\right)\cos\theta\, r d\theta = \frac{R}{g}\iint_s \frac{\partial}{\partial x}\left[P_0 T_m\left(e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}-1\right)\right] ds,$$

因为
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P_0 T_m\left(e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}-1\right)\right] = -A\frac{\partial P_0}{\partial x} - B\frac{\partial T_m}{\partial x},$$

其中
$$A = \frac{R}{g}T_m\left(1-e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}\right),\quad A>0,$$

$$B = \frac{R}{g}P_0\left[1-e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}\left(1+\frac{\alpha'}{T_m}\right)\right],\quad B>0,$$

故
$$\oint P d\sigma_x = -AS\overline{\frac{\partial P}{\partial x}} - BS\overline{\frac{\partial T_m}{\partial x}}.$$

在方程(5)和(6)中，当只考慮地轉偏向界与外界总压力达到平衡时，即

$$-2\Omega\sin\varphi_0 V_{0y} = -\frac{AS}{M}\overline{\frac{\partial P_0}{\partial x}} - \frac{BS}{M}\overline{\frac{\partial T_m}{\partial x}} = -\alpha\overline{\frac{\partial P_0}{\partial x}} - \beta\overline{\frac{\partial T_m}{\partial x}} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{7}$$

$$2\Omega\sin\varphi_0 V_{0x} = -\frac{AS}{M}\overline{\frac{\partial P_0}{\partial y}} - \frac{BS}{M}\overline{\frac{\partial T_m}{\partial y}} = -\alpha\overline{\frac{\partial P_0}{\partial y}} - \beta\overline{\frac{\partial T_m}{\partial y}} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{8}$$

其中 $\alpha = \frac{AS}{M}$，$\beta = \frac{BS}{M}$，近似地把 α, β 看为常数，則 $\psi = \alpha\overline{P_0} + \beta\overline{T_m}$。

根据方程(7)，(8)可知渦旋將沿地面等压綫和渦旋所在厚度內的等温綫的合成方向运行。它們各占之比值可由 α 和 β 值决定。(关于不同情形下的 α 和 β 的数值，可参考表1、2)当大气是正压时，渦旋將沿大型温压場的等压綫方向移动。

上述关系也可用另一种方法来表示：因为

$$-\int_\tau \frac{\partial P}{\partial x} d\tau = -\iint_s\int_0^{z_1}\frac{\partial P}{\partial x} dz ds,$$

令 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 以地轉風关系近似地代入，則 $-\frac{\partial P}{\partial x} = -2\Omega\rho\sin\varphi\, V_y$，所以

$$-\int_\tau \frac{\partial P}{\partial x} d\tau = -2\Omega\sin\varphi_0\int_0^{z_1}\overline{V}_y\iint_s \rho ds dz,$$

$\overline{V}_y$ 表示渦旋區域內大型平均流場，令 Y 表示大型流場在各高度的平均，則

$$-\int_{\tau}\frac{\partial P}{\partial x}d\tau=-M2\Omega\sin\varphi_0\dot{Y},$$

当只考虑地轉偏向力与气压項达到平衡时，則

$$V_{0y}=\dot{Y};\tag{9}$$

同理

$$V_{0x}=\dot{X}.\tag{10}$$

上式表示，渦旋將沿着它所在厚度內各層的大型流場的平均方向运行，其速率为各層大型流場速率的平均値。

这里为了討論物理意义的方便，在很多假定下获得了上述的結果。在以下几节的討論中可以看出，这些假定在实际大气中是有实用意义的。因此，那种既不管風速随高度变化的程度，也不管渦旋的厚度，而只認为渦旋將沿着某一确定的高度例如700毫巴上的風速运行的引导观念，未免过分簡化。銳尔(Riehl)[9]在总結台風运动的經驗規律时，曾經指出，米契尔(Mitchell)[10]的关于某一高度的引导观念应該由某一相当厚度的引导層的观念来代替。

在(9)，(10)兩式的推导中，曾利用地轉風的假定，在一定意义上不及(7)，(8)兩式謹严。

2. 渦旋区域內，相对于渦旋中心的动量的局地变化：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho V_x d\tau,\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho V_y d\tau.$$

把渦旋看成圓柱形的，积分区域換为圓柱坐标，則

$$V_x=V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta,$$

$$V_y=V_r\sin\theta+V_\theta\cos\theta,$$

其中

$$V_r=V_r(r,\theta,z,t),\quad V_\theta=V_\theta(r,\theta,z,t).$$

把它們用富氏級数对θ展开，則

$$V_r=a_0(r,z,t)+\sum_1^\infty a_n(r,z,t)\cos n\theta+\sum_1^\infty a'_n(r,z,t)\sin n\theta,$$

$$V_\theta=b_0(r,z,t)+\sum_1^\infty b_n(r,z,t)\cos n\theta+\sum_1^\infty b'_n(r,z,t)\sin n\theta,$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho V_x d\tau=-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{z_1}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\rho(V_r\cos\theta-V_\theta\sin\theta)rdrdzd\theta=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z\int_0^{r_0}\pi\bar{\rho}(a_1-b'_1)rdrdz=$$

$$=-\pi\int_0^z\int_0^{r_0}\left[\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}(a_1-b'_1)+\bar{\rho}\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}-\frac{\partial b'_1}{\partial t}\right)\right]rdrdz,$$

其中$\bar{\rho}$为ρ对θ的平均，r_0为渦旋的半徑。

如渦旋相对于中心的速度分速不是θ的函数，即軸对称的，并且風速結構随时間的变化也不破坏它的对称性，则a_1, b_1'与$\frac{\partial a_1}{\partial t}$，$\frac{\partial b_1'}{\partial t}$为零，因此$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho V_x d\tau=0$，同理$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho V_y d\tau=0$，即对渦旋运动不發生影响。

当渦旋相对于中心的速度不为对称时，例如一个新生的波动气旋，在南方的暖区的風速往往較大。此时，$b\neq 0$，并且$b_1'<0$，假定其它a_1，$\frac{\partial a_1}{\partial t}$，$\frac{\partial b_1'}{\partial t}$仍为零。因此

$$-\pi\int_0^{z_1}\int_0^{r_0}-\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}b_1' r dr dz=-\pi\,|\overline{b_1'}|\int_0^{z}\int_0^{r_0}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} r dr dz.$$

当气旋加深时，$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}<0$，产生一向东的加速度。

对軸对称的渦旋，在以后將可以看出它的强度变化对运动仍是有影响的，不过不是通过这項的作用所产生的。

3. 与外界产生相对于中心的动量交換，对渦旋运动的影响：

$$\oint_\sigma \rho V_x \vec{V}_r\cdot d\vec{\sigma}=\int_0^{z_1}\int_0^{2\pi}\rho V_x V_r r d\theta dz+\int_0^{r_0}\rho V_x V_z(z_1) r d\theta dr+\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\rho V_x V_z(0) r d\theta dr.$$

上式中把动量傳遞分为側面傳遞和垂直傳遞兩种。在前面都是把渦旋作为一个三度空間的整体来考虑的，假使分成很多層来考虑时，在斜压大气中渦旋各層所受的外力不一样，因而应該产生不同的速度。但是实际大气中，完整的渦旋几乎都有相当强的垂直运动。这种由于垂直运动而产生的上下动量傳遞，是斜压大气中渦旋能長期不被破坏的原因之一。只有在斜压性很强而垂直运动很弱时，渦旋才有傾斜的可能。

在开放系統中，这种通过渦旋边界的动量交換对渦旋的运动是有一定的影响的，它不仅可以影响渦旋的內部結構，也可能影响外部流場。由于目前观測紀录准确度的限止，本文对这項的作用还不能作詳細的討論。$\left(-\oint\rho V_y \vec{V}_r\cdot\partial\vec{\sigma}\right.$ 也可作类似的討論$\left.\right)$

4. 渦旋本身的流場在科里奥利力作用下所产生的內力。

根据球面三角的結果：

$$\sin\varphi=\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\frac{r}{R}\sin\theta+O_1\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

$$\cos\varphi=\cos\varphi_0-\sin\varphi_0\frac{r}{R}\sin\theta+O_2\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

其中O_1, O_2是包含$\left(\frac{r}{R}\right)^2$的高次項，可忽略。

沿x方向的內力为

$$-2\int_{\tau}\rho\Omega(\cos\varphi\, V_z-\sin\varphi\, V_y)d\tau=-2\Omega\int_{\tau}\rho V_z\left(\cos\varphi_0-\sin\varphi_0\frac{r}{R}\sin\theta\right)d\tau+$$

$$+2\Omega\int_{\tau}\rho(V_r\sin\theta+V_\theta\cos\theta)\left(\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\frac{r}{R}\sin\theta\right)d\tau.$$

假設 V_z, V_r, ρ 均不是 θ 的函数，即軸对称的，則

$$-2\int_{\tau}\rho\Omega(\cos\varphi_0\, V_z-\sin\varphi\, V_y)d\tau=-2\Omega\cos\varphi_0\,\overline{V}_zM+\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_rM.$$

r_0 是軸对称渦旋的半徑，V_z 为渦旋区域內的平均垂直运动，$\overline{V}_r$ 为渦旋区域內沿矢徑方向的平均速度，流出时为正，流入时为負。

与上相同，再假設 V_θ 不是 θ 的函数，則沿 y 軸方向的內力为：

$$-2\Omega\int_{\tau}\rho\sin\varphi\, V_z d\tau=\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_\theta M.$$

V_θ 为在渦旋区域內切向速度的平均值，气旋式旋轉时为正，反气旋式旋轉时为負。

由上可知，上升运动和輻合流入可造成一向西的分力，而下沉运动与輻散流出可产生一向东的分力。同理可看出，气旋式旋轉可造成一向北的分力，反气旋式旋轉可造成向南的分力。Rossby 曾首先得出这个結論[1,2]。

应該注意，在旋轉地球上，沿某一方向增强一作用力，并不等于說就增强該方向的分速度，关于此点在附录中將根据方程式的解再作說明。

在加速度略而不計时，上升运动与輻合流入的作用产生向北的分速，下沉运动和輻散流出則相反。气旋式流場造成一向东的速度，反气旋式流場則造成一向西的速度。

5. 由于整个渦旋运动所产生的科氏力 $2\Omega\sin\varphi_0\, V_{0y}$ 及 $2\Omega\sin\varphi_0\, V_{0x}$，这項物理意义很明显，無須再进行討論。

6. 加速度　在这里采用近似办法来討論它。根据下面第四节的数量級的比較，渦旋运动方程可以近似地写成前面的(7)(8)式，即

$$-2\Omega\sin\varphi_0\, V_{0y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{7}$$

$$2\Omega\sin\varphi_0\, V_{0x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{8}$$

把它作为第一近似値，并对它取微分，然后再略去 φ_0 的变化。則

$$\frac{dV_{0x}}{dt}=-\frac{1}{f_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{V_{0x}}{f_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{V_{0y}}{f_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=$$

$$=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{c}{f_0}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \tag{11}$$

其中 $f_0=2\Omega\sin\varphi_0$，$c=\sqrt{V_{0x}^2+V_{0y}^2}$，$\frac{\partial}{\partial l}$为沿着渦旋运动方向的微商。同理

$$\frac{dV_{0y}}{dt}=\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\frac{c}{f_0}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \tag{12}$$

在(11)和(12)中，右端第一項表示大型气压場和温度場的局地变化的影响；第二項为沿着渦旋运动方向温压場梯度分布不均的影响。

在只考虑加速时，科氏力与周圍作用于渦旋的作用力三者平衡时，方程(5)和(6)可簡化成

$$V_{0x}=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{1}{f^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{c}{f^2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{13}$$

$$V_{0y}=\frac{1}{f}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{f^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{c}{f^2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \tag{14}$$

因此渦旋有向大型温压場的負变压中心或負变温中心移动的分速，在前进方向上 ψ 場的梯度加强时，速度也加大。当台風移至南下寒潮的边沿时，加速度的作用是相当大的。

李宪之[11]曾經指出，热帶气旋常向气压降低处移动。不过应該說明在(13)，(14)所考虑的是大型温压場的变温和变压，不是当台風移动时，由于本身运动所造成的位于它区域內部前方的减压区。

四．在預告台風移动时的应用

在大气所产生的各种渦旋中，把台風看成一个大型流場中的渦旋来处理，是比較最符合于客观事实的。把 V_r, V_θ, V_z, ρ 等看成不是 θ 的函数也是相当正确的。

根据上节的討論，方程(5)，(6)可以改写为：

$$\frac{dV_{0x}}{dt}-2\Omega\sin\varphi_0 V_{0y}=-\alpha\frac{\partial\overline{P_0}}{\partial x}-\beta\frac{\partial\overline{T_m}}{\partial x}-\frac{1}{M}\oint_0(\rho V_x)\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{d\sigma}-$$
$$-\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\rho V_x d\tau-2\Omega\cos\varphi_0\overline{V_z}+\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V_r}, \tag{15}$$

$$\frac{dV_{0y}}{dt}+2\Omega\sin\varphi_0 V_{0x}=-\alpha\frac{\partial\overline{P_0}}{\partial y}-\beta\frac{\partial\overline{T_m}}{\partial y}-\frac{1}{M}\oint_0(\rho V_y)\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{d\sigma}-$$
$$-\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\rho V_y d\tau+\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V_\theta}. \tag{16}$$

在台風中，我們考虑 V_θ, V_r 等随时的变化也是軸对称的，則相对渦旋中心的动量变化为零。

如要討論台風与外界的动量交換，先把台風中的風速結構略为說明一下。我国西

太平洋有关台風飞机探测的記录比較少，現在利用已知的加勒比海颶風的結構来作說明。

台風的維持相当于一个热机。它所以能維持不停的上升运动，主要是依靠热中心的作用。这个热中心是通过下層輻合上升所釋放的凝結潛热而維持的。海面的等温膨脹，使海水成为該热机的一个良好的热源[9]。因此，台風实际上是一个运动的具有热机作用的渦旋机構。它是一个开放系統，質量不停地同外界交換着。

按照乔頓 (E. S. Jordan) 的統計結果[12]，在 30000 呎台風气旋式旋轉向上減弱很慢，而 30000 呎以上則迅速向反气旋式旋轉过渡。V_r 的流出主要在 30000 呎以上，流入主要在 10000 呎以下，而 7000 呎流入和 Hughes[13] 在 1000 呎高度統計結果相比較，只是它的三分之一。在 10000—30000 呎的一層間 V_r 很小，摆动在流入与流出之間。

上面仅是台風的統計結果，对个别情形当然有些出入。在西太平洋的台風在尺度上更不是完全如此相同，但有它一定的相似性。

因此在考慮台風系統內外的动量交換时，主要应該討論近地面層輻合与上層輻散所产生的动量差，而中層的交換只是通过內部的上下底来产生的，側面的交換則很少。

令 σ_1 表示下層輻合区域的边界，σ_2 为上層輻散区域的边界，M 为整个台風的总質量，$|V_r|$ 为运动坐标中徑向速度的絕对值。因此

$$\frac{1}{M}\oint_{\sigma}(\rho\vec{V}_r)\vec{V}_r\cdot\vec{d\sigma}=\frac{1}{M}\left[\int_{\sigma_2}\rho\vec{V}_r\,|V_r|\,d\sigma-\int_{\sigma_1}\rho\vec{V}_r\,|V_r|\,d\sigma\right].$$

我們所考慮的动量是相对于台風中心的运动坐标系而言的。它在某一層內的积分实际上表示这層的速度相对于台風的平均速度所产生的偏差。当台風的平均速度与它周圍的流場的速度一致时，这动量交換的数值將很小。由于缺乏精确的紀录，在目前对該項作数量級的估計还很困难，只好姑且忽略，留待將来再作討論。

因此方程(15)和(16)可簡化为

$$\frac{dV_{0x}}{dt}-2\Omega\sin\varphi_0\,V_{0y}=-\frac{\partial\psi}{\partial t}-2\Omega\cos\varphi_0\,\overline{V}_z+\frac{2}{3}\,\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r, \tag{17}$$

$$\frac{dV_{0y}}{dt}+2\Omega\sin\varphi_0\,V_{0x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_\theta. \tag{18}$$

比較方程(17)，(18)各項的数量級：

1. 加速度

$\frac{dV_{0x}}{dt}$ 按吉武 (Yoshitake)[6] 的統計結果为 -5×10^{-5}—5×10^{-5} 米/秒，但由方程(11)和(12)可知，它在东西風过渡帶时常很大。

$\frac{dV_{0y}}{dt}$ 和 $\frac{dV_{0x}}{dt}$ 在数量級上相同，或者还要小些。

2. 地轉偏向力

$$2\Omega\sin\varphi_0 V_0 \sim 2\times7.29\times10^{-5}\times\frac{1}{2}\times10=7.29\times10^{-4}\text{ 米/秒}^2,$$ 設 $v_0\sim10$ 米/秒，φ_0 为 30°.

3. 外力項

$$-\alpha\frac{\partial\bar{P}_0}{\partial x}-\beta\frac{\partial\overline{T}_m}{\partial x}\sim4-8\times10^{-4}\text{ 米/秒}^2.$$

4. 內力項

$$2\Omega\cos\varphi_0\overline{V}_z,$$

对台風而言 $\overline{V_z}\sim20$ 厘米/秒，則

$$2\Omega\cos\varphi_0\overline{V}_z\sim2.5\times10^{-5}\text{ 米/秒}^2$$

$$\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r,$$

就台風的下層而言 $\overline{V}_r\sim4.2$ 米/秒[13]，就整个台風的平均而言是很小的 $\overline{V}_r\sim1.5$ 米/秒．設 $r_0\sim6°$ lat．則

$$\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r\sim5\times10^{-6}\text{米/秒}^2.$$

$$\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_\theta,$$

設 $\overline{V}_\theta\sim12$ 米/秒，則

$$\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_\theta\sim5\times10^{-5}\text{ 米/秒}^2.$$

因此，根据上面結果略去較小的項，則公式(17)，(18)可以改写为公式(7)，(8)：

$$-2\Omega\sin\varphi_0 V_{0y}=-\alpha\frac{\partial\overline{P}_0}{\partial x}-\beta\frac{\partial\overline{T}_m}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\tag{7}$$

$$2\Omega\sin\varphi_0 V_{0x}=-\alpha\frac{\partial\overline{P}_0}{\partial y}-\beta\frac{\partial\overline{T}_m}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}.\tag{8}$$

台風將沿着地面等压綫和台風所在厚度內的平均等温綫間的合成方向运行．这里給台風引导观念作一个理論上的說明，并加以修正．

α,β 在不同的 T_m，与不同的渦旋厚度下有不同的数值．

$$\alpha=\frac{AS}{M}=\frac{RT_m}{\Delta P}(1-e^{-\frac{\alpha'}{T_m}})=\frac{RT_m}{P_0},\quad \Delta P=P_0-P_{(z_1)},$$

$$\beta=\frac{BS}{M}=\frac{RP_0}{\Delta P}\left[1-e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}\left(1+\frac{\alpha'}{T_m}\right)\right]=R\left[1-\frac{\alpha'}{T_m}\left(e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}\Big/1-e^{-\frac{\alpha'}{T_m}}\right)\right].$$

在計算 α 时，采用 $P_0=1013$ 毫巴，$\frac{\partial P_0}{\partial x}$ 之單位为毫巴/10 lat° 或 0.1 毫巴/lat°，v_0 的單位用 lat°/日，則 $\frac{\alpha}{2\Omega}$ 值可見表 1．

表 1

T_m	230	240	250	260	270	280	290
$\alpha/2\Omega$	0.312	0.326	0.340	0.354	0.367	0.381	0.395

令 $\frac{\partial T_m}{\partial x}$ 之單位采用 °C/10 lat° 或 0.1°C/lat°，則 β 值如表 2：

表 2

T_m \ $\beta/2\Omega$ \ z	1500	3000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
230	0.155	0.282	0.446	0.521	0.593	0.658	0.721	0.782
240	0.144	0.272	0.431	0.504	0.569	0.635	0.704	0.756
250	0.136	0.262	0.418	0.486	0.554	0.621	0.689	0.737
260	0.132	0.251	0.405	0.475	0.537	0.599	0.659	0.714
270	0.126	0.247	0.393	0.457	0.520	0.574	0.638	0.695
280	0.120	0.234	0.378	0.447	0.509	0.564	0.623	0.675
290	0.115	0.229	0.370	0.437	0.493	0.548	0.605	0.657

温度場对台風运动所起的作用，在預报的实踐中已日益發現．辛甫生(Simpson)[14]曾經指出：热帶風暴將沿着700—500毫巴的等厚度場的暖舌移动．高桥浩一朗等[15,16]根据1948—1950年的資料，用統計方法研究了台風速度和路徑附近的地面温度場的关系．这結果列在表3和表4中，均可由方程(7)，(8)加以說明．

表3. 相間2°F的地面等温綫距离和台風速度

等温綫距离(單位111千米)	10	5	2	1.5	1.0	0.8	0.6
平均速度(千米/小时)	20	23	39	47	62	72	96

表4. 台風区域內的地面温差与速度

温 差 (°F)	1~2	3~4	5~6	7~8	9~10	11以上
平均速度 (千米/小时)	18	23	31	35	58	66

在公式(7)，(8)里忽略了加速度和內力的作用，完全的方程可写成：

$$V_{0x}=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{1}{f_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}-\frac{c}{f_0^2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{1}{3}\cot\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_\theta, \tag{19}$$

$$V_{0y}=\frac{1}{f_0}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{f_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}-\frac{c}{f_0^2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\cot\varphi_0\overline{V_z}-\frac{1}{3}\cot\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r. \tag{20}$$

台風的半徑愈大，風速愈强，則內力的作用愈大．就大型温压場的平均分布来說，$\frac{\partial\psi}{\partial x}$是很小的．按照 Fujita[17] 对西太平洋台風的經驗公式，中心气压愈低，則半徑和風速强度愈大．因此，中心气压值愈低，$\overline{V}_z$和$\underline{V}_r$均較大，应造成較大的向北分速．表5

是根据安藤正[18]所統計的1939—1940年的資料再进行統計的。統計的結果与上面的推論基本符合。

表5. 台風中心气压和向北分速

中心气压（毫米）	>750	750—740	740—730	730—720	<720
平均速度（千米/小时）	5(33)	9(57)	12(73)	20(53)	13(32)

括号內为所平均的台風次数，中心气压小于720毫米的台風均在30°N以南，精确性較差。

(19)式中$\overline{V_\theta}$的作用造成一向东的分速，随半徑的加大而增大。在20°N以北，台風主要为西風帶所牽引，它的速度应随半徑的增大而增大。在20°N以南，主要为东風帶所牽引，速度应随半徑的增大而减小。表6列出了安藤正[18]根据1938—1941年台風資料所統計的結果，其中速度不是东西向的速度，而是包括南北向的分速在內的，因此在个別的地方略有出入，但基本趋势与根据(19)式的推論是完全一致的。

表6. 台風的平均半徑和速度

平均半徑（千米）		<150	150—300	300—450	450—600	>600
平均速度	30°以北	——	34(13)	34.5(21)	38.0(15)	50(6)
	20°—30°	14(2)	18(21)	19.5(45)	23.0(20)	20(20)
千米/小时	20°以南	24.5(6)	18.5(32)	21.5(34)	21.0(36)	16(21)

括号內为所統計的台風个数。

由上面可以看出，台風的內力对它的移动是有影响的。寒潮的侵入或处在东西風过渡帶时，加速度的作用也是相当大的。从观測知道台風除了一般的平均移动外还有擺动。因此要比較精确地决定台風的运动，必須根据方程(17)和(18)解出台風的軌迹来，但此点只有在$\overline{P_0}(x,y,t)$和$\overline{T_m}(x,y,t)$和$\overline{V_r}$, $\overline{V_\theta}$, $\overline{V_z}$等已知的情况下才能作到，还有待于进一步努力。在一些簡單的典型的ψ場的形势下，也可以求出方程(17)或(18)的解来。但只具理論兴趣，实用价值不高，故只作为附录列入本文之后。

由第三节已知，方程(7)，(8)也可以表成方程(9)，(10)

$$V_{0x}=\dot{X}, \tag{9}$$

$$V_{0y}=\dot{Y}. \tag{10}$$

乔頓 (Jordan)[12]曾根据平均台風結構計算平均运动。他把台風內部流場看成是

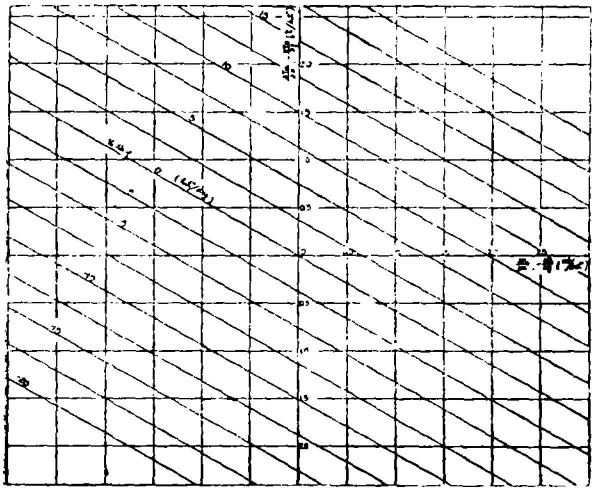

圖 2. 渦旋运动速度的圖解, $T_m=280°K$, $Z=10$ 千米

縱坐标 $\frac{\partial p_0}{\partial x}$, $\frac{\partial p_0}{\partial y}$, (mb/lat)

横坐标 $\frac{\partial T_m}{\partial x}$, $\frac{\partial T_m}{\partial y}$. (°C/lat)

斜 綫 $V_0 \sin \varphi$ (lat/日)

軸对称的。由台風运行方向兩側的在一定半徑內的風速相减，来求得外界流場的平均風速。然后再把4000—30000 呎各層的計算結果加以平均，得出結果为 9.7 浬/小时，而实际平均移动速率为 11 浬/小时，此誤差完全在記录誤差范圍內。其所以能获得較好的結果，公式 (9) 和 (10) 可給以理論說明。

在天气圖上决定台風的运动时，主要根据公式 (7)，(8)，已知 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ 后，可以仿地轉風計算尺的方法，直接由圖形求出速度值来。圖 2 和圖 3 是其中的一个例子，这圖解随渦旋的厚度与平均温度而不同。

在根据天气圖来决定 ψ 場的梯度时，可以采取兩种办法。

1. 把台風內部温压場消掉，作出外界的 ψ 場

这 ψ 場是比較精确的引导气流。由已經分析好各層的高空圖来决定台風的高度，再由各站的探空記录算出 ψ 值来。分析时，可对台風半徑以內的 ψ 值不加考虑，而根据外界 ψ 場用內延法来补足。这样作出的 ψ 場基本上是大型 ψ 場。圖 4 是計算台風运动的一个例子，結果是比較好的。但作 ψ 場时，任意性較大。

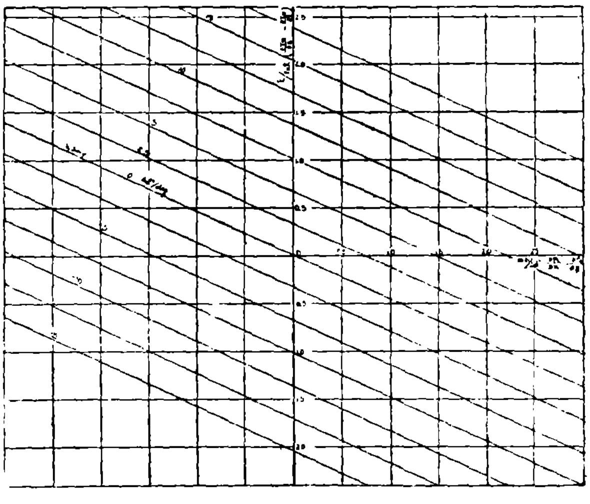

圖 3. 渦旋运动速度圖解 $T_m=250°K$, $Z_1=10$ 千米

說明同圖 2

为要比較精确地决定速率，可采用 6 小时計算一次的重复計算的方法。因我們假定 ψ 場不随时間变化，超过 24 小时以上的預报可能發生相当大的誤差。

在台風区域附近記录稀少，还沒有一个严格的客观标准来确定台

風的半徑，給这項工作帶来很大的困难。圖4的例选在大陆上，即是为了爭取較多的記录。

2. 根据台風边界上的 ψ 值来决定 ψ 場的梯度

把台風周界看成圓形，計算时以台風中心为圓心，台風半徑为半徑作圓。如圖 5 在

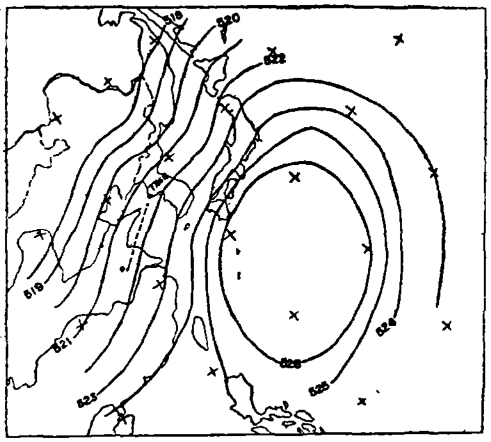

圖 4. 用 ψ 場計算台風运动实例，实綫是 1953 年 7 月 5 日 15z 世界时的大型 ψ 場，單位 10 lat²/日。○是当时渦旋中心位置，▲是24小时后观測位置，●是計算的24小时渦旋中心位置

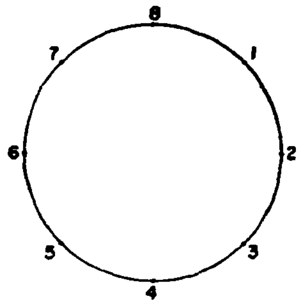

圖 5. 方程(21)，(22)所取渦旋边界上 ψ 值的位置

圓周上取 8 个点：2, 6 是沿經过台風中心的緯綫的，4, 8 是沿經过台風中心的經綫的，其他四点以 45° 角插入各点之間。由該 8 点的 ψ 值根据下式决定 ψ 的梯度值。今 r_0 为台風半徑，則

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{6r_0}\{(\psi_2-\psi_6)+\sqrt{2}[(\psi_1-\psi_7)+(\psi_3-\psi_5)]\}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{6r_0}\{(\psi_8-\psi_4)+\sqrt{2}[(\psi_3-\psi_1)+(\psi_5-\psi_7)]\}. \tag{22}$$

由上式即可求 V_{0x} 和 V_{0y} 来，如事先作好如圖 3，4 的圖表則可更快些。

速率和方向可由下式决定：

$$c=\sqrt{V_{0x}^2+V_{0y}^2}, \tag{23}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{V_{0x}}{V_{0y}}. \tag{24}$$

以上面的速度来决定 24 小时的位置，是簡化后的瞬时速度的外推法。如采用在同一張圖上的 6 小时一次的重复計算方法，可不致使外推过長。但此法在操作上是很困难，因在 6 小时以后，再行作圓时，圓周往往穿过台風內部，不能得到外界 ψ 場的梯度。

圖 6 和 7 是采用外推 24 小时的办法討論了兩个例子。

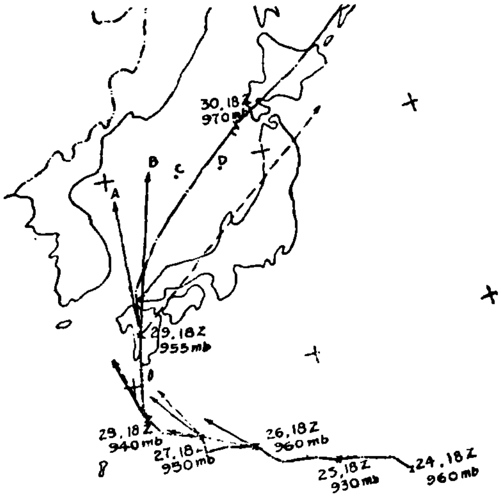

圖 6. 1955年9月台風中心运动实例，折綫是台風中心，实际观测路徑，29日前有飞机探测紀录，間隔六小时。实綫箭头是計算24小时位移，断綫箭头是天气圖預报24小时位移。*A* 点是29日未加加速度訂正的24小时后計算位置，*B* 点是加了加速度訂正后的計算位置，*C*, *D* 分别是30日 18z 世界时500毫巴及700毫巴中心位置

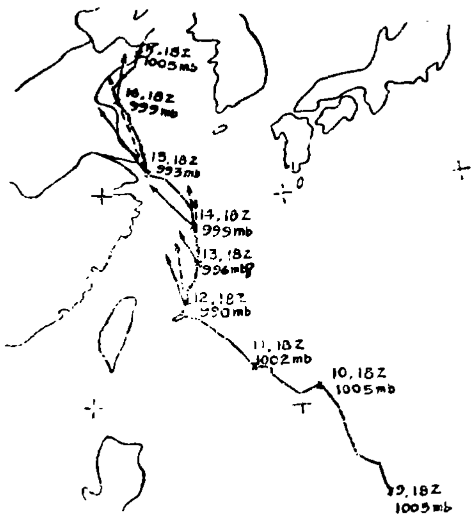

圖 7. 1955年7月台風中心运动实例，無飞机探测，观测中心軌迹是根据地面天气圖定出，其他說明同圖6

表 7a. 計算誤差及半徑 (27,28,29日有飞机观测紀录)

日 期	半 徑	观 测 位 置	天气圖預报位置	誤 差	計 算 位 置	誤 差
27日	11° lat°	27.5N, 133.2E	27.9N, 131.0E	1.8° lat	28.0N, 133.3E	0.7lat
28	8.1	28.4N, 130.4E	29.6N, 131.0E	1.3	29.5N, 130.8E	0.9
29	7.0	32.5N, 130.5E	31.5N, 129.5E	1.7	31.5N, 129.5E	1.7
30	9.0	41.5N, 138.7E	41.5°N, 144.0E	4.0	40.0N, 132.8E	5.2 (6.7°)*

* 在未計算加速度前是6.7°.

表 7b. 計算誤差及半徑(非飞机观测紀录)(位置看圖7)

日 期	半 徑	观 测 位 置	天气圖預报位置	誤 差	計 算 位 置	誤 差
13日	4.5°	26.9°N 125.2°E	26.7°N 123.8°E	1.2° Lat	27.2°N 123.8°E	1.2
14	4.2°	28.7°N 125.0°E	29.9°N 125.0°E	1.0	28.4°N 124.2°E	0.6°
15	4.0°	31.2°N 122.5°E	30.6°N 124.8°E	2.0	30.7°N 122.6°E	0.5
16	4.0°	34.6°N 120.6°E	35.7/34.4 °N 120.3°E	1.0	34.4°N 129.6°E	1.0
17	3.8°	37.2°N 121.8°E		—	37.0°N 120.8°E	0.8

根据圖与表的比較，誤差与天气圖預报結果相似或者还要小些。在圖6的9月29日計算的誤差比較大。这天天气形势的特点是台風正进入西風槽的边緣，同时西北方有冷空气侵入台風区域，大槽向东南移动。加速度較大，(7)，(8)兩式已不正确。此时台風已成鋒面气旋，中心位置随高度的变化很大，計算誤差是与观测到的地面中心比較的結果，如与700毫巴观测到的中心比較，誤差要小得多。

为了計算加速度，根据方程(13)，(14)进行了計算，并略去ψ場随时間的变化。所得的結果如圖6上的B点，而A点是未經加速度訂正前的位置。实际上9月30日的台風已很傾斜，有明显的冷空气侵入，动量交換也很大，已不符合本文的假定。

台風周圍的記录稀少，和很难确定台風半徑是这方法的一个很大的困难。在决定台風半徑时，作者主要是充分考虑"温压場叠加"这原則，并且結合到台風三度空間中各層的大小，把它作为立体的整体来考虑。在台風傾斜时会帶来不少的困难。不过台風只在到达高緯时，才会有很大的傾斜發生。至于如何建立一个决定台風半徑的客观标准，还有待于更多經驗累积来确定。

在上面所討論的兩种方法中，第一种方法是沿着等ψ綫运行的，在未来24小时如果有明显的轉向可以被預报出来。但ψ場很难画准确。第二种方法比較方便，但24小时外推容易發生誤差，半徑也难于决定。

五. 对中緯天气系統移动的几点討論

1. 冷渦与阻塞高压

把西風槽看成是一个渦旋中心叠加在基本西風流場上，当渦旋从西風帶切断时，渦旋中心往往向南移动，其遺留下的区域由暖空气补充，形成孤立的冷渦旋或称切断低压。

切断时常包含兩个方面：

1) 西風槽的渦旋中心向南移动和發展；

2) 暖空气由西面侵入渦旋的北方。

关于第二方面謝义炳[19]已作了詳細的討論，这里准备对第一点略加說明。

以1946年11月1—3日[20]和1949年3月2—5日[19]的北美高空冷渦的例子，可看出渦旋中心向南移动的情形。

按照本文对渦旋移动的討論，当渦旋南移时，在槽西部的东西向的ψ場的梯度的絕对值要大于东部的(主要指300—700毫巴的厚度)。根据很多天气圖的分析，在切断低压形成前，槽的西部往往具有非常显著的南北向的鋒区和急流。这种条件在秋末春初

表 8.

时间	1946年			1949年			
	11月1日03世界时	11月2日03世界时	11月3日03世界时	3月2日03世界时	3月3日03世界时	3月4日03世界时	3月5日03世界时
渦旋中心所在位置	50°N	42°N	35°N（切断）	51°N	45°N	40°N	40°N（切断）

的大陆西岸最易滿足，在中国夏季也常見。在判断冷槽能否被南移并被切断，这可能是值得参考的各种象征之一。

关于冷渦的移动和台風相类似，可以采取相同的方法来处理。在冷渦初产生时气旋式流場并不直接到达地面，所以只要用渦旋所在的厚度来处理即可。

在形成孤立后的冷渦中往往有微弱的下沉运动，在外界流場影响很小时，內力作用使冷渦向南移动，形成在大陆西岸的孤立冷渦（如西班牙附近），其西方大洋上空常有强大的暖高压，在內力和外力的作用下，冷渦向西南移动逐漸消失。

大陆中部或东岸也有类似情况。不过在大陆中部或东岸形成的冷渦，常因西北方另有寒潮發生，大型 ψ 場的东西向牽引場加强，因而东移出海。

阻塞高压的情况与冷渦类似。大型阻塞高压，近于自成一个系統，外界大型 ψ 場弱，移动緩慢。小阻塞高压随所在厚度里的 ψ 場的牽引气流移动。

2. 中緯度气旋和反气旋

中緯度气旋也可以作为一个渦旋来处理，但它的动量交換与傾斜程度都要比台風来得大，实际处理比較困难。

对新生的鋒面气旋，剛形成扰动的鋒面大都位于高压边緣，这时地面大型 $\overline{P_0}$ 場等值綫基本上与鋒面方向即 $\overline{T_m}$ 方向相平行，也大致与3千米处的風速或暖区的等压綫方向相同。因此，旧的引导观念此时在方向上是很精确的。移动速率随鋒面温度梯度增大，但要比3千米处風速小得多。

对加深得相当强度的深厚的气旋，В. И. 布舒德[21]曾經發現它沿着700毫巴等高綫和1000—500毫巴等厚度綫的合成方向运行。由1948—1951年的紀录，他挑选了100个例子，發現有96个在一天內的移动是符合上述規律的，只有4个水平温度梯度随高度变化很大的發生了偏差。这些經驗規律基本上可以用本文的理論来說明。

对于中緯度反气旋的移动，基本上和气旋是一样的。一般它的厚度比气旋还要淺。它的东方和北方常接近較深的低压，并具有輻散下沉的特点，常产生一个向南移动的分速，

六. 結 語

本文的渦旋运动方程，通过簡化后，在定性方面与一般天气分析和預报的經驗事实基本上是符合的，因而給某些經驗規律提供了一些理論根据。然而在定量方面，由于理論上的某些簡化，天气观测和分析的准确度限制，以及实际計算操作过程中缺少客观謹严的分别內外流場的办法，使計算結果有不同程度的誤差，但这些誤差并不大于一般天气圖預报的誤差。

在本文的处理中也存在着很多相当严重的缺点，天气系統的移动是与系統本身發展以及外界流場的变化密切相关的，而本文对此点未能加以詳細考慮。

采用重复計算的方法，应該可以克服外推过長的缺点，但由于存在着划分內外流場的困难，未能采用这方法。即使能采用，也不能处理得很精确。因系統的运动由于大型流場的变化而产生显著的改变，精确地决定大范圍形势的演变，則不是本文的目的。

天气学的發展，很多方面理論落后于实踐。表現在很多經驗規律缺乏理論解釋及很少有理論結果能应用到預告。目前理論工作可以从兩个方面努力：第一是根据大范圍的情况，不分别天气系統，尽量少簡化运动方程，从事数値預告。第二是从現有的經驗規律着手，加以理論总結，充实其物理基础。本文就是第二方面的一个尝試。

七. 附 录

在簡單情况下渦旋运动方程的数学积分。

对台風內部的結構，假定 V_r, V_z 为定常的，V_θ 也是定常的，其速度分布为 Rankine 渦旋[22]。即

$$V_\theta r = c = \text{const}, \quad \text{此时}\ (\text{rot}\ \underline{V})_z = \frac{2V_\theta}{r} = \frac{2c}{r^2}.$$

假定台風运动时半徑不变，并且絕对渦度守恒。則

$$\frac{c_0}{r_0^2} + \Omega \sin\varphi_0 = \frac{c}{r_0^2} + \Omega \sin\varphi,$$

所以

$$c = c_0 + \Omega r_0^2 (\sin\varphi_0 - \sin\varphi) \doteq c_0 + \Omega r_0^2 \cos\varphi_0 \frac{y}{R}.$$

由 V_θ 所产生的內力：

$$2\Omega \frac{\cos\varphi_0}{R} \pi \int_0^{r_0}\int_0^{z_1} \rho V_\theta r^2\, dr dz = M\Omega \frac{\cos\varphi_0}{R} c = M\Omega \frac{\cos\varphi_0}{R}\left(c_0 + \Omega r_0^2 \cos\varphi_0 \frac{y}{R}\right). \qquad (25)$$

把(25)代入方程(18)，则本节所采用的基本方程为：

$$\frac{dV_{ox}}{dt}-2\Omega\sin\varphi_0\,V_{oy}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}-\Omega\cos\varphi\ \overline{V}_z+\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r, \tag{17}$$

$$\frac{dV_{oy}}{dt}+2\Omega\sin\varphi_0\,V_{ox}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\Omega\frac{\cos\varphi_0}{R}\left(c_0+\Omega\frac{r_0^2}{R}\cos\varphi_0\,y\right). \tag{26}$$

令
$$\Omega\cos\varphi_0\,\overline{V}_z-\frac{2}{3}\Omega\cos\varphi_0\frac{r_0}{R}\overline{V}_r=\lambda,$$

$$\Omega\frac{\cos\varphi_0}{R}c_0=\sigma,\quad \Omega\frac{\cos\varphi_0}{R}\Omega\frac{r_0^2}{R}\cos\varphi_0=\delta,$$

λ,δ,σ 均大于零，σ 比 λ,δ 大。

下面只考虑东西向的直綫 ψ 場的例子。

此情形相当于台風位于副热帶高压以南的东風帶。关于正压渦片在直綫流場中的运动[3,5]都曾經有过討論。

令
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=l,$$

則运动方程(17)，(26)可写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}-f\frac{dy}{dt}=-\lambda, \tag{27}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dx}{dt}=-l+\sigma+\delta_y,$$

其中 f 作为常数。

初始条件：$t=0$ 时，
$$x=0,\ y=0;\ V_x=-\frac{l}{f}, V_y=0. \tag{28}$$

則方程(27)，(28)之解为：

$$x=\frac{1}{2}\frac{\delta\lambda}{f^2-\delta}t^2-\left(\frac{l-\sigma}{f}-\frac{\delta\sigma}{f(f^2-\delta)}\right)t- \tag{29}$$

$$-A_1\cos(\omega t+\varphi_1)-\frac{\lambda}{f\delta}\left(1+\frac{\delta}{f^2-\delta}\right),$$

$$y=A_2\sin(\omega t+\varphi_1)+\frac{f\lambda}{f^2-\sigma}t+\frac{\sigma}{f^2-\delta}, \tag{30}$$

其中

$$A_1=\frac{1}{f}\left(1+\frac{\delta}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^2}\sqrt{f^2(\lambda^2+\sigma^2)-\sigma\delta},$$

$$A_2=\frac{1}{\omega^2}\sqrt{f^2(\lambda^2+\sigma^2)-\sigma\delta},$$

$$\varphi_1=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta}{f\lambda}\sqrt{f^2-\delta},\quad \omega=\sqrt{f^2-\delta}.$$

公式(29)，(30)中，仅 $\frac{l-\sigma}{f}t$ 这項数量級較大。由(29)，(30)可看出台風实际上沿等压綫移动再加上一个摆动。

根据上面結果，可以作如下的討論。

1. 台風主要有一向西的速度：

$$\frac{l-\sigma}{f}=\frac{1}{f}\left(l-\Omega\frac{\cos\varphi_0}{R}c_0\right).$$

随 c_0 的增大而減小，所以加强后的台風，速度減慢，此与观测相符。

2. 沿着平均路徑的摆动：

1）摆动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{f^2-\delta}}=\frac{2\pi}{\sqrt{4\Omega^2\sin^2\varphi_0-\Omega^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\cos^2\varphi_0}}\sim\frac{\pi}{\Omega\sin\varphi_0}. \tag{31}$$

因此周期近于二分之一鐘摆日，随緯度的增加而減小，与台風半徑的关系很小。

表8是根据19个西太平洋的台風記录加以統計的*。表9是根据公式(31)的理論結果。兩者非常近似。

表9. 台風的緯度和周期

緯度	10°以南	10°—15°	15°—25°	25°以北
周期	68小时(6)	56(20)	41(27)	25(36)

括号內为所統計周期的数目。

表10. 台風的緯度和周期

緯度	10°	12.5°	18°	30°
周期	69小时	55.5小时	39	24

2）摆动的振幅

在 x 方向与 y 方向不一样，如只考虑台風被东西向的流場牽引时，則 y 方向的振幅

$$A_2=\frac{1}{(f^2-\delta)^{3/2}}\sqrt{f^2(\lambda^2+\sigma^2)-\sigma\delta}\sim\frac{f\sigma}{f^3}=\frac{\sigma}{f^2}=\frac{c_0\cos\varphi_0}{4\Omega\sin^2\varphi_0 R}. \tag{32}$$

此表示南北向的振幅随緯度增加而減小，随强度 c_0 增大而增大。因未能找到有关的記录，故沒有作統計。且实际观測到的振幅大部分是兩方向合成的。

对高緯度移动的气旋而言，有时也可以看出摆动来，因緯度高，强度不大，不甚显著。

* 資料来源見参考文献[23]的附录。

上面仅是一些比較粗略的說明，根据比較复杂的ψ場的解可知，大型流場的渦度对台風运动的振幅也是有影响的。由于篇幅限制，数字討論从略。

在东風帶中，当台風强度很大，或者引导气流很微弱时，此时$\frac{\delta_y-\sigma}{f}\sim 0$，則台風的路徑主要为兩个方向摆动的合成，可能造成一迴轉形狀的弯曲路徑。在西風帶，由于外力与各內力的合成方向近于一致，这种迴轉很少可能發生。在台風將轉向时，均匀速度常較小，也有产生迴轉路徑的。尤其在偏向西南轉时，內力合成方向与微弱的牽引力場方向正好相反，产生迴轉的可能性最大。

3. 当台風受东西向的流場牽引时，它的平均路徑是东西向的。由 (30) 对 t 求微商，則

$$V_{0y}=A_2\omega\cos(\omega t+\varphi_1)+\frac{f\lambda}{f^2-\delta}.$$

由上可看出，气旋式流場σ的內力，除造成一个摆动外，不可能对平均的V_{0y}有所貢献。向北速度是由于輻合上升所产生的λ而造成的。即使外界溫压場都不存在时，只考虑σ的作用，也只能是平均向西的速度再附加一摆动。在正野重方[5]的文章中也得到同样的結果。此点有时引起誤解，認为均匀的向北的速度是由于气旋式流場所产生的內力所造成的，在这里有提出引起注意的必要。

参 考 文 献

[1] Rossby, C. G., 1948. On the displacement and Intensity change of atmospheric Vortices. *Jour. Marine Res.* 7: **3**, 175-187.

[2] Rossby, C. G., On the mechanis for release of potential energy in atmosphere. *J. Met.* 6 (1949), 163-180.

[3] Yeh T. C. (叶篤正), The motion of tropical storm under the influence of superimposed southerly current. *J. Met.* 7: **2** (1950), 108-113.

[4] Kuo H. L. (郭曉嵐), The motion of atmospheric vortices and General Circulation. 7, (1950), 247-258.

[5] Syono, S. (正野重方), On the motion of the vortex in non-uniform pressure field. (provisional Report) *Papers Met. Geo. Japan.* 2: **2** (1951), 117-128.

[6] Takeuchi, M. (竹內), The motion of tropical cyclones in a non-uniform flow field. *Papers Met. Geo. Japan.* 3: **4** (1953), 252-268.

[7] Magata, M., Dynamics of the movement of the atmospheric vortices. *Papers Met. Geo. Japan.* 1: **1** (1950), 38.

[8] Yoshitake, M. (吉武), Dynamic of the open system and its application to the motion of the Typhoon. *Geo. Mag.* 24: **4** (1953), 193-207.

[9] Riehl H., Tropical Meteorology. McGraw Hill, 1954, 281-357.

[10] Mitchell, C. L., West Indian Hurricans and other Tropical cyclones of North Atlantic Ocean.

Mon. Wea. Rei. No: 24, 1924.

[11] Li Sjan-Zsi (李宪之), Untersuchungen uber Taifune, Veroffentlichungen des Inc. der Uni. Berlin. Band 1. heft 5, 1936.

[12] Jordan, E. S., On observation Study of the upper wind circulation around tropical storm. *J. Met.* 9 (1952), 340.

[13] Hughes L. A., On the low-level structure of Tropical storm. *J. Met.* **9** (1952), 422.

[14] Simpson R. H., On the Movement of the Tropical cyclone Trans. *Amer. Geo. Un.* 27 (1946), 641.

[15] 高桥浩一朗，台風の移动の予报について，予报研究. 1951, 2巻 7号, 8.

[16] 高桥浩一朗，温度场と进路，1952, 4巻 1期，22–24.

[17] Fujita, T., Pressure distribution within typhoon, *Geophy. Mag.* 23: **4** (1952), 437-452.

[18] 安藤正，台風の强度をと移动速度，研究时报. 1952, 4巻 1期, 10-14.

[19] Hsieh Y. P. (謝义炳), An investigation of a selected cold vortex over North America. *J. Met.* 6: **6**, 401-410.

[20] Palmen, E., On the origin and structure of High level cyclones South of Maximum Westerlies. *Tells.* **1** (1949), 22-31.

[21] 布舒德 B. И., 从温压場预告气旋移动方向，天气月刊 第一期，1954, 67. (原載 1953. No. 1 Метеорология и Гидрология)

[22] Deppermenn, C. E., Note on origin and structure of phillipine Typhoons. *Bul. Amer. Met. Soc.* **28** (1947), 399.

[23] 正野重方，台風の运动について，研究时报(1952) 4巻 1期, 31-49.

THE EQUATIONS OF MOTION OF VORTICES IN BAROCLINIC ATMOSPHERE AND THEIR APPLICATION IN WEATHER FORECASTING

HSIEH YI-PING AND CHEN CHU-SHIH

(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, the equations of motion of vortices in baroclinic atmosphere are derived in the light of classical hydrodynamics. Six factors determining the motion of vortices are discussed. Physical interpretation and some comments are given to the well-known steering principle. Application of these equations in the forecasting of the motion of typhoons are illustrated by three examples, and the results are better or as well as those of the synoptic forecasts. Possibility and limitation of their application to the motion of middle-latitude vortices are also discussed.

In the appendix, there are critical discussions of the role of the internal forces and the calculation of the amplitude and period of the meandering motion of typhoons in straight steering current.