

摩擦層中湍流系数

趙柏林

(北京大学)

提 要

摩擦層中湍流系数,利用風标的分布,可以測定之。1902年,爱克曼(Екман)創立了摩擦層中風标螺旋綫,利用風标螺旋綫,可以測定摩擦層中的湍流系数。1953年,萊赫特曼(Лайхтман)考慮了气压場随高度的变化,即热成風的因素,獲得了良好的結果。但是,萊赫特曼公式之应用,只限于恒态吹流,或恒态均匀温压場的条件之下,方能准确使用。这样是在一般情况之下难以滿足的。关于摩擦層非恒态問題,1947年趙九章、裘碧克(Дюбок)曾經討論过。本文僅就非恒态湍流系数測定問題予以進一步探討,并得到了較有廣泛意义之公式。而萊赫特曼公式,系屬温压場恒态,温压場中温度、压力梯度在均匀情况之下,該公式之特解。爱克曼范式,系屬气压場穩定,温度梯度恒态为零时,該公式之特解。这样,該公式的計算,使得湍流系数測定工作精确化和廣泛化。

最后,本文作了一些实际資料的計算与分析,和討論在自然环境中湍流系数的变化。

一. 引 言

大气的下層是地球湍流边界層,湍流的效应也就表现得十分顯著。为了解决低空大气的气象問題,首先确定低空大气湍流的作用,是十分必要的。过去很多学者,利用低空大气中風的分布、温度的層結、温度的变迁以及相似性原理等法則^[1],确立了自然环境中湍流系数变化的規律。

它們大抵可以分作如下的兩种类型^[2]:

第一型是把低空大气作为一个整体,湍流系数 $k(z)$

$$k(z) = k_{\infty}(1 + \varepsilon - e^{-mz}), \quad (1)$$

其中 k_{∞} , ε , m 均为参数。这是 Б. И. Извековым 所建議的。

第二型 把低空大气分为兩層,以某高度(約30米) h 为分界綫,在 $0 < z \leq h$ 的区域中

* 1956年5月22日收到。

$$k(z) = cz, \quad (2)$$

在 $z \geq h$ 的区域中

$$k(z) = ch. \quad (3)$$

这是 М. И. Юдин 及 М. Е. Швец 所建議的, 即所謂“断裂理論”。其中 c 为常数

$$c = \alpha v_*, \quad (4)$$

或

$$c = \alpha v_* m(t), \quad (5)$$

其中 α 是曼曼 (Karman) 系数, v_* 是动力速度, m 是与穩定度有关系的参量。

这两种模型, 或其他的模型, 同样的都指出这样的事实: 在大气的底层中, 湍流系数随高度的增加而加大。同时也就随着高度的增高, 湍流系数渐趋常数, 这样的高度大约在 30 米—50 米。在这大气的底层, 一般我們称为貼地層大气。对于低空大气中較上的一層, 我們称为摩擦層大气, 或称为行星边界層, 在这一層里湍流系数渐趋常数, 不随高度改变。

关于摩擦層中湍流系数的測定, 1902 年爱克曼^[4] 創立了摩擦層中風标螺綫的理論。我們可以利用湍流系数計算出摩擦層中風的分布。反之, 我們亦可从風标螺綫, 推断摩擦層中的湍流系数。1952 年萊赫特曼^[5] 引入热成風的因素, 即考慮到气压場随高度的变化。这样的条件与实际比較相近, 因而使爱克曼的法則向前跨進一步。但是, 萊赫特曼公式只限于穩定状态条件之下, 方能准确使用。实际上一切都在变化着, 發展着; 穩定状态的出现在自然界中是特殊情况, 在一般的情况之下, 是难以滿足的。所以, 萊赫特曼公式在实际应用当中, 無論其精确性和广泛性, 都顯得十分不够的。因而, 萊赫特曼法則, 必須予以改進和修正。

关于摩擦層中非恒态运动, 1947 年趙九章^[6] 討論过非恒态吹流, 同一年裘碧克^[7] 討論过非恒态情况下摩擦層中的垂直运动。本文僅就摩擦層中非恒态情况之下, 湍流系数測定的問題予以進一步探討。

本文在討論摩擦層中, 湍流系数測定的問題上, 考慮了非恒态的作用, 得到了有广泛意义的測定摩擦層中湍流系数的公式。而爱克曼公式及萊赫特曼公式, 均系該公式在某种特定的条件下之特解而已。这样該公式使測定湍流系数的解答精确化, 和应用上的广泛化。

二. 摩擦層中湍流系数之測定

摩擦層中气体的运动方程为:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - uv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{dv}{dt} + uv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

我們取

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad (7)$$

其中

$$u' \doteq -\frac{1}{i} \frac{dV}{dt}, \quad v' \doteq \frac{1}{i} \frac{dU}{dt}. \quad (8)$$

U 和 V 滿足于:

$$\begin{aligned} -iV &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ iU &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

取复速度 $W = U + iV$, 于是

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - 2k^2 iW - 2i k^2 f(z) = 0, \quad (10)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{i}{2k}}, \quad (11)$$

$$f(z) = \frac{1}{i\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right). \quad (12)$$

公式(10)的解为:

$$W = B_1 e^{+\lambda\sqrt{2i}z} + B_2 e^{-\lambda\sqrt{2i}z} + \lambda \frac{e^{+\lambda\sqrt{2i}z} \int_0^z e^{-\lambda\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi - e^{-\lambda\sqrt{2i}z} \int_0^z e^{+\lambda\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi}{\sqrt{2i}}, \quad (13)$$

其中 B_1, B_2 为积分常数.

$$\text{令} \quad f(z) = A + Bz = (A_x + zB_x) + i(A_y + zB_y), \quad (14)$$

$$\text{而} \quad A_x + 2B_x = \frac{1}{i\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{iT_0} \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (15)$$

$$A_y + 2B_y = \frac{1}{i\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{iT_0} \frac{\partial T_0}{\partial y},$$

于是

$$W = C e^{-\lambda\sqrt{2i}z} - \frac{A + BZ}{i}, \quad (16)*$$

1) 見附錄.

其中 C 为积分常数可写为 $C = C_x + iC_y$.

令

$$C_x = C_0 \cos \beta, \quad C_y = C_0 \sin \beta, \quad (17)$$

因此

$$\begin{aligned} U &= C_0 e^{-\lambda z} \cos(\beta - \lambda z) - (A_y + zB_y), \\ V &= C_0 e^{-\lambda z} \sin(\beta - \lambda z) + (A_x + zB_x). \end{aligned} \quad (18)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{i} e^{-\lambda z} \cos(\beta - \lambda z) \frac{dC_0}{dt} - \frac{1}{i} e^{-\lambda z} C_0 \sin(\beta - \lambda z) \frac{d\beta}{dt} \\ &\quad - \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y), \\ \frac{1}{i} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{i} e^{-\lambda z} \sin(\beta - \lambda z) \frac{dC_0}{dt} + \frac{1}{i} e^{-\lambda z} C_0 \cos(\beta - \lambda z) \frac{d\beta}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x). \end{aligned} \quad (19)$$

由 (7) 和 (8)

$$\begin{aligned} u &= U + u' = U - \frac{1}{i} \frac{dV}{dt}, \\ v &= V + v' = V + \frac{1}{i} \frac{dU}{dt}, \end{aligned} \quad (20)$$

得到

$$\begin{aligned} u &= e^{-\lambda z} \left[C_0 \left(1 - \frac{1}{i} \frac{d\beta}{dt} \right) \cos(\beta - \lambda z) - \frac{1}{i} \frac{dC_0}{dt} \sin(\beta - \lambda z) \right] \\ &\quad - (A_y + zB_y) - \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x), \\ v &= e^{-\lambda z} \left[C_0 \left(1 - \frac{1}{i} \frac{d\beta}{dt} \right) \sin(\beta - \lambda z) + \frac{1}{i} \frac{dC_0}{dt} \cos(\beta - \lambda z) \right] \\ &\quad + (A_x + zB_x) - \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y). \end{aligned} \quad (21)$$

因此

$$\begin{aligned} &\left[u + (A_y + zB_y) + \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x) \right]^2 + \left[v - (A_x + zB_x) + \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y) \right]^2 \\ &= e^{-2\lambda z} \left[C_0^2 \left(1 - \frac{1}{i} \frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{i^2} \left(\frac{dC_0}{dt} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

取对数

$$\ln \left\{ \left[u + (A_y + zB_y) + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x) \right]^2 + \left[v - (A_x + zB_x) + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y) \right]^2 \right\} \\ = -2\lambda z + \ln \left[C_0^2 \left(1 - \frac{1}{\iota} \frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\iota^2} \left(\frac{dC_0}{dt} \right)^2 \right], \quad (23)$$

於是

$$\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ \left[u + (A_y + zB_y) + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x) \right]^2 + \left[v - (A_x + zB_x) + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y) \right]^2 \right\}. \quad (24)$$

而

$$k = \frac{\iota}{2\lambda^2}, \quad (25)$$

於是

$$k = \frac{2\iota}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ \left[u + A_y + zB_y + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_x + zB_x) \right]^2 + \left[v - (A_x + zB_x) + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} (A_y + zB_y) \right]^2 \right\} \right]^2}, \quad (26)$$

或

$$k = \frac{2\iota}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ \left[u + \frac{\iota}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \frac{gz}{\iota} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln T_0 + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \ln T_0 \right) \right]^2 + \left[v - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) - \frac{gz}{\iota} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln T_0 - \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \ln T_0 \right) \right]^2 \right\} \right]^2}, \quad (27)$$

令

$$\zeta = \left\{ \left[u + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \frac{gz}{\iota} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln T_0 + \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \ln T_0 \right) \right]^2 + \left[v - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) - \frac{gz}{\iota} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln T_0 - \frac{1}{\iota} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \ln T_0 \right) \right]^2 \right\},$$

將各高度上的 ζ 求出，繪 $\ln \zeta - z$ 圖如圖 1 所示，於是就可以求出湍流係數 k

$$k = \frac{2\iota}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \zeta \right]^2} = \frac{2\iota}{[\tan \alpha]^2}.$$

k 隨高度不變， $\ln \zeta$ 與 z 為綫型關係， α 為直綫與 z 軸之夾角。

將 (27) 式中的 $\frac{\partial}{dt}$ 展開 $\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ，得

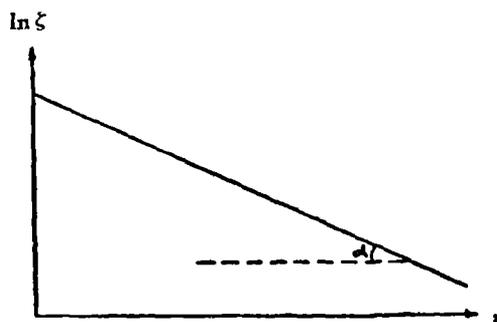


图1. $\ln \zeta$ 与 z 之关系

$$k = \frac{2u}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ u \left(1 + \frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0xz} + \frac{g^z}{l^2} (\ln T_0)_{xz} \right) + v \left(\frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0xy} + \frac{g^z}{l^2} (\ln T_0)_{xy} \right) \right. \right.} \\ \left. \left. + \frac{1}{l \rho_0} \left(p_{0y} + \frac{1}{l} p_{0xz} \right) + \frac{g^z}{l} \left(\ln T_{0y} + \frac{1}{l} \ln T_{0xz} \right) \right]^2 + \left[v \left(1 + \frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0yy} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0yy} \right) + u \left(\frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0xy} + \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0xy} \right) - \frac{1}{l \rho_0} \left(p_{0x} - \frac{1}{l} p_{0yt} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{g^z}{l} \left(\ln T_{0x} - \frac{1}{l} \ln T_{0yt} \right) \right]^2 \right]^2. \quad (28)$$

若是 x 方向是指地面气压梯度的方向, 即 $\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial n}$, $\frac{\partial p_0}{\partial y} = \frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$, 并且取平直等压线, 于是 $\frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial n \partial s}$ 及 $\frac{\partial^2 p_0}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial s^2}$ 均为零. 于是公式 (28) 变为:

$$k = \frac{2u}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ u \left(1 + \frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0n^2} + \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0n^2} \right) + v \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0sn} + \frac{1}{l^2 \rho_0} p_{0nt} \right. \right.} \\ \left. \left. + \frac{g^z}{l} \left(\ln T_{0s} + \frac{1}{l} \ln T_{0nt} \right) \right]^2 + \left[v \left(1 + \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0s^2} \right) + u \frac{g^z}{l^2} \ln T_{0sn} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{l \rho_0} \left(p_{0n} - \frac{1}{l} p_{0st} \right) - \frac{g^z}{l} \left(\ln T_{0n} - \frac{1}{l} \ln T_{0st} \right) \right]^2 \right]^2. \quad (29)$$

用天气图求出 p_{0n} , p_{0n^2} , p_{0nt} , p_{0st} 及 $\ln T_{0n}$, $\ln T_{0s}$, $\ln T_{0nn}$, $\ln T_{0ns}$, $\ln T_{0ss}$, $\ln T_{0nt}$, $\ln T_{0st}$ 各项, 用测风记录求出各高度上风速 u, v , 于是可以计算出湍流系数 k 来. 显然这里考虑到气压风的贡献 (p_{0x} , p_{0y}), 热成风的贡献 (T_{0x} , T_{0y}), 气压梯度分布不均匀的贡献 (p_{0xz} , p_{0xy} , p_{0yy}), 温度梯度不均匀的贡献 ($\ln T_{0xz}$, $\ln T_{0xy}$, $\ln T_{0yy}$), 变压风的贡献 (p_{0xt} , p_{0yt}), 变温效应的贡献 ($\ln T_{0xt}$, $\ln T_{0yt}$).

温度的效应造成气压形势的改变, 因而造成風的变化。造成低空大气气压的变化主要的是动力的因子。据我們所知, 在低空大气中, 温度的平流对于气压变化的贡献及瞬間温度的变化对于气压的贡献甚为微弱, 因此, $\ln T_{0n^2}$, $\ln T_{0sn}$, $\ln T_{0ss}$, $\ln T_{0nt}$, 及 $\ln T_{0st}$ 的各项可以略去, 于是

$$k = \frac{2t}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ u \left(1 + \frac{1}{t^2 \rho_0} p_{0n^2} \right) + \frac{1}{t^2 \rho_0} p_{0nt} + \frac{g^z}{t} \ln T_{0s} \right\}^2 + \left[v - \frac{1}{t \rho_0} \left(p_{0n} - \frac{1}{t} p_{0st} \right) - \frac{g^z}{t} \ln T_{0n} \right]^2 \right]^2} \quad (30)$$

若考虑气压場是穩定的, 即略去 (p_{0xt}, p_{0yt}) 項; 气压梯度分布均匀, 即略去 $(p_{0xx}, p_{0xy}, p_{0yy})$ 項, 温度場是穩定的, 即略去 $(\ln T_{0xt}, \ln T_{0yt})$; 温度梯度分布是均匀的, 略去 $(T_{0xx}, T_{0xy}, T_{0yy})$ 項。于是公式 (28) 为:

$$k = \frac{2t}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ u + \frac{1}{t \rho_0} p_{0y} + \frac{g^z}{t} \ln T_{0y} \right\}^2 + \left[v - \frac{1}{t \rho_0} p_{0x} - \frac{g^z}{t} \ln T_{0x} \right]^2 \right]^2}, \quad (31)$$

这就是萊赫特曼公式。故萊赫特曼公式系属于公式 (28) 的一个特解。即限定在气压場穩定、温度場穩定、气压梯度均匀、温度梯度均匀条件下, 公式 (28) 之特解。

若考虑气压場穩定, 即略去 (p_{0xt}, p_{0yt}) 項; 气压分布均匀, 即略去 $(p_{0xx}, p_{0xy}, p_{0yy})$ 項; 温度水平梯度恒态为零, 即略去 $(\ln T_{0xt}, \ln T_{0yt}, \ln T_{0xx}, \ln T_{0xy}, \ln T_{0yy})$ 及 $\ln T_{0nt}, \ln T_{0yt}$ 。于是公式 (28) 为:

$$k = \frac{2t}{\left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ u + \frac{1}{t \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right\}^2 + \left[v - \frac{1}{t \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right]^2 \right]^2}, \quad (32)$$

这就是爱克曼公式。爱克曼公式亦为公式 (28) 的一个特解, 属于气压場穩定、气压梯度分布均匀、温度水平梯度恒态为零的条件下之特解。

因此, 公式 (28) 或公式 (27), 是包括萊赫特曼公式, 爱克曼公式, 具有广泛实用性和精确性的摩擦層中湍流系数測定的公式。

三. 資料分析

1. 比較萊氏法則和公式 (27) 的方法

i) 由理論上看, 公式 (27) 之法則要比萊赫特曼法則为准确。实例的分析顯示出兩者之結果相差甚大, 这是由于不穩定項参与作用的结果。实际上也視測得到不穩定項的影响并不小, 不应该略去^[10, 11]。因此萊赫特曼法則在实际应用上, 精确性就顯得十分

不够了。

我們用实际观测的计算比較了萊赫特曼公式与公式(27)。

从实例的计算,在北京 1954—1955 年五十个实例的分析的结果

$$\frac{K_A - K}{K} = 118 - 74\%, \tag{33}$$

其中 K_A 是由萊赫特曼公式计算出来的, K 是由公式(27)计算出来的。

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d \rho_0}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d \rho_0}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

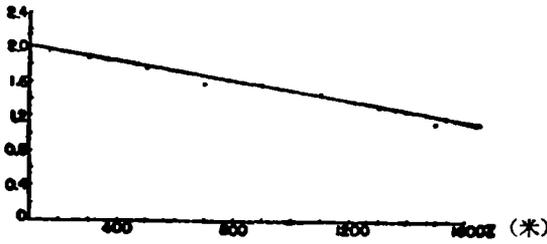


圖 2a. 1955 年 5 月 11 日 23 时用萊赫特曼公式計算的北京湍流系数

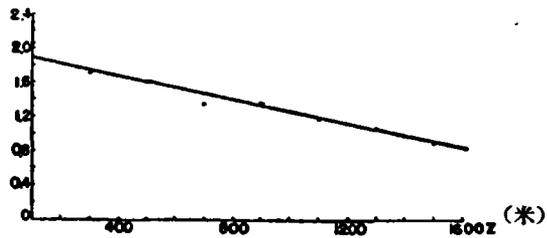


圖 2b. 1955 年 5 月 11 日 23 时用公式(27)計算的北京湍流系数

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d \rho_0}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d \rho_0}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

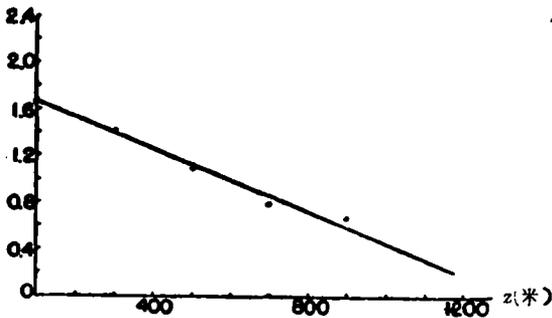


圖 3a. 1955 年 11 月 6 日 23 时用萊赫特曼公式計算的北京湍流系数

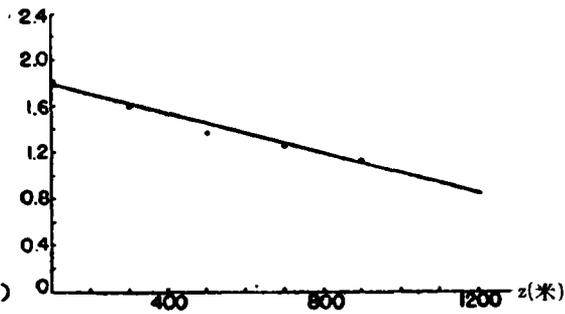


圖 3b. 1955 年 11 月 6 日 23 时用公式(27)計算的北京湍流系数

圖 2a 和圖 2b 是 1955 年 5 月 11 日 23 时, 分別用萊赫特曼公式及公式(27)計算的結果。在这次实例中, $K_A = 95 \text{ m}^2/\text{s}$, $K = 67 \text{ m}^2/\text{s}$, 而 $\frac{K_A - K}{K} = 39\%$ 。

圖 3a 和圖 3b 是 1955 年 11 月 6 日 23 时, 分別用萊赫特曼公式及公式(27)計算的結果。这次实例中, $K_A = 21 \text{ m}^2/\text{s}$, $K = 44 \text{ m}^2/\text{s}$, 而 $\frac{K_A - K}{K} = -52\%$ 。

ii) 从風标分布的計算也顯著的看出, 公式(27)的法則比萊赫特曼的法則为好。

圖4中所示为1955年7月12日11时風标螺綫和無摩擦的風, 即 $(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y})$, $(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x})$, 以及与無摩擦、穩定态的風, 即 $(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y})$, $(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x})$, 它們之間的关系。

該日的温度梯度为零, 因此, 热成風的作用就沒有了。由圖4中, 顯見考慮不穩定效应比略去不穩定效应更为合理。

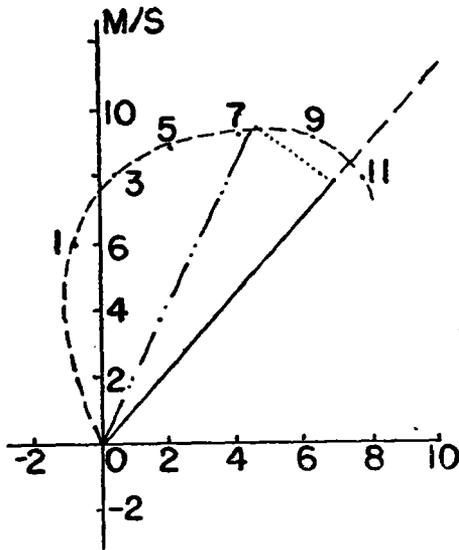


圖4. 1955年7月12日11时北京实际風标螺綫与無摩擦風, 及無摩擦、穩定态的風, 它們之間的关系。

实綫表示無摩擦的高空風,

$$\text{即} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right);$$

双点断綫表示無摩擦及穩定态的高空風,

$$\text{即} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right);$$

点綫表示非恒态偏差,

$$\text{即} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right);$$

虛綫表示实际風标螺綫。

圖中附碼高度單位为100米, 所示之風为風來的方向。

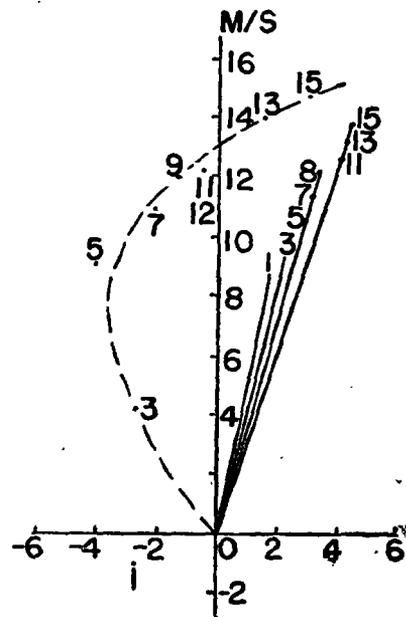


圖5. 1955年5月11日23时北京实际風标螺綫与無摩擦風的关系。

实綫表示無摩擦的風,

$$\text{即} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right);$$

虛綫表示实际風标螺綫。

圖中附碼高度單位为100米, 所示之風为風來的方向。

在五十个实例计算过程中,从风标螺旋线上看,考虑不稳定效应要比略去不稳定效应更为合理。

圖 5 为 1955 年 5 月 11 日 23 时,实际风标螺旋线与无摩擦的风,即 $\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x}\right)$, 它们之间的关系。显见由于热成风与不稳定效应,使得无摩擦的风随高度偏转,渐渐和实际的风两者相接近。

iii) 公式 (27) 的法則較萊赫特曼法則具有实用的广泛性。在实例的计算当中,萊赫特曼法則不能用,而(27)式却能应用。

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

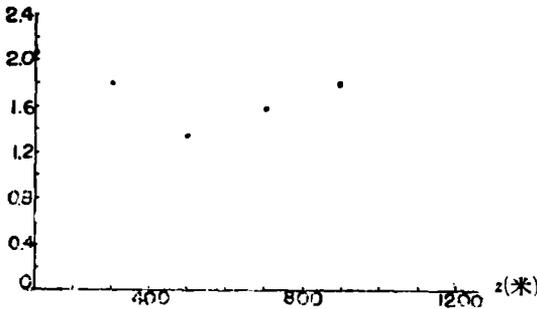


圖 6a. 1955 年 3 月 17 日 11 时 用萊赫特曼法則計算的北京湍流系数

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

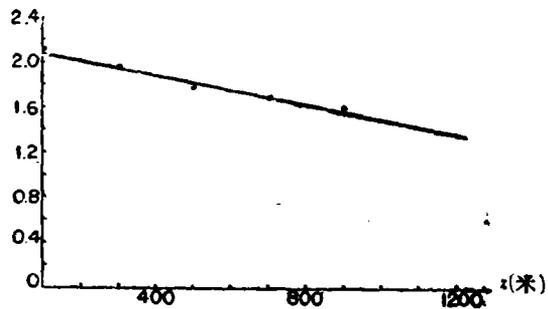


圖 6b. 1955 年 3 月 17 日 11 时 用公式 (27) 法則計算的北京湍流系数

圖 6a 为 1955 年 3 月 17 日 11 时,用萊赫特曼方法計算的北京湍流系数,从圖 6a 中顯見,該日之湍流系数用萊赫特曼方法是得不到的。也就是萊赫特曼方法在該日的計算是失敗的。

圖 6b 为 1955 年 3 月 17 日 11 时(日期時間与圖 6a 同),用公式(27)法則計算的北京湍流系数,湍流系数 $K = 99 \text{ m}^2/\text{s}$ 。从圖 6b 中顯見,在該日公式(27)法則計算的湍流系数是成功的。

圖 7a 为 1955 年 6 月 19 日 11 时,用萊赫特曼法則計算的北京湍流系数,从圖 7a 中顯見,該日之湍流系数的計算用萊赫特曼法則結果是得不到。也就是萊赫特曼方法在該日的計算是失敗的。

圖 7b 为 1955 年 6 月 19 日 11 时(与圖 7a 日期時間相同),用公式(27)法則計算的北京湍流系数 $k = 200 \text{ m}^2/\text{s}$,从圖 7b 中顯見在該日公式(27)的計算湍流系数是成功的,

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

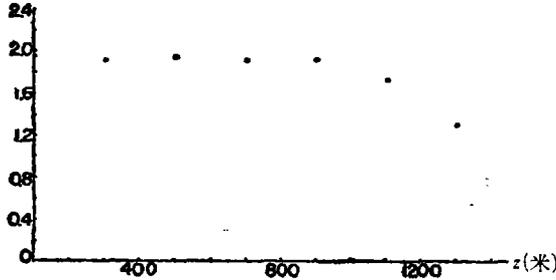


圖 7a. 1955 年 6 月 19 日 11 時用萊赫特曼法則計算的北京湍流系数

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

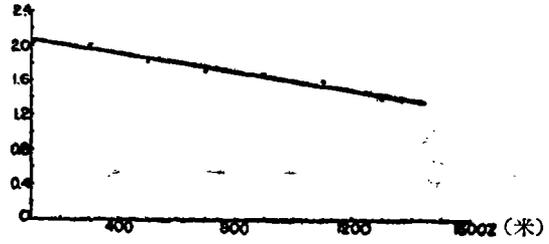


圖 7b. 1955 年 6 月 19 日 11 時用公式(27)測定的北京湍流系数

在五十个实例的计算当中,充分的证实了这样一点,公式(27)计算湍流系数的法则较莱赫特曼法则,在结果方面精确化,实用方面广泛化。

2. 平均情况

i) 第一种平均 把五十次在摩擦层中各高度上的风,按向量分别平均,得到了摩擦层中的风标螺旋线。这样的大规模平均,不稳定偏差由于互相抵消而变小。

在五十次中,除摩擦影响外,其他因子造成的各个高度上的风,即 $\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x}\right)$,按向量分别在各高度上平均,很显然的,由于热成风的效应,风向随高度的增加逐渐向左偏转。同时,由于摩擦影响随高度迅速减弱,它逐渐的和实际风标螺旋线接近,如图 8 所示。

再把五十次中,除摩擦影响和略去不稳定效应外,其他因子造成的各个高度上的风,即 $\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x}\right)$,按向量分别在各高度上平均。也可以看出由于热成风的效应,风向随高度逐渐向左偏转。同时,由于摩擦影响随高度迅速减弱,它逐渐的和实际风标螺旋线接近,如图 9 所示。

图 8 与图 9 两者大抵相似,也就是莱赫特曼法则和公式(27)的法则,在大规模平均的情况之下,不稳定效应由于相互消减而变小,两者之结果大抵类似。但是由图 8 及图 9 中显见,这样的平均之后,已经失去原来的真像。

ii) 第二种平均 在五十次中,把摩擦层中各高度上,实际风与除摩擦外其他因子造成的风,两者向量差方的平均,即

$$\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2$$

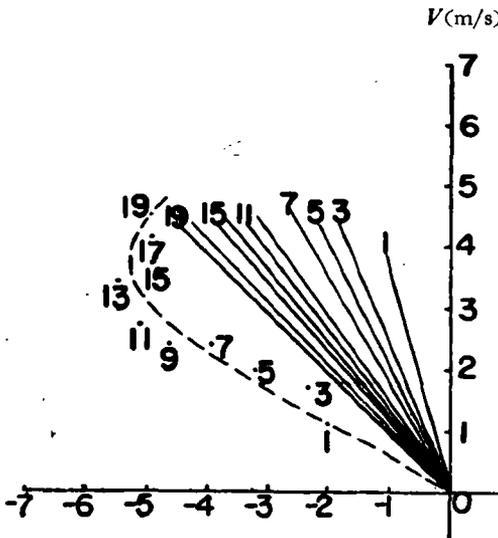


圖 8. 風標螺旋與除摩擦影響外, 其他因子造成的風, 在各高度上的分布.

虛線表示風標螺旋;

實線表示除摩擦影響外其他因子造成的風, 即

$$\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right).$$

圖中附碼單位為百米所在的高度。

圖中風標是指風來的方向。

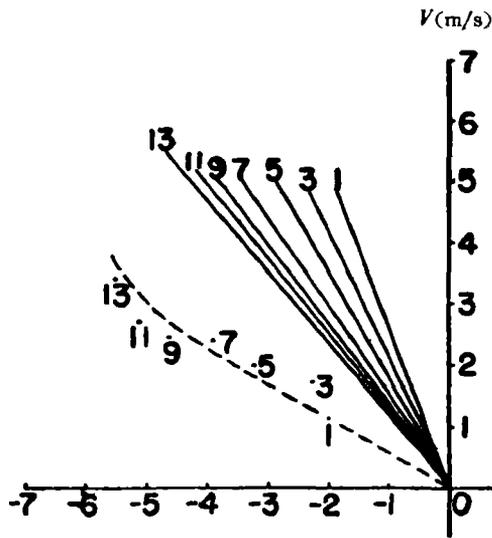


圖 9. 風標螺旋與考慮熱成風效應後, 氣壓梯度造成的風, 在各高度上的分布.

實線表示考慮熱成風效應後, 氣壓梯度造成的風, 即

$$\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right).$$

(其他說明同圖 8)

之平均, 然後對各高度上該值取對數, 則得如圖 10a 所示。

在五十次中, 把摩擦層中各高度上實際風與除摩擦不穩定效應外其他因子造成的風, 兩者向量差方的平均, 即

$$\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2$$

之平均, 然後對於各高度上該值取對數, 則得如圖 10b 所示。

圖 10a 與圖 10b 兩者較差甚微, 這是由於在大規模平均之後, 不穩定效應互相消滅, 因而在某種程度上相差較小, 所以這樣兩者才較為相近。

從圖 10a 及圖 10b 中, 可以計算出 K 值來。根據萊赫特曼法則, 即圖 10a, K_a 為 $109 \text{ m}^2/\text{s}$; 按公式 (27) 計算, 即圖 10b, K 為 $94 \text{ m}^2/\text{s}$ 。兩者之較差為 $\frac{K_a - K}{K} = 16\%$ 。無疑的, 公式 (27) 計算較萊赫特曼法則為準確, 但如從大規模平均的情形來看, 兩者的結果是相近的。

iii) 第三種平均 在五十次中, 把摩擦層中各高度上, 實際風與除摩擦外其他因子造成的風, 兩者向量差方對數平均, 即

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

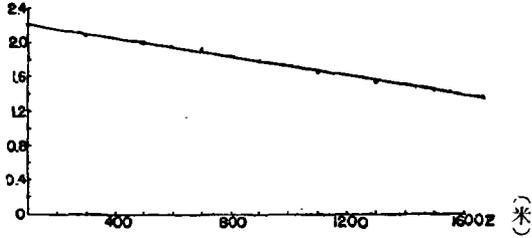


圖 10a. 以实际風与考慮热成風后, 气压梯度造成的風兩者差方五十次平均后取对数, 該值依高度的分布

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

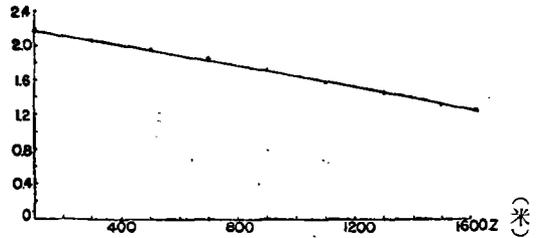


圖 10b. 以实际風与除摩擦外其他因子造成的風, 兩者差方五十次平均取对数, 該值沿高度的分布

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

之平均, 則得如圖 11a 所示。

在五十次中, 把摩擦層中各高度上, 考慮热成風后气压梯度造成的風与实际風, 兩者向量差方对数的平均, 即

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

之平均, 則得如圖 11b 所示。

圖 11a 与圖 11b 兩者之相差甚微。从圖 11a 及圖 11b 中, 可以計算出 K 值來。按

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

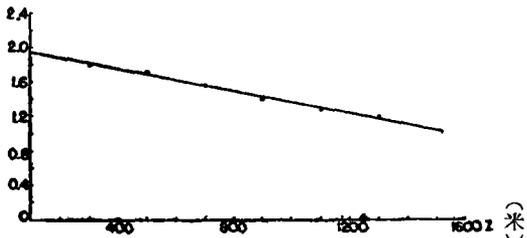


圖 11a. 以实际風与考慮热成風后的气压梯度造成的風, 兩者差方对数的平均, 依高度的分布(用萊赫特曼公式計算)

$$\lg \left[\left| u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right|^2 + \left| v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right|^2 \right]$$

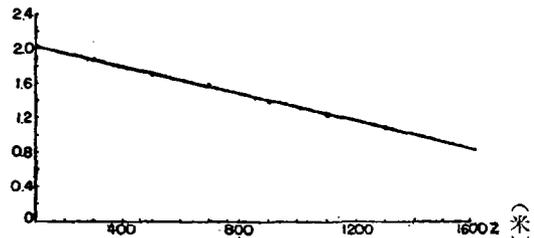


圖 11b. 以实际風与除摩擦外其他因子造成的風, 兩者差方对数的平均, 依高度的分布(用公式(27)計算)

萊赫特曼法則,即圖 11a, K_A 为 $82 \text{ m}^2/\text{s}$; 按公式(27)計算, 即圖 11b, K 为 $52 \text{ m}^2/\text{s}$ 。兩者之較差为 $\frac{K_A - K}{K} = 58\%$ 。

iv) 第四种平均 把五十个实例中每个实例, 用萊赫特曼公式, 及公式(27)法則, 分別求出湍流系数 K 來, 然后再平均。于是, 按萊氏法則求得 K_A 平均为 $88.5 \text{ m}^2/\text{s}$ 。按公式(27)法則求得 K 平均为 $74 \text{ m}^2/\text{s}$ 。兩者較差为 $\frac{K_A - K}{K} = 19\%$ 。

总之, 在个别实例兩者相較变化为 $\frac{K_A - K}{K} = 118 - 74\%$ 。相差甚大, 故而萊氏法則用于实例单独計算, 無論精确性或广泛性都是不够的。

对于平均的情况, 取四种平均方法, 得到四組不同的結果。有如表 1 所示。

表 1.

类型	平均方式	湍流系数	兩者較差% $\left(\frac{K_A - K}{K}\right)\%$
第一型	風的平均, 無摩擦風的平均, 無摩擦穩定風平均	*	
第二型	$\left u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right ^2 + \left v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right ^2$ $\left u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right ^2$ $+ \left v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right ^2$	$K_A = 109 (\text{m}^2/\text{s})$ $K = 94 (\text{m}^2/\text{s})$	16%
第三型	$\lg \left[\left u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right ^2 + \left v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right ^2 \right]$ $\lg \left[\left u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right ^2 \right]$ $+ \left v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dt} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{gz}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right ^2$	$K_A = 82 (\text{m}^2/\text{s})$ $K = 52 (\text{m}^2/\text{s})$	58%
第四型	K_A (用萊赫特曼法則求得的湍流系数) K (用公式(27)法則求得的湍流系数)	$K_A = 88.5 (\text{m}^2/\text{s})$ $K = 74 (\text{m}^2/\text{s})$	19%

对于平均的結果, 兩者較差較小, 但是平均的結果在某種程度上失去了真实性。按物理概念上看, 第二型平均較好。也可以这样說, 在大規模平均的情况之下, 萊氏法則以第二型平均在概念上較為清楚, 結果方面也較与公式(27)之結果相近。

3. 湍流系数 K 和温度梯度 γ 的关系

湍流系数 K 明顯的随着該層的温度梯度而异。有如圖 12 所示。当 $1 > \gamma > 0.3^\circ/100$ 米时, $K = K_0(1 + \beta\gamma)$, 其中, $K_0 = -83$, $\beta = -3.4$ 。

根据下面公式我們可以計算 γ 和 K 的相关。相关系数

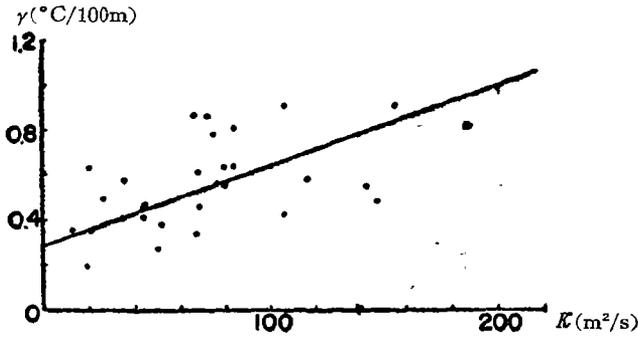


圖 12. 湍流系数 K 与温度梯度 γ 的关系

$$C_{K,\gamma} = \frac{\Sigma(K - \bar{K})(\gamma - \bar{\gamma})}{\sqrt{\Sigma(K - \bar{K})^2 \Sigma(\gamma - \bar{\gamma})^2}}, \quad (34)$$

$$C_{K,\gamma} = 0.62. \quad (35)$$

由于風和温度测量的精确性关系,使得它們的相关冲淡了。自然, γ 是影响 K 的因子之一,它不能概括所有的因子,这样,它們的相关性必然的受到一定程度的限制。

4. 風对湍流系数的影响

在貼地層里的研究,很多学者都指出:湍流系数不僅与 γ 有关,而且与風的大小有关。Константинов, Ляпин, Будыко 等^[3]都作过类似的探討。指出 $\frac{K}{u}$ 和 $\frac{\gamma}{u^2}$ 存在有嚴格的正相关。下面我們看一看,在摩擦層中是否也存在有这样的关系。

取 700 米高度的風速为 u , 这样 $\frac{K}{u}$ 和 $\frac{\gamma}{u^2}$ 的关系有如圖 13 所示。

他們的相关

$$C_{\frac{K}{u}, \frac{\gamma}{u^2}} = \frac{\Sigma\left(\frac{K}{u} - \bar{\frac{K}{u}}\right) \Sigma\left(\frac{\gamma}{u^2} - \bar{\frac{\gamma}{u^2}}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{K}{u} - \bar{\frac{K}{u}}\right)^2 \Sigma\left(\frac{\gamma}{u^2} - \bar{\frac{\gamma}{u^2}}\right)^2}}, \quad (36)$$

相关系数

$$C_{\frac{K}{u}, \frac{\gamma}{u^2}} = 0.74. \quad (37)$$

圖 14 为康斯坦丁諾夫(Константинов)法,布德科(Будыко)法及略萍(Ляпина)法,討論貼地層大气湍流系数与風及高度的比 $\frac{Kz}{u, z}$, 与大气穩定态 $\frac{\Delta\theta}{u_1^2}$ 之間的关系。其中, u_1 为 1 米高的風速, $\Delta\theta$ 为温度差。从圖中顯見,兩者之間,有強烈的正相关。

1955 年, Сакли Л. М.^[3]也同样的指出这样的关系。

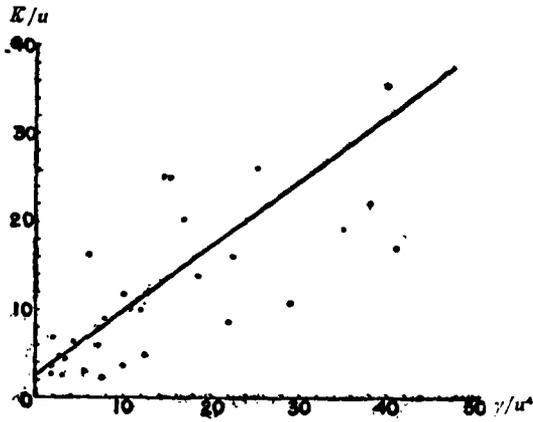


圖 13. $\frac{K}{u}$ 和 $\frac{\gamma}{u^2}$ 的关系

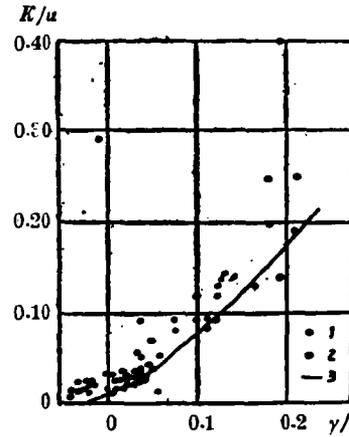


圖 14. $\frac{Kz}{u,z}$ 与大气稳定状态的关系^[3]
1. 直接法; 2. 略淨法; 3. 布德科法

5. 雷卡森数与湍流系数的关系

湍流的发展决定于大气的状态, 1920年雷卡森 (Richardson) 从重力场中, 湍流理论入手, 导出判别湍流发展与否的模式——雷卡森判据或雷卡森数, 即

$$Ri_a = \frac{\frac{g}{T}(\gamma_a - \gamma)}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]} \quad (38)$$

γ_a 为干绝热减温率。在饱和状态 γ_a 以湿绝热减温率 γ_m 代换之。当

$Ri_a < 1$ 时, 湍流发展;

$Ri_a = 1$ 时, 湍流发展或衰减的临界判据;

$Ri_a > 1$ 时, 湍流衰减。

从圖 15 顯見, 大的湍流系数一般的伴随着小的雷卡森数。但是也有由于过程发展的不完全等其他原因, 而也观察到小的雷卡森数具有不大的湍流系数。也就是說雷卡森数小是湍流发展的必要条件, 而不是充分的条件。

康斯坦丁諾夫提出了低空大气的有效温度梯度 $\gamma_{s_7} = 0.7^\circ\text{C}/100$ 米。这样雷卡森数为:

$$Ri_{s_7} = \frac{\frac{g}{T}(\gamma_{s_7} - \gamma)}{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]} \quad (39)$$

当

$Ri_{s_7} < 1$ 时, 湍流发展;

$Ri_{s_7} = 1$ 时, 为湍流发展与衰减的判据;

$Ri_{s7} > 1$ 时, 湍流衰减。

从圖 16 顯見, 大的湍流系数一般伴随着小的雷卡森数或負的雷卡森数, 小的湍流系数一般伴随着大的雷卡森数。

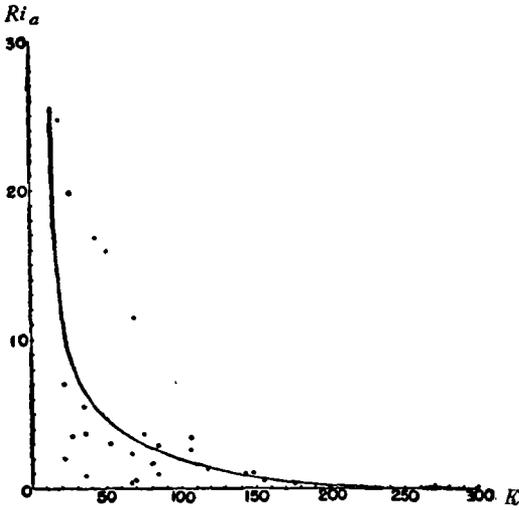


圖 15. 雷卡森数 Ri_a 和湍流系数的关系

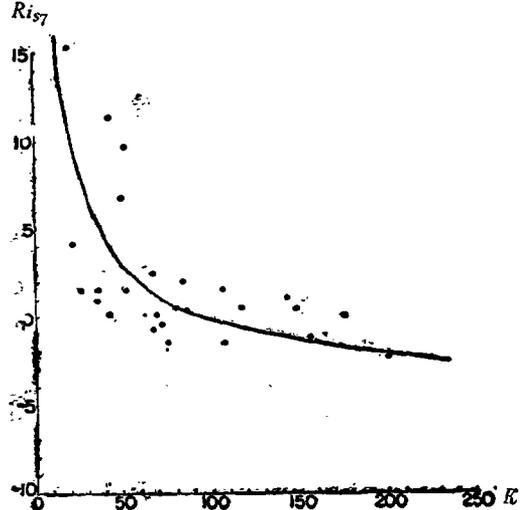


圖 16. 雷卡森数 Ri_{s7} 和湍流系数的关系

布德科及尤金(Юдин)提出了低空大气的平衡温度梯度 $\gamma_{s3} = 0.6^\circ\text{C}/100$ 米, 得 Ri_{s3} . Ri_{s3} 与 K 的关系曲线与圖 16 相差不多。

从圖 15 及圖 16 看来, 对于雷卡森数在大气摩擦层中判別湍流的發展, Ri_{s3} 和 Ri_{s7} 較 Ri_{sa} 为好。在有湍流的大气中, 干絕热减温率 γ_a , 不能圓滿的作为大气热力穩定度的判据, 而是如布德科及尤金所指出的, 它应当是比 γ_a 为小的平衡温度 γ_s 。这样也是雷卡森数 Ri_a 不能十分圓滿的判定大气的穩定状态的緣故。

6. 湍流系数 K 之日变化

大气的状态, 存在有日中的变化。温度梯度、風的切变, 晝夜相差懸殊。大气的穩定度, 日中也有不同。因而湍流系数 K 也存在有明顯的日中变化。

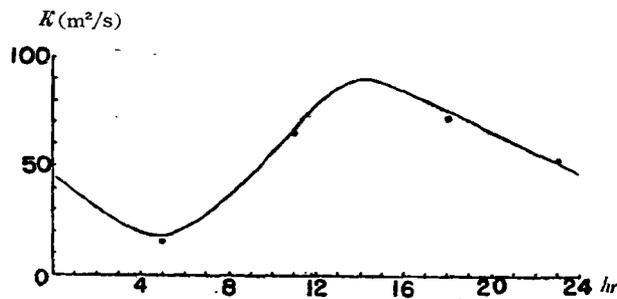


圖 17. 湍流系数 K 的日中变化

本文根据,夏月三十四个实例的计算(利用爱克曼法则)。结果有如圖 17 所示。

由圖 17, 顯見湍流系数 K 最大出现在过午, 最小值出现在黎明之前。这是和 M. П. 丘利諾娃(Чуринова)得到的结果大抵相似(如圖 18)。

圖 18 是丘利諾娃在列宁格勒地球物理观象总台(ГГО) 1951年7月21日至8月21日计算的结果。

圖 17 和圖 18 两者型式大抵类同, 但是在圖 17 中的变化較圖 18 中湍流系数变幅为大, 这可能是所处的緯度、地理环境等因子不同所致。

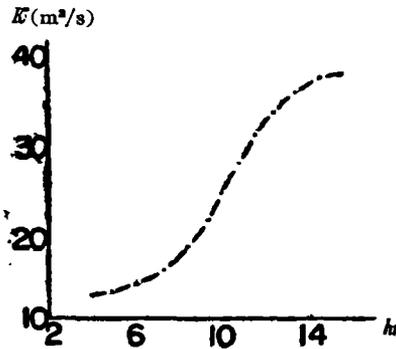


圖 18. 列宁格勒地球物理观象总台 1951年观测的湍流系数在夏月中的日中变化^[9]

四. 討 論

在摩擦層中湍流系数的计算过程中, 发现常常在摩擦上層中湍流系数迅速变小, 这一事实, 过去 C. G. Rossby 及 R. B. Montgomery 在理論上也曾經指出过这一点。^[4]

如在一次湍流系数的计算中, 如圖 19 所示, 很顯然的从 100 米开始到 1500 米湍流

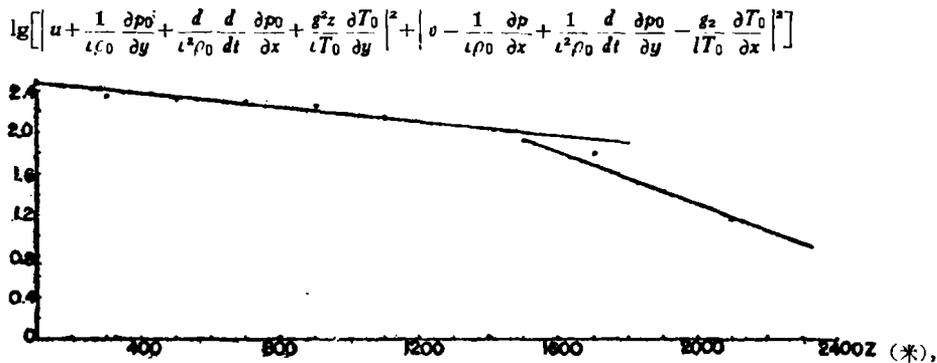


圖 19. 1955年10月20日23时北京湍流系数的计算

系数为 $K=223 \text{ m}^2/\text{s}$, 而在 1500 米至 2100 米湍流系数为 $K=24 \text{ m}^2/\text{s}$ 。湍流系数 K 随高度的分布, 必然如圖 20 所示。

固然, 这对于摩擦層中湍流系数的計算, 無大影响, 但是在計算摩擦層中風的分布务須考慮。

关于它的詳細情况, 尚待精确的測量, 深入的研究。自然低空大气層結的不連續是造成这种过程的因子之一。

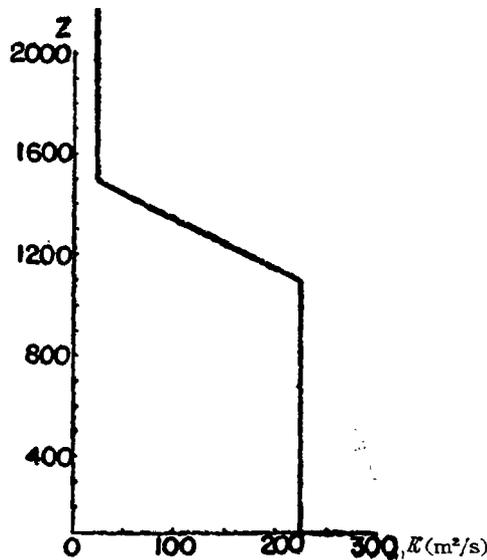


圖 20. 1955 年 10 月 20 日 23 时摩擦層中湍流系数的分布

五. 結 語

湍流系数的測定是研究低空大气中气象問題的根本。随着高空測量技術的精确化, 湍流系数的測定也必然的導致于准确的結果, 这样对低空大气中气象問題的解决是起着重要的作用的。关于湍流系数計算的問題, 本文提供了在計算方面精确化和实用方面廣泛化的途徑, 备予从事低空大气問題研究工作同志参考。

本文承阿基莫維奇教授的指導, 謹此致以衷心的謝意。

附 錄

我們在此处將要較詳細的討論从公式(9)至公式(16)的導演問題。由于公式(7)及公式(8)的条件, 所以公式(6)可以寫成如下的形式:

$$\begin{aligned} -lV &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + K \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ lU &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + K \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

取复速度 $W = U + iV$, 于是

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - 2i\lambda^2 W - 2i\lambda^2 f(z) = 0, \quad (10)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{l/2k}, \quad (11)$$

$$f(z) = \frac{1}{l\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad (12)$$

于是

$$W = B_1 e^{\lambda\sqrt{2i}z} + B_2 e^{-\lambda\sqrt{2i}z} + \frac{e^{\lambda\sqrt{2i}z} \int_0^z e^{-\lambda\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi - e^{-\lambda\sqrt{2i}z} \int_0^z e^{\lambda\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi}{\frac{\sqrt{2i}}{\lambda}}. \quad (13)$$

取 $\sqrt{2i} = 1 + i$, 设在 $0 < z \leq H$ 的区间内 $f(z) = A + Bz$, 而 H 是大于或等于摩擦高度, 这样

$$W = \left(B_1 + \frac{A}{2i} + \frac{B}{2i\sqrt{2i}\lambda} \right) e^{\lambda\sqrt{2i}z} + \left(B_2 + \frac{A}{2i} - \frac{B}{2i\sqrt{2i}\lambda} \right) e^{-\lambda\sqrt{2i}z} - \frac{A + Bz}{i}, \quad (40)$$

或

$$W = D e^{\lambda\sqrt{2i}z} + C e^{-\lambda\sqrt{2i}z} - \frac{A + Bz}{i}, \quad (41)$$

其中

$$D = \left(B_1 + \frac{A}{2i} + \frac{B}{2i\sqrt{2i}\lambda} \right), \quad C = \left(B_2 + \frac{A}{2i} - \frac{B}{2i\sqrt{2i}\lambda} \right).$$

令 $D = D_x + iD_y$, 而 $D_x = D_0 \cos \alpha$, $D_y = D_0 \sin \alpha$

$$C = C_x + iC_y, \quad \text{而} \quad C_x = C_0 \cos \beta, \quad C_y = C_0 \sin \beta.$$

其中 D_0, C_0 为复数 D, C 在复平面内的向径, α, β 分别为 D, C 向径与实轴之交角。

因为 $\sqrt{2i} = 1 + i$, 于是

$$e^{\lambda\sqrt{2i}z} = e^{\lambda(1+i)z} = e^{\lambda z} (\cos \lambda z + i \sin \lambda z),$$

$$e^{-\lambda\sqrt{2i}z} = e^{-\lambda(1+i)z} = e^{-\lambda z} (\cos \lambda z - i \sin \lambda z).$$

这样，將公式(41)內的复速度 W 再分度 U, V 两个分量，則

$$\begin{aligned} U &= D_0 e^{\lambda z} \cos(\alpha + \lambda z) + C_0 e^{-\lambda z} \cos(\beta - \lambda z) - (A_y + z B_y), \\ V &= D_0 e^{\lambda z} \sin(\alpha + \lambda z) + C_0 e^{-\lambda z} \sin(\beta - \lambda z) + (A_x + z B_x). \end{aligned} \quad (42)$$

令 ψ 为

$$\psi^2 = (U + A_y + z B_y)^2 + (V - A_x - z B_x)^2, \quad (43)$$

ψ 的物理意义乃是穩定态的風与考虑热成風后高空气压風两者之向量差。

由公式(43)

$$\psi^2 = D_0^2 e^{2\lambda z} + C_0^2 e^{-2\lambda z} + 2D_0 C_0 \cos(2\lambda z + \alpha - \beta),$$

而

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial z} = 2\lambda [D_0^2 e^{2\lambda z} - C_0^2 e^{-2\lambda z} - 2D_0 C_0 \sin(2\lambda z + \alpha - \beta)].$$

根据我們所知，当 z 在摩擦高度 h ，或在摩擦高度以上。穩定态的風是与等压綫平行的，穩定态的風就是高空的气压風。

这样，当 $z \geq h$ 时， $\psi^2 \rightarrow 0$ ，

即

$$D_0^2 e^{2\lambda z} + C_0^2 e^{-2\lambda z} + 2D_0 C_0 \cos(2\lambda z + \alpha - \beta) \rightarrow 0. \quad (44)$$

在摩擦層中，穩定态的風和等压綫总是存有一定的偏差。这样，当 $z < h$ 时， $\psi^2 > 0$ ，

即

$$D_0^2 e^{2\lambda z} + C_0^2 e^{-2\lambda z} + 2D_0 C_0 \cos(2\lambda z + \alpha - \beta) > 0, \quad (45)$$

而这个偏差，即穩定态的風与高空气压風的偏差，它随高度逐渐变小。这样，当 $z < h$

时， $\frac{\partial \psi^2}{\partial z} < 0$ ，

即

$$D_0^2 e^{2\lambda z} - C_0^2 e^{-2\lambda z} - 2D_0 C_0 \sin(2\lambda z + \alpha - \beta) < 0, \quad (46)$$

这个偏差逐一减小，到摩擦高度 h 或摩擦高度 h 以上，这个偏差 ψ^2 趋近于零了。因而，当 $z \geq h$ 时，

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial z} \rightarrow 0$$

即

$$D_0^2 e^{2\lambda z} - C_0^2 e^{-2\lambda z} - 2D_0 C_0 \sin(2\lambda z + \alpha - \beta) \rightarrow 0. \quad (47)$$

这样，在公式(44)中常数 D, C 必須要滿足上述四个条件方可。考虑第一个边界条件，即 $z \geq h$ 时， $\psi^2 \rightarrow 0$ ，公式(44)可以寫着如下的型式：

$$(D_0 e^{\lambda z} - C_0 e^{-\lambda z})^2 + 2D_0 C_0 [1 + \cos(2\lambda z + \alpha - \beta)] \rightarrow 0, \quad (48)$$



圖 21. ψ 的意义

实矢表示: $A + BZ$

虚矢表示: $W (= U + iV)$

点矢表示: ψ

公式(48)左面第一項括弧內($D_0 e^{\lambda z} - C_0 e^{-\lambda z}$)²永远大于或等于零。第二項括弧內 $[1 + \cos(2\lambda z + \alpha - \beta)]$ 是永远大于零或等于零。若使公式(48)趨近于零,必須

$$D_0 C_0 \leq 0. \quad (49)$$

同样的,从公式(48)亦可得到下面的型式:

$$(D_0 e^{\lambda z} + C_0 e^{-\lambda z})^2 - 2D_0 C_0 [1 - \cos(2\lambda z + \alpha - \beta)] \rightarrow 0, \quad (50)$$

則只有在

$$D_0 C_0 \geq 0 \quad (51)$$

方有可能。

綜合公式(48)与公式(50)及其結果公式(49)与公式(51),則必定是

$$D_0 C_0 = 0. \quad (52)$$

这样有三組解答。

$$D_0 = 0, \quad C_0 = 0; \quad (53)$$

$$D_0 \neq 0, \quad C_0 = 0; \quad (54)$$

$$D_0 = 0, \quad C_0 \neq 0. \quad (55)$$

顯見,第一組解答不是我們需要的,至少它不能滿足于第二个边界条件,即在摩擦層中,風与等压綫一致的,这是与实际不合。

顯見,第二組解答也不是我們需要的,至少它不能滿足于第三个边界条件,風与等压綫的偏差逐漸加大,这是与事实不合的。

因此,只有第三組解答是唯一的一組解答,它是滿足于上述的四个边界条件的。即

$$D_0 = 0, \quad C_0 \neq 0. \quad (56)$$

这样

$$W = C_0 e^{-\lambda \sqrt{2i} z} - \frac{A + Bz}{i},$$

分复速度 W 为 U 及 V , 則

$$U = C_0 e^{-\lambda z} \cos(\beta - \lambda z) - (A_y + zB_y),$$

$$V = C_0 e^{-\lambda z} \sin(\beta - \lambda z) + (A_x + zB_x).$$

萊赫特曼处理公式(9)至公式(16)是这样的

$$e^{\lambda \sqrt{2i} z} \int_0^z e^{-\lambda \sqrt{2i} \xi} f(\xi) d\xi = e^{\lambda \sqrt{2i} z} \int_0^\infty e^{-\lambda \sqrt{2i} \xi} f(\xi) d\xi - e^{+\lambda \sqrt{2i} z} \int_z^\infty e^{-\lambda \sqrt{2i} \xi} f(\xi) d\xi. \quad (57)$$

而 $\int_0^\infty e^{-\lambda \sqrt{2i} \xi} f(\xi) d\xi$ 是有限的,令它为 B_0 .

于是,公式(13)即为

$$W = (B_1 + B_3)e^{\lambda\sqrt{2iz}} + B_2e^{-\lambda\sqrt{2iz}} - \lambda \frac{e^{\lambda\sqrt{2iz}} \int_z^\infty e^{-\lambda\sqrt{2i\xi}} f(\xi) d\xi + e^{-\lambda\sqrt{2iz}} \int_0^z e^{\lambda\sqrt{2i\xi}} f(\xi) d\xi}{\sqrt{2i}}. \quad (58)$$

風速不能無窮增長,故而 $B_1 + B_3$ 必須為零,

$$W = B_2e^{-\lambda\sqrt{2iz}} - \lambda \frac{e^{\lambda\sqrt{2iz}} \int_z^\infty e^{-\lambda\sqrt{2i\xi}} f(\xi) d\xi + e^{-\lambda\sqrt{2iz}} \int_0^z e^{\lambda\sqrt{2i\xi}} f(\xi) d\xi}{\sqrt{2i}}. \quad (59)$$

令 $f(z) = A + Bz$ 代入,于是得到

$$W = Ce^{-\lambda\sqrt{2iz}} - \frac{A + Bz}{i},$$

$$\text{而 } f(z) = A + Bz = \frac{1}{i\rho_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} + i \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) + \frac{gz}{iT_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} + i \frac{\partial T_0}{\partial y} \right).$$

顯然,在 0 至 ∞ 之間,上述关系是不滿足的。這樣的計算,在理論上是值得商榷的。

参 考 文 献

- [1] Лайтман, Д. Л., Динамическая метеорология. Гидрометеиздат, 1955, 635.
- [2] Болонский, В. А., Динамическая метеорология. Гос. издат. 1948, 703.
- [3] Тарского, Л. Н., Курс метеорологии. Гидрометеиздат, 1951, 888.
- [4] Litzau, H., Atmosphärische Turbulenz Akademische, verlag-geellschaft. M. B. H. Leipzig 1944, 283.
- [5] Лайтман, Д. Л., Труды ГГО. вып. 87 (99) 1952, 78-82.
- [6] Jaw, J. J. (趙九章), The Science Reports of National Tsing Hua University Ser. A. Mathematical, Physical and Engineering Science, Vol. IV. No. 4, 5, 6. 1947, 363-378.
- [7] Дюбок, А. Ф., Труды Научно-исследовательский учрежденный синоптическая метеорология, серия 11. вып. 24. 1947, 13-27.
- [8] Сапли, Л. М., Метеорология и Гидрология, No. 2. 1955, 18-21.
- [9] Чуринова, М. П., Труды ГГО. 1953, 38.
- [10] Haurwitz, B., Journal of Meteorology, V. 3. No. 3, 1946, 95-99.
- [11] Brunt, D., Physical and Dynamical Meteorology, pp. 423. Cambridge at the University Press. 1944.

TURBULENT EXCHANGE IN THE FRICTION LAYER

CHAO BER-LIN

(*Peking University*)

ABSTRACT

The Austausch coefficient may be obtained by wind structure. 1902 Ekman established the wind spiral theory in the friction layer. From the observed wind spiral, we may calculate of the Austausch coefficient by this theory. 1952 Лайхтман considered effect of the change of pressure field with height; i. e. the thermal wind effect, and found excellent results. But, Лайхтман's Formula holds only for the condition in the stationary current flow, or in the stationary temperature pressure field and uniform temperature pressure gradient.

In this paper, we consider the unstationary effect, as calculating the Austausch coefficient in the friction layer, and obtain a more general formula. Under some special constrains, it tends to be the Лайхтман or Ekman's formula. Then, this formula may be more accurate in calculation and more wide in application.

Some calculations based on observed data by using these three different formulas are presented and compared.