

綜合報告

大範圍高空溫壓場的流體力學預報法(上)^{*} (綜合報告)

顧震潮

(中國科學院地球物理研究所)

目次

- | | |
|------------------------|-------------------|
| 一. 引言 | 二. 高空溫壓場流體力學預報法簡史 |
| 三. 方法: 1. 一般方法 2. 各種模式 | 四. 需要解決的幾個問題 |
| 3. 其他方法 | 五. 結論 |

一. 引言

氣象學的主要任務之一就是預報天氣。人類最後要控制天氣,但首先應該並需要了解天氣、預報天氣。

到現在為止天氣預報一般的技術或方法仍是定性的,半經驗的。這種預報和其他科學如天體力學、潮汐上的預報比起來是有很大差別的。在天氣預報上現在不但談不上像天文年曆或潮汐表那樣推算出下一年中每天的天氣,並且就連24小時的短期預報都還有許多沒有克服的障礙,以致還有許多嚴重的天氣變化都報不出來。

困難是兩方面的。一方面是我們對天氣變化的實際情況還了解得太少。直到現在對寬廣而深厚的大氣,我們所掌握的主要只是地面天氣的情況。而這種地面天氣情況的掌握還只限於一般陸地上;像海洋、沙漠、高原、冰原等等廣大地區我們的氣象觀測就非常稀少了。雖然由1930年蘇聯 П. А. Молчанов 發明了無線電探空儀起,高空氣溫等觀測逐漸列入各大台站的日常觀測之中,但由於無線電氣象探測儀器的昂貴,高空觀測網仍然很疏,對高空天氣情況的了解因而仍是很不完全,並且精確度也差。在這方面氣象觀測儀器的精確化、自動化、廣設測站以使我們得到更多更密更

^{*} 中國科學院地球物理研究所論著第272號。1955年6月15日收到。

精確的氣象觀測資料是最重要的。困難的另一方面是預報法則的不易掌握。的確，氣象學是一門十分年青幼稚的科學，氣象中一些基本定律像斜壓流體的環流定理，還是十九世紀最後幾年才發現的東西，而湍流項的形式則一直到 1930 年後才完全決定下來。對大範圍高空流型發展起很大作用的因子慣性因子（由地轉偏向力的垂直分量隨緯度改變而造成的）是 1938 年後才明確地提出來^[1,2]，而平流動力分析的理論基礎到第二次世界大戰中（1940 年）才建立起來。還有許多因素如地形擾動，水汽，摩擦，輻射，穩定性分佈等等對天氣過程發展的影響甚至還沒有很好的理論和計算，來給預報工作中具體使用，甚至還有一些天氣系統，如颱風等等，連它的機構和發展過程都沒有十分弄清楚。凡此種種可以充分說明氣象學特別是天氣預報的年青幼稚。在這種情況下，天氣預報工作不能不是定性的，半經驗的。然而要提高天氣預報的準確率，要使天氣預報精確化，天氣預報必須而且應該逐步客觀化，定量化。

天氣預報的客觀化和定量化中最根本而直接的方法，即是根據流體力學和熱力學的原理列出描寫天氣的方程組，再在必要的邊界條件和起始條件下，把這些方程組直接用數值積分的方法，求出各氣象要素的在未來的分佈。這種方法即所謂流體力學的天氣預報法或數值預報法。天氣方程組是一個很複雜的方程組，而邊界條件或起始條件又是很複雜的條件，特別因為對於天氣預報的要求來說，第一，要考慮運動是有限的，不能把方程組中的非線性項置之不理而把方程線性化，必須考慮三度的有限的非常定運動；第二，一定要用當時出現的實際的起始條件和邊界條件（實際地形，實際溫壓場等），不能討論假想的典型構造。因此我們固然不一定要求出它的閉合的解答，並且在今天也是不可能的。

在目前，由於客觀條件的限制，流體力學的預報法還只有在比較簡單的一些問題，例如大範圍高空溫壓場的預報上比較發展得成熟一些。但是由於大範圍高空溫壓場的預報是一般天氣預報中首先要解決的主要問題，這方面的任何發展都是值得我們注意的。因此，我們在下面就這方面簡單介紹一下。末了也附帶提一提高空溫壓場以外的流體力學預報，因為這也就是下一步所要努力解決的問題。

二．高空溫壓場流體力學預報簡史

儘管天氣預報的問題早在上世紀初已有 М. В. Ломоносов, Д. И. Менделееv 以及 V. Bjerknes 等人提出要作為物理問題並且定量地來考慮，但是到 1920 年左右才有 L. F. Richardson^[3] 認識到流體力學預報方法的必要性，認真從事天氣方程組的

數值積分，以使天氣預報精確化。然而 Richardson 的工作雖然很有啓發性和創造性，當時的客觀條件卻遠沒有成熟。這是因為不但像前面所說當時氣象觀測紀錄還遠為不夠精密，人們對天氣法則的了解很不完全，並且計算技術方面也還非常幼稚，現代的高速計算機根本還沒有影子，即使有一些方案也無法按照預報的要求在有效時間之前把預報的數值計算出來。因此，即使像 A. A. Фридман 和 Н. Е. Кочин 這樣的學者經過長時間的努力，這個問題還是沒有解決*

重要的是 Фридман 和 Кочин 對許多基本問題的研究使我們對大氣運動的物理機構得到更清楚的認識。他們也提出了處理大氣運動的原則是新的方法。在這樣的基礎上，1940 年 И. А. Кибель^[4,5,6]用了適當的邊界條件首先創造出高空大範圍溫壓場斜壓性發展的一個數值預報方法，這是動力氣象和天氣預報上的一個巨大貢獻。Кибель 這種定量的預報方法很是簡單也曾正式試做過。Успенский^[7]並曾利用 Кибель 的方法來作 24 小時的高空溫度和比濕的數值預報**，按所用的紀錄密度和精度來說，結果也是比較令人滿意的。甚至於美國比較客觀一些的學者在試做之後也不得不承認這個方法的優越性^[8]。

之後，Ertel^[9]曾討論過流體力學預報方法的理論問題，但沒有具體的建立起一套辦法。

1949 年美國 Charney^[10,11]開始在地轉風近似下作高空大範圍流型的數值預報。他用的是渦度方程（Фридман 方程），着重考慮了科里奧來參變數的南北變化。所考慮的起初是一度的^[10,11]，之後是二度的正壓大氣模式^[12]。由於實際大氣經常是斜壓性的，實際的天氣過程發展特別在關鍵場合下是斜壓性的發展，1952 年起 Charney 等在同一基礎上開始了各種斜壓大氣模式^[12,13]的流體力學預報方案，並應用高速的電子數字計算機幫助數值計算，得到比較可以實用的結果。

最近二、三年來，流體力學的預報方法進步更是極快。人們已由一層兩層的大氣模式進而討論了多層的大氣模式，24 小時預報 500 毫巴高度分佈的成績有的甚至可能比根據質的規則作成的半經驗性預報（即氣象台正式發佈的預報）更好^[14]。因此不但從去年起各國已有正式逐日製作流體力學方法的短期預報，並且還在試做或研究

* S. Petterssen 的運動學的計算只是幾何的形式的聯系，談不到發展，無庸深論。

** 他的方法中並不逐步分段積分，卻按測站位置作成不等邊網格，考慮了垂直輸送計算出 $\frac{\partial T}{\partial t}$ （或比濕變化 $\frac{\partial q}{\partial t}$ ）， $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ （或 $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ ）而一次外推 24 小時。他的計算相當花時間，但沒有提到用什麼特殊的計算機。

數值的中期預報。除了美國、瑞典、英國、日本用着類似的方法進行和試驗外，法國另外从不同一些的理論和計算工具在試做十來天的數值預報，德意志民主共和國正在研究數值預報的理論，捷克斯洛伐克也在研究，苏联方面自然可能更有進展。当然，天氣預報的全面的數值化，還不是很快的事，但是對於大範圍天氣系統發生、發展的數值預報則顯然已掌握了很大一部分。天氣預報的精確化，客觀化，即天氣預報的數值化已經不再是學院式的研究而已經進入日常業務了，它已經不是遙遠的遠景，即使對預報員也已是近在身旁的東西了。因此，不論從理論上或是預報業務上來看，對於大範圍天氣系統發生發展的流體力學預報方法是非常值得我們注意和重視的。而在这方面的一個綜合報告應該是合乎當前需要的。不過，由於材料的限制，我們目前還只能主要介紹由 Charney 等所發展出來的方法。

三. 方 法

(一)一般方法

如果我們把大氣看做理想的完全氣體，那末用來描寫天氣過程發展的天氣方程組可以取下項形式(見 Белинский^[15])

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_x v - \omega_y z) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A' \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A' \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x z - \omega_y \mu) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A' \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A' \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2(\omega_y \mu - \omega_x v) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A' \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A' \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial z}{\partial z} \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.4)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.5)$$

(1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K' \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K' \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu \int I_\nu d\omega = \rho c_v \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} - 4\pi \rho \int_0^\infty \eta_\nu d\nu \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \eta_\nu + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int I_\nu(p, r') \gamma_\nu(t, p, r', r) d\omega' - (\alpha_\nu + \sigma_\nu) I_\nu \quad (1.7)$$

$$\eta_\nu = \alpha_\nu \frac{2h_\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D' \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D' \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial s}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

上面這九個方程中 (1.6) 式是熱通量方程, (1.7) 式是輻射能傳遞方程, (1.8) 式是輻射方程, (1.9) 是水汽傳遞方程。各符號的意義如下: s 為路徑長度, γ_ν 為散射函數, σ_ν 為散射係數, η_ν 是輻射係數, r, r' 是輻射由 P 點射出的方向, 輻射能吸收係數是比溼 s 的函數 ($\alpha_\nu = \alpha'_\nu s$), I 是輻射強度, 其他各量的意義與一般通用的相同。在上面這個方程組中 $u, v, w, p, \rho, T, I_\nu, \eta_\nu, s$ 是九個未知數, $R, c_p, c_v, h, \nu, c, k$ 是常數或準常數, $\omega_x, \omega_y, \omega_z, A', A, K, K', D, D', \sigma_\nu, \gamma_\nu, \alpha'_\nu$ 是物理參變數即座標的已知函數。上面這樣一個複雜方程目前還不能求出完全的解答。但是我們對於不同的具體問題可以根據問題中過程的具體性質來把這方程組加以簡化以便求得切合實用的解答。我們知道根據經驗和理論對於為期一二天的短期預報來說, 輻射的影響對天氣過程的發展是不大的。在自由大氣中湍流的影响也是不大的。而作為初步近似我們暫且不加考慮水汽的作用* (主要是凝結蒸發)。這樣輻射場和水汽場就由整個系統分出而方程組本身因而可以簡化成

$$\frac{du}{dt} - 2\Omega v \sin \varphi + 2\Omega w \cos \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{dw}{dt} - 2\Omega u \cos \varphi + g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.3) \quad (2)$$

* 顯然對颱風等問題不考慮這一點是不行的。

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (\theta = K\rho^{-1}p^{c_p/c_p}) \quad (2.5)$$

這樣我們的對象就只限於溫度場、壓力場和速度場了。但是這樣的方程組還是很不容易解的，而其中所包含的大氣運動也種類太多。譬如說山谷風，海陸風，慣性振動以及重力波，衝擊波等等一概都可以用這方程組來研究的。因此要用來研究高空大範圍的溫壓、速度場的數值預報我們還要針對高空大範圍溫壓、速度場的尺度特性來把這方程組作進一步的簡化。

使這種簡化能夠實現的是 Кибель^[4,6] 的尺度理論。Кибель 照 Prandtl 邊界層理論中那樣考慮了對象的特殊性質，確定了大範圍大氣運動的特性尺度而比較了天氣方程組中各項的大小，並由此證明在大範圍運動中即特性水平長度 $L=10^8$ ，特性高度 $H=10^6$ ，特性時間 $\tau=10^5$ ，而特性水平風速 $U=10^3$ ，特性垂直風速 $W=10^0$ 時，水平加速度比水平科里奧來加速小一個級次（即大氣的轉動近於剛體的， $\zeta \approx 2\omega \ll 2\Omega \sin \varphi = f$ ），因為這時它們的比值 $\varepsilon = v/Lf = 1/\tau f = 10^{-1}$ ；垂直加速更小，作為第一近似值，略去小了一個級次的項之後方程組 (2.1) 可簡化做

$$+fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.3) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (\theta = K\rho^{-1}p^{c_p/c_p}) \quad (3.5)$$

也就是說運動可以看做是地轉的。在第二近似值下，略去小了兩個級次的項之後，方程 (2.1) 可簡化做

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{d_g u_g}{dt} \quad (4.1)$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{d_g v_g}{dt} \quad (4.2)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.3) \quad \left. \begin{array}{l} (4.3) \\ (4.4) \\ (4.5) \end{array} \right\} (4)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (4.5)$$

其中

$$\frac{d_g}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}.$$

可在前邊的式子幫助下計算 $\partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y$ ，並引入渦度、略去小了兩個級次的微量來表達(見 Белинский^[15])

$$\frac{d_g(\zeta_g + f)}{dt} = -\frac{f}{\rho} \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right] = \frac{f}{\rho} \frac{\partial \rho w}{\partial z} \quad (4.4)'$$

其中

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$$

或者再与 (4.5) 式相結合寫成

$$\frac{d_g q}{dt} = 0 \quad q = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} + f \right) \quad (4.4)''$$

不論研究天氣發展，地形的一些影响或計算垂直運動，以後要處理的主要就是 (4.4)' 式或 (4.4)'' 式。由此可見，在研究高空大範圍的大氣運動時我們可以把地轉風或地轉風加上地轉風本身造成的 $d_g \mathbf{v}_g / dt$ 分別作為運動的第一及第二近似值。方程組 (3) (4) 是 Кибель 所處理的大氣運動表達式，也就是約十年後 Charney 在同一近似值下所處理的表達式*。他們之間的不同主要是以後在處理方程組 (4) 時所取的上界的邊界條件** 和直接對象。Rossby^[1] 在 1939 年及 Блинова^[2] 在 1940 年曾使用了方程組 (4) 的正壓形式，(這形式不能由 (4) 或 (4.4)'' 直接求出，而要另外從頭求起)，

* 實際上這兩種發展理論都是有用的，例如當等高線是均勻、散開的直線，等溫線與等高線又平行，這時有動力減壓，但渦度到處等於零，渦度平流和它所決定的氣壓變化也到處是零。但如在等距離的波狀等高線分佈(等溫線與等高線平行)下，動力變壓和平流變壓等於零，而渦度平流及由此所決定的變壓仍不等於零。

** 邊界條件是很重要的條件，在這裏就像許多別的問題中一樣，由於邊界條件的不同，最後結果十分不同。

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.1)$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.2)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.3)$$

$$\frac{d_g}{dt} \left(\frac{\zeta_g + f}{p} \right) = 0 \quad (5.4)$$

$$\rho = \rho(p). \quad (5.5)$$

(5)

由於 Charney 沒有更仔細地考慮他一直沒有把方程組系統(3)和(4)的第一和第二近似*的性質分別清楚,以致把方程組(3)和(4)混了起來,把(3.1)(3.2)(4.4)''並提,統稱所謂準地轉運動**。其實我們把動量輻散與渦度連結起來求(4.4)'的時候就已經用到第二近似值。因此,(4.4)''與(3.1)(3.2)是根本不同的近似,是不能相提並論的。

方程(3)和(4)的優點是抓住了高空大範圍運動的一般特性而簡潔地把它表達了出來。並且在這樣的方法中我們顯然可以看到由於這方程組(3)或(4)中我們已經用氣壓場來表示風場,這就是說風場已經不是獨立的了。這樣我們所要處理的物理量的場又減少了一個。我們的對象就只是溫壓場了。我們以後就只談大範圍高空溫壓場的預報了。這是很需要的,因為我們也就避免了氣象學上所經常遇到的困難。人人知道在氣象觀測上高空風的觀測還是和溼度觀測一樣在精度上不能滿足我們的許多要求的***。

由於方程組(3),(4)這種特性我們也要記得。我們不能把方程組(3),(4)直接用到其他各種不合式的大氣運動上去。不但對於加速度很大甚至靜力平衡都不精確成

* 也應該指出風速的第二近似值曾由 Ertel (*Ann. Hydrog. u. mar. Met.* 68 (1940), 421—431 H. Phillips *M. Z.* 56 (1939), 460 及 V. Miegiam (見 Stewart, Kinematics and dynamics of fluid flow, *Handbook of meteorology*) 用別的方法求出,但他們都沒有系統地進一步找出整個方程組(4)來討論流體力學預報方法的問題。

** 因為(4.4)''中已不是地轉風下的關係故與(3.1),(3.2)不一致,不能稱為地轉運動。為了解除(3.1),(3.2)與(4.4)''間的這種矛盾就統稱為準地轉運動。

*** 例如由風的觀測來直接計算 $\int_0^\infty \text{div}_2 \rho v dz$ 誤差就會很大而得不到可靠結果的。相似地,要用 Кибель 的公式 $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \frac{c_p \rho_0}{RT_0} (V_H - V_0) \cdot \nabla T_0$ 來計算 $\frac{\partial \rho_0}{\partial t}$ 也是得不到可靠結果的,因為原式右邊是 V_H 與 V_0 兩個數量的較差,而 V_H 或 V_0 本身的誤差(包括代表性,陣風及觀測誤差)至少有 2 米/秒,這在 $\nabla T_0 = 1^\circ\text{C}/100 \text{ km}$ 時約相當 $\partial \rho_0 / \partial t$ 的誤差 20 毫巴/24 小時。這是不能容忍的。

立的小範圍系統例如龍捲風, 雷暴, 颱風線不能用, 就是對於中等範圍的運動如慣性波, 曲率很大的高空槽脊, 半徑很小的高空氣旋或反氣旋以及西風急流很強 ($n=10^4$) 地帶也不合式。還有如果我們考慮整個半球的大氣運動, 那麼我們還必須使用球座標情形也要複雜些, 像在輻散項中就要多 $\frac{V}{R} \tan \varphi$ 的項。凡此, 都是需要我們在使用時加以注意和另行設法研究的。

根據上面的推演也不難看出, 方程組 (3) 或 (4) 是整個的體系, 譬如我們如果要改進 (4.4)' 式的近似程度, 我們並不能單純地把 $d_g(\zeta_g + f)/dt$ 中用到 u_g 及 v_g 的地方直接把 (4.1), (4.2) 裏的 u 及 v 來代替而得到第三近似值, 因為, 在求 (4.4)' 式的時候我們還已略去其他次一級的微量。進一步的近似值我們可以在以後再考慮。

Charney 与 Phillips^[13] 把 (4.4)' 式用到斜壓大氣中選定的 n 層等壓面上來預報這 n 層等壓面的高度變化。先把 (4.4)'' 微分出來, 再除以 $\eta = \zeta_g + f$ 及 $\frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$, 之後把平均靜力穩定度 $S \equiv \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$ 來代替分母中的穩定度, 又把分母中的 η 取適當的平均值 $\bar{\eta}^*$, 用

$$\frac{1}{\bar{\eta}} \frac{d_g \eta}{dt} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial p} \frac{d_g \ln \theta}{dt} \quad (6)$$

其中 $\eta = \zeta_g + f$ 然後把 $p=0$ 到 $p=p_0$ 的大氣層劃分成 n 個相等的層次, 而把微分化成差分(有限差), 每層間隔是 δp , 由上向下第 k 個間隔中的量用附加符號 k 來記, 在這氣壓間隔的分界層中

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{\eta}} \frac{d_g \eta}{dt} \right)_k &= \frac{1}{s \delta p} \left[\left(\frac{d_g \ln \theta}{dt} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{d_g \ln \theta}{dt} \right)_{k-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{s(\delta p)^2} \left[\left(-\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d_g}{dt} (\phi_{k+1} - \phi_k) \right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d_g}{dt} (\phi_k - \phi_{k-1}) \right)_{k-\frac{1}{2}} \right] \quad (6)' \end{aligned}$$

其中 $\phi_k = gZ_k$ 是 p_k 等壓面層的高度。因在等壓面層上

$$\frac{d_g \ln \theta}{dt} = \frac{d_g \ln \alpha}{dt} \approx \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d_g \alpha}{dt} = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d_g}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (7)$$

其中 α 是比容, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(p)$ 是一種標準大氣的比容, 又 $(\partial \phi / \partial p)_{k+\frac{1}{2}} = (\phi_{k+1} - \phi_k) / \delta p$ 。注意在地轉風下近似地,

$$\left(\frac{d_g}{dt} (\phi_{k+1} - \phi_k) \right)_{k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{d_g}{dt} (\phi_{k+1} - \phi_k) \right)_{k+1} = \left(\frac{d_g}{dt} (\phi_{k+1} - \phi_k) \right)_k$$

* 把 η 代 η 之後, 以後解出的 $\partial \phi / \partial t$ 雖然有時影響不大, 但仍是很有關係的。Charney^[14] 曾指出, 這樣一來, 一般是正值的 η 就可以有符號的改變, 這是有利於反氣旋格外發展的。

因爲 $(\phi_{k+1} - \phi_k)$ 的局地變化總是在 $\phi_{k+\frac{1}{2}} - \phi_k$ 的層中, 總是一樣, 而由於

$v'_{g, k+1} \cdot \nabla(\phi_{k+1} - \phi_k) = 0$ ($v'_{g, k+1}$ 是 k 與 $k+1$ 層中的熱成風) 所以

$$v_{g, k+1} \nabla(\phi_{k+1} - \phi_k) = v_{g, k} \nabla(\phi_{k+1} - \phi_k).$$

近似的令

$$\phi_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{k+1} + \phi_k),$$

$$v_{g, k+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \phi_{k+1} - \phi_k = v_{gk} \cdot \nabla(\phi_{k+1} - \phi_k).$$

那末 (7) 式成爲^[15]

$$\left(\frac{d_g}{dt} \right)_k \left[(\eta_k + \pi_k)(\phi_{k+1} - \phi_k) - \pi_{k-1}(\phi_k - \phi_{k-1}) \right] = 0$$

$$k=1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

其中

$$\pi_k = 0, \quad k=0, \text{ 或 } n$$

$$\pi_k = \bar{\eta}/s\bar{\alpha}_{k+\frac{1}{2}}(\delta p)^2 \quad k \neq 0 \text{ 或 } n$$

或者

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_k \right) q_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} - (m^2 f^{-1} q_k + f, \phi_k) = 0 \quad (9)$$

其中

$$(A, B) \equiv \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y},$$

而

$$q_k = \nabla^2 \phi_k + \sum_{r=1}^n A_{rk} \phi_r = \frac{f}{q} [\zeta_{g, k} + \pi_k(\phi_{k+1} - \phi_k) - \pi_{k-1}(\phi_k - \phi_{k-1})]$$

$$k=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

ϕ_k 是唯一的應變數。方陣 A_{rk} 爲負值有定 (negative definite),

$$A_{rk} = f \begin{vmatrix} -\pi_1 & \pi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi_1 & -\pi_2 - \pi_1 & \pi_2 & & \dots & \\ 0 & \pi_2 & -\pi_3 - \pi_2 & \pi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \pi_{n-2} & -\pi_{n-1} & -\pi_{n-2} & \pi_{n-1} \\ \dots & \dots & 0 & \pi_{n-1} & & -\pi_{n-1} \end{vmatrix}$$

m^2 是地圖的放大係數, k 層所在的等壓面層的氣壓 p_k 顯然是

$$p_k = \frac{k + 1/2}{n} p_0.$$

例如只取一層(即兩個間隔, $n=2$)的話, $p_{1/2} = \frac{1}{2} p_0 = 500$ 毫巴, 取兩層的話: $p_{1/2} = \frac{1}{4} p_0 = 225$ 毫巴, $p_{3/2} = \frac{3}{4} p_0 = 750$ 毫巴; 同樣取三層的話 $p_{1/2} = 167$ 毫巴, $p_{3/2} = 500$ 毫巴, $p_{5/2} = 833$ 毫巴。如果我們要挑所需要預報的等壓面層我們可以在求(9)式時引入單調(monotonic)變換 $\sigma = \sigma(p)$, 新的標準層可由

$$\sigma(p_k) = \frac{k - \frac{1}{2}}{n} [\sigma(p_0) - \sigma(0)]$$

解 p_k 而求出。例如取 $\sigma = p^2$ 那末二層模式中 $p_1 = 474$ 毫巴, $p_2 = 866$ 毫巴, 即約為 500 毫巴 與 850 毫巴; 三層模式中 $p_1 = 408$ 毫巴, $p_2 = 707$ 毫巴, $p_3 = 913$ 毫巴, 即約為 400, 700, 900 毫巴。

上面的做法事實上就是把一個三度空間的斜壓大氣預報問題化成 n 個兩度空間溫壓場的預報問題。這種做法是比直接處理三度問題來得容易些的。另一方面它卻又可以夠精確地表示出斜壓大氣的垂直構造。

上面這種分層處理的方法不是唯一的。我們可以用各種方法選出大氣的 n 個層次作為對象。例如我們可把大氣看作是密度各各不同的 n 個正壓大氣薄層組成的系統, 也可以取任意 n 個層次, 而在这 n 個層次中各取渦度方程的平均值來描寫这 n 個層次的運動。我們也可以用 n 個參數來描寫斜壓大氣中等壓面層的高度分佈。Phillips、Eady、Eliassen (見後文) 即分別由此求出相當的兩層模式。但上面所說的各種處理方法除常數的數值及意義不同外基本上是等值的。

要解方程 (4.4)'' 或等值的 (8) 或 (9) 和 (10) 時還要有一定的邊界條件。注意在這時我們的起始條件已化成 $\partial\phi/\partial t$ 的微分方程 (9) 式中的非齊次項。而我們的邊界條件則仍舊是邊界條件。顯然 (10) 式是一種橢圓型微分方程, 而橢圓型微分方程的邊界條件卻是對求解十分重要的東西。在我們的問題中, 我們所需要的邊界條件, 在大氣上界及下界可寫做

$$\omega(p_0) = \left(\frac{dp}{dt} \right)_{p=p_0} = 0 \text{ 或 } (d_g \ln \theta / dt)_{p=p_0} = 0$$

因為地面可以約略看做是等 $\bar{p}_0$ 面(並且也暫不考慮地形的強迫上升), 而

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = 0.$$

$$\text{又} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \omega = 0 \text{ 或 } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d_g \ln \theta}{dt} = \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = 0,$$

因爲 $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$ 不一定等於零。

對於區域四周的邊界條件是：在包圍平面成 R 的簡單閉合曲線 C 上我們知道任何時間的 ϕ 值^{*}，同時由於我們總還要先求出非齊次項中的 q ，然後才能倒回，我們又需要知道這曲線上的 q 值。最簡單的邊界條件當然是假定在 C 上 ϕ 與 q 值是不隨時間而變的常數，但如果我們有方法估計出邊界上未來可能的 ϕ 和 q 的值，可以作為與時間有關的。例如對 η 在 C 的流入段採取 η 的流入量，而流出段上採取由內部外推值，並對 ϕ 考慮系統的不斷東移而取 $\phi(t)$ 的估計值^{**}。但應該指出，這種邊界條件的選取，會影響到用有限差方法求數值解答時計算的穩定性，因此也影響了計算中反覆倒回的間隔[及次數]^[18]。

按照不同的手續，方程 (9)，(10) 的解法有兩種：以

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = (m^2 f^{-1} \nabla^2 \phi + f, \phi) \quad (11)$$

為例，第一種方法是以 ϕ 作各步計算的對象，每一次都算出 $\eta^{(t)} = m^2 f^{-1} \nabla^2 \phi^{(t)} + f$ 再由 η 的平流用 $\nabla^2 \frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial t} = (\eta^{(t)}, \phi^{(t)})$ 的有限差形式算出 $\frac{\partial \phi^{(t)}}{\partial t}$ 再求出新的 ϕ 場。

由此可見，在第一法中需要的是 $\phi^{(t-\Delta t)}$ 及 $\phi^{(t)}$ 和邊界上 $\phi^{(t)}$ 與 $\eta^{(t)}$ 的值。第一法的優點在於：由於要解的是 $\partial \phi / \partial t$ 的微分方程，而 $\partial \phi / \partial t$ 的邊界值初步計算中可以取做零，因此邊界條件是齊次的，解答可用 Fourier 變換求出，數值解就變得容易得多，記憶少的機器也可做。第一法的缺點則是每一次都要倒回來求 $\phi^{(t+\Delta t)}$ ，每次都要由 ϕ 場求 η 以及 η 平流，比較費時、費事。

第二法是以 $\xi = \nabla^2 \phi$ 作為各步計算的對象。先由 ϕ 場求出 $\eta^{(t)}$ ，再由 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{(t)} =$

^{*} 嚴格說來這是不可能的，因此 Ertel^[16]曾強調區域性數值預報的不可能。但事實上由於邊界條件影響向內傳播還是有一定範圍，因此數值預報仍然可能。

^{**} 對於一度模式的試驗，Eliassen 和 Hubert^[17]曾用 $\partial \phi / \partial t = 0$ ，與 $\partial \phi / \partial t =$ 事前所觀測到的實際變化，作為邊界條件，分別作事後的一層預報計算。由於他們相關係數計算的錯誤，他們得到錯誤的結論，以為後一邊界條件反而不如前者好。其實只要把兩種計算的預報圖和实况看一下就可以看出用後一邊界條件所得的結果要好些。事實上我們把相關係數代為重新核算一下得到的結果是，在前一邊界條件下計算所得預報分佈和實際分佈（也取 49 點上的值）的相關係數是 0.73，在後一邊界條件下是 0.76（Eliassen 和 Hubert 的算得的卻各是 0.84 和 0.70！）。

$(\eta^{(i)}, \phi^{(i)})$ 算出 $(\partial\xi/\partial t)^{(i)}$, 然後求出下一段時間的 $\xi^{(i+\Delta t)}$ 場: $\xi^{(i+\Delta t)} = \xi^{(i-\Delta t)} + 2\Delta t(\partial\xi/\partial t)^{(i)}$, 以後接下去每一次都求由新的 ξ 場求出 η 場及 $\partial\xi/\partial t$, 最後由最末的 ξ 場用 $\nabla^2\phi = \xi$ 倒回來求 ϕ .

這方法的優點是不用每次都倒回來求 ϕ , 即使在使用 ϕ 場求 ξ 的平流時, 由於用的不是 ϕ 的微分方程, 也可以不用每次都求新的 ϕ 來作, 而可用前幾次的 ϕ 場來取最近一次算出的 η 的平流。這樣可以少解不少次這些計算中最繁的 Poisson 方程, 而就可以省許多事。具體隔幾次 Δt 計算一下 ϕ 場可由截平誤差的要求來決定。每次的間隔則按 $\partial\xi/\partial t$ 計算中的計算穩定性要求來定。這方法的缺點在於, 由於要解的方程是 ϕ 的方程, 它的邊界條件一般說來就不可能是齊次的(一般 $\phi \neq 0$.) 因此 $\nabla^2\phi = \xi$ 的解答就無法像第一法中解 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 那樣簡單地直接用 Fourier 變換來求。不過在這方面各種各樣的反覆倒回法還是很多的。

Charney 在後來的工作中大多用第二法, 反覆倒回時用外推的 Liebmann 法, 即過分放鬆的 Liebmann 法, 即 $v+1$ 次近似值由下式求出

$$\phi_{ij}^{v+1} = \phi_{ij}^v + \alpha\phi_{ij}^{v+1}$$

$R\phi_{ij}^{v+1}$ 是 ϕ_{ij}^{v+1} 的殘餘值取 $\phi_{i-1j}^{v+1} + \phi_{i+1j}^{v+1} + \phi_{ij+1}^v + \phi_{ij-1}^v - 4\phi_{ij}^v$.

這是 Liebmann 的倒回法, 它比 Richardson 法收斂為快, 但 Liebmann 法中係數 $\alpha = \frac{1}{4}$ 而這裏取 $\alpha > \frac{1}{4}$ 以使收斂更快 (α 的具體決定方法, 這裏不能詳細敘述)。

現在我們用第二法來解方程 (9)。假定在 $t-\Delta t$ 及 t 時 ϕ_k 及 q_k 的場已知, 把預報區域分成方形的網格, 長 l 格, 寬 m 格,

$$x = i\Delta s, \quad y = j\Delta s \quad (i=0, \dots, l; \quad j=0, \dots, m)$$

從 (9) 的有限差式我們可求得 t 時的 $\partial q_k/\partial t$ 值, 由此再從中央差式

$$q_k(t+\Delta t) = q_k(t-\Delta t) + 2\Delta t \frac{\partial q_k}{\partial t}(t)$$

求 $t+\Delta t$ 時間的 q 。這一步具體做起來又有兩種方法, 因為方程 (8) 不像 (11) 那樣僅僅是一個變數 ϕ 的微分方程而是 n 個 ϕ_k 的聯立方程, 我們可以把 n 個 ϕ_k 一起解, 也可以消出一個僅含一個 ϕ_k 的微分方程而先求出一個 ϕ_k 的解。

在前一方法下可以從 (10) 式的有限差式

$$(\Delta s)^{-2}[\phi_{i+1jk} + \phi_{i-1jk} + \phi_{ij+1k} + \phi_{ij-1k} - 4\phi_{ijk}] + \sum_{r=1}^n A_{rk}\phi_{ijk} = q_{ijk}(t+\Delta t) \quad (12)$$

求出 $\phi_k(t+\Delta t)$ 由外推的 Liebmann 法 (12) 的解可寫做

$$\phi_{ijk}^{(v+1)} = \phi_{ijk}^{(v)} + a[\phi_{ij-1k}^{(v+1)} + \phi_{i+1jk}^{(v)} + \phi_{ij+1k}^{(v)} - 4\phi_{ijk}^{(v)} + (\Delta s)^2$$

$$\left[\sum_{n=1}^n A_{rk} \phi_{ijk}^{(s)} - q_{ijk}(t + \Delta t) \right] \quad (13)$$

$$\left(\begin{array}{l} i=1, \dots, l-1; \quad j=1, \dots, m-1; \quad k=1, 2, 3, \dots, n; \\ v=0, 1, 2, \dots; \quad r \geq k \text{ 時 } \varepsilon=v, \quad r < k \text{ 時 } \varepsilon=v+1, \end{array} \right)$$

其中 a 是常數。只要 A_{rs} 是負值有定、 a 又選得合式，可以証明這種反覆倒回的方法中不論起初所取的 $\{\phi_{ijk}^{(v)}\}$ 是什麼數值， $\{\phi_{ijk}^{(v)}\}$ 總是收斂的。

另一種方法中先解出一個只含一個 ϕ_k 的微分方程。令各 π_k 與 $f(\Delta s)^2 m^{-2}$ 合併得 π'_k ，並算做常數（這與用 $\bar{\eta}$ 代 η ， $\bar{s}$ 代 s 的近似同級）。那末方程 (11) 可寫做

$$\nabla^2 \phi_k + \sum_{s=1}^n A_{rs} \phi_s + C_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

方陣 $A_{sk} \equiv (A)$ 對稱並是常數，令 λ^r ($r=1, 2, \dots, n$) 是 A_{rs} 陣的特徵根， ψ_s^r 是特徵向量分量，那末用 ψ_k^r 乘 (14) 式得

$$\nabla^2 l_r + \lambda^r l_r + l_r = 0 \quad (15)$$

其中

$$l_r = \sum_{k=1}^n \phi_k \psi_k^r, \quad l_r = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k^r$$

現在 π'_k 都是正的，那末 A_{rs} ，因而 λ^r 都是負的，故 (16) 是可以解的。(14) 的解仍可由外推 Liebmann 方法來求，這時顯然對每個 l_r

$$l_{ij}^{(v+1)} = l_{ij}^{(v)} + a[l_{ij-1}^{(v+1)} + l_{i+1j}^{(v)} + l_{ij+1}^{(v)} + l_{ij+1}^{(v)} - 4l_{ij}^{(v)} + (\Delta s)^2 [\lambda^2 l_{ij}^{(v)} + l_r]] \quad (16)$$

解出 l_r 後利用 ψ_k^s 的正交性質 $\sum_{r=1}^n \psi_r^s \psi_k^s = \begin{cases} 1 & r=k \\ 0 & r \neq k \end{cases}$ 不難求出各個 ϕ_s

$$\phi_s = \sum_{r=1}^n l_r \lambda_r^s \quad (s=1, \dots, n) \quad (17)$$

到現在為止，正試報的只有到 $n=1, 2, 3$ 的情形。但在目下的計算機器來說用更多的層次是完全可以的，問題是觀測的紀錄的稠密度和精確度是否值得把 n 取得太大。下面我們還要回過來考慮這問題，現在我們先分別講一下各種模式的大意。

(二) 各種模式

各種模式中最簡單的自然是一層的模式。正像前節中所指出，層次的取法，包括

取一層的取法是多種多樣的。如果我們把大氣作為正壓的來處理，那末任何取那一層都是一樣的。但事實上一般說來大氣不是正壓的（嚴格說來，不是“自動正壓”的），因此作為正壓大氣而隨便取一層作為代表顯然是不行的。

實際上取大氣中某一層來代表整個大氣的做法有下面幾種。最簡單的，我們可以按前節所說的方法來取。如果在垂直方向上按氣壓把大氣等分成兩個間隔，那末他們的分界面即 500 毫巴層就是所取的層次。另外我們也可取無輻散層作為代表。由於無輻散層中輻散等於零，所以方程 (4.4)' 就成為

$$\frac{d_g(\zeta_g + f)}{dt} = 0$$

形式非常簡單。但是問題是，在一般的斜壓大氣裏無輻散層並不一定是等壓面層，甚至還不一定只是一層。因此方程 (4.4)' 實際上不便使用。但是如果我們把大氣中各等壓面層的等高線看做是上下互相平行的，即熱成風常常與高空地轉風平行（有強烈發展時不是如此），某層的地轉風 v 可以寫成 $v(x, y, p, t) = A(p)v'(x, y, t)$ ， v' 是任何指定高度的地轉風。事實上這就是用一個參數來描寫大氣的溫壓場（包括運動場）。又取 $p = \bar{p}$ 層，使

$A(\bar{p}) = \bar{A} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} A dp$ ，那末 $\bar{v} = A(\bar{p}) v'$ 而 $v = \frac{A(p)}{A(\bar{p})} \bar{v}$ 。再注意 $p=0$ 和 $p=p_0$ 時 $v=0$ ，方程 (4.4)' 在 $p=0$ 和 $p=p_0$ 間積分後成為^{*}，

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\bar{A}^2}{A^2} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) + \bar{v} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

現在我們如果把它乘上 $\bar{A}^2/\bar{A}^2$ 並且取 p^* 層，使這層上的地轉風 $v_g^* = (\bar{A}^2/\bar{A}^2) \bar{v}_g$ ，那末在 p^* 層上

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial y} + v^* \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d_g(\zeta_g^* + f)}{dt} = 0 \quad (19)$$

* Charney^[10,11]把這一層稱做等值正壓層，因為在微小擾動時，這一層的波速公式與正壓大氣的相似。在有限運動中由於 $\bar{A}^2/\bar{A}^2 \neq 1$ ，它已和正壓大氣的式子並不完全相似。從輻散輻合分佈來看也沒有什麼等值可言。因為正壓大氣中雖然上下運動相同，但任何一層上輻散也因而一般不等於零（無輻散面是垂直的），而合乎前面條件的斜壓大氣在積分之後在第二近似值下就沒有輻散項存在，這就是說，在這大氣中有着一個與等壓面平行的無輻散面（因為 $\bar{A}^2/\bar{A}^2$ 與水平地點無關）。所以在這一點上它和正壓大氣其實是並不等值的。與研究正壓大氣相似的只是取大氣的一層來代表整個大氣這種做法。

所以在这 $p = p^*$ 層上, 運動可以看做沒有輻散的。 p^* 層稱為無輻散層¹⁾, 它一般就在 500 毫巴附近。由於無輻散層上運動的渦度方程中沒有直接包含上下層的運動, 所以比較簡單而可以獨立解出, 因此可以取做一層模式中研究的對象。

現在先看一下一度一層的模式。按上節所說, 這一層取做 500 毫巴層。這是最簡單的模式, 它早就由 Rossby^[1] 提示過。顯然一度模式不能不是小擾動的運動, 因為只有在这情形下 $u = v + u'$, $v = v'$ (v 是常數, u' v' 是一級微量), 渦度方程中 $v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ 的項才比 $v \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ 項小許多而可以略去。注意 $\zeta = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$, 渦度方程²⁾成為^[10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

假定 $\partial^2 z / \partial y^2 = -m^2 z$, 其中 m 可以看做擾動寬度的一個指標, 那末方程 (20) 就只是對 x 和 t 的微分方程。要在起始條件³⁾ $z = z(x, 0)$ 下求它的解 $z = z(x, t)$ 可以把 $z(x, 0)$ 展成 Fourier 級數 (各個諧波 $z(x, 0) \sim e^{inx}$ 的和, 波長 $L_n = 2\pi/n$, 注意緯圈上的波數 n 只能是整數, 這樣 z 才是單值函數), 代入得^[10]

$$z(x + ut, t) = z(x, 0) + \int_0^{2\pi} z(\alpha, 0) I_{m2}(x, t) d\alpha \quad (21)$$

$$\text{而} \quad I_{m2}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{in\beta t / n^2 + m^2} - 1) e^{inx} \quad (22)$$

是影響函數 (格林函數)。Thompson^[20] 後來證明 $I_{m2}(x, t)$ 可以寫成閉合形式而得

- 1) Charney^[19] 曾用別的方法引出無輻散層, 但其中相當於 (18) 式的公式中 $\bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}$ 項的係數是 $K = 1 + \left| \frac{v}{v_g} \right|^2 \bar{\sigma}$ (符號意義見原文^[19])。但事實上這求法與前文是一樣的, 因為這時 $v_g = (1 + \sigma \left| \frac{v'}{v_g} \right|) \bar{v}_g$ 相當於這裏的 $v_g = A v' = \frac{A}{A} \bar{v}_g$, 所以 $1 + \sigma \left| \frac{v'}{v_g} \right| = \frac{A}{A}$, 故 $K = 1 + \left(\frac{A}{A} - 1 \right)^2$, 在 $p = \bar{p}$ 層上 $K = \bar{A}^2 / A^2$ 。故 (18) 式與文獻 [19] 裏的 (29) 式意思相同。至於兩次 K 值不同那是因為在 [22] 中為了精確起見, 沒有取 $\zeta < f$, 因而 $\bar{\alpha}$ 代表的是

$$\int_0^\infty \frac{\rho}{\zeta_g + f} \alpha dz / \int_0^\infty \frac{\rho}{\zeta_g + f} dz, \text{ 而不是 } \int_0^\infty g \rho \alpha dz / \int_0^\infty g \rho dz \text{ 的緣故。}$$

附帶說一下文獻 [11] 中“等值正壓層”的引導中 (原文第 6 節) 公式錯誤很多, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \left(\text{及 } \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right)$ 式中應是 $-\frac{g}{p_0} \frac{\partial Q}{\partial x}$, 而非 $-\frac{1}{p_0} \frac{\partial Q}{\partial x}$, K 應等於 $-\frac{1}{p} \int_{p_0}^0 A^2 dp / \left[\int_{p_0}^0 A dp \right]^2$, 渦度方程中 $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ 及 w_0 項的符號也都弄反了。

- 2) Charney^[10] 原來保留的 $\frac{f}{H} \frac{\partial p_0}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial z}{\partial t}$ 項是與第二近似值不一致的, 所以這裏沒有寫上。
- 3) 假定我們處理某一度整個緯圈上的 $z = z(x, 0)$ 。這時我們沒有邊界條件。

$$z(\tau vt, t) = z(0, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} z(\xi, 0) G(\xi) d\xi \quad (23)$$

$$G(\xi) = -\sqrt{\beta t} \frac{J(2\sqrt{-\beta t \xi})}{\sqrt{-\xi}} \quad (\xi \leq 0) \quad (24)$$

其中 τ 是一個常數。把 (21) 式化做有限差(以 10 個經度為間隔), 並注意 $I_{m^2}(x, t)$ 在離原點不遠的地方就已減少很多, 積分間隔可以大大縮小, 即

$$z(x + vt, t) = z(x, 0) + \int_{x-x_1}^{x+x_2} z(\alpha, 0) I_{m^2}(x - \alpha, t) d\alpha.$$

所以, 對於 24 小時(一天)的預報

$$z(x + Ut, 1) = z(x, 0) + \sum_{N=-N_1}^{N_2} A_N \cdot z(x + N \cdot 10^\circ, 0) \quad (25)$$

($I_{m^2}(x, t)$ 及 A_N 的數值見 [10]*。一度的模式試驗的很多**有的還把它同時用到兩個或兩個以上的緯圈而作成兩度流場的預報, 時限也延長到兩天^[23]。成績有的還不壞。但是由於一度模式的根本限制(各波長的波幅不變, 總動能 U^2 不變), 它只能用在西風較強、擾動較小的“平直”流場, 而這時候外推也是已經比較合用的。因此, 在實用上的它意義是不大的。

最簡單而有實際意義的是兩度的一層模式。它還與實際大氣之間存在着一定程度的對應性。由 (19) 可知在無輻散層上

$$\frac{d_g(\zeta_g + f)}{dt} = 0,$$

即

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = (m^2 f^{-1} \nabla^2 \phi + f, \phi)$$

其中 ϕ 即取 500 毫巴等壓面的高度。Charney 等^[12] 和 Bolin 等^[24] 曾利用前節所說的第二種方法用 500 毫巴天氣圖試做過 24 小時的預報, 用的平面格子寬度 Δs 各是 736, 628 和 315 千米, 前者每次積分的間隔 Δt 是 1—3 小時, 後者實質上是 6 小時。Charney 等^[13], Stockholm 大學氣象系^[25, 26] (還有日本的數值預報小組^[27]) 曾用前節所說的第二種方法試做過 24 小時的預報, Charney 等用了 $\Delta s = 300$ 千米, $\Delta t = 1$

* 由於截平誤差 (Truncation error) 及抹尾誤差 (round-off error), 用 $I_{m^2}(x, t)$ 或 A_N 的值來作簡單正弦波動的預報, 會做出加深或減弱^[22]。但這模式本身是沒有能量轉換的, 方程式也是線性的, 因此容易證明, 在這種情形下各波動成分的波幅不會發生變化。

** 各國試驗一度模式的報告文獻見 Meteor. Bibliog. and Abstracts, 第五卷, 第六號, 1954 年六月號。

小時, Stockholm 大學後來用 $\Delta s = 300$ 千米, $\Delta t = 1$ 小時。此外作為 Richardson 過程的特例, Fjørtoft^[28] 並在無邊界面上求出一個簡便的圖解方法來實現第二種方法下的數值積分, 但精確程度比較差。這是容易從理論上看出來^[29]。

上面這些兩度一層模式試報結果一致證明在一般情形下, 用兩度一層的大氣模式已可使 24 小時的 500 毫巴等壓面的算得高度分佈(預報)與實況接近(相關係數 $r = 0.8$ 左右)。因此一層模式的試驗對流體力學預報方法的進一步研究鼓勵很大。所以, 有的甚至把它用到中期預報上^[30-34], 雖則在原則上這是不能也不會解決問題的(見後文)。

雖然一層模式已開始用作日常數值預報的基礎(見後文), 但是要注意, 這種模式與實際大氣還有不少距離, 因為實際大氣裏, 特別在天氣發展比較厲害的關鍵性情形下, 等高線與等溫線(等厚度線)有着很大的交角, 即冷暖平流是很強的。試驗的結果也說明在這種情形下算出的預報值就不大好^[12, 13]。這是容易了解和預計到的。預報實踐證明各國廣大的預報人員在預報高空溫壓場變化的時候都很注意高空的冷暖平流, 並且在這方面積累了有用的經驗。由此可見, 總的說來, 一層模式的 500 毫巴預報圖就不可能比現在各國日常廣播的 500 毫巴預報圖來得好的。要作好高空大範圍運動的預報, 使它能和現在日常的預報比較, 那必須用兩層的模式。(本節未完)

參 考 文 獻

(1954 年以前的詳細文獻參見 Met. Bibliog. and Abstracts, 第 5 卷, 第 6 号, 1954 年 6 月)

- [1] Rossby, C-G. and Collaborators, 1939, Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action. *J. Mar. Res.*, 2, 38-55.
- [2] Блинова, Е., 1943, Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы, *ДАН СССР*, 39, No. 7. (譯文見氣象學譯報 1 卷 (1954) 1 期 1—3)。
- [3] Richardson, L. F., 1922, *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press.
- [4] Кибель, И. А., 1940, Предложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости, *Изв. АН СССР, серия географ. и геоф.* № 5, 627-638 (譯文見氣象學譯報 1955 年 2 卷 4 期)。
- [5] Кибель, И. А., 1944, 用流體力學幫助預先計算氣壓、溫度和風的指導。 *Труды ПНУ, сер. I, вып. 12*, 3-12, ГУГМС (見 [8])。
- [6] Кибель, И. А., 1947, 作為動力天氣學問題的天氣預報 蘇聯科學院獻給十月社會主義革命三十週年紀念論文集, 第一卷, 蘇聯科學院出版局出版 (譯文見氣象學譯報 2 卷 1 期, 1-5)。
- [7] Успенский, Б. Д., 1942, Прогноз температуры и влажности на высотах по методу Кибель И. А., *Труды ПНУ, ГУГМС. сер. I, вып. 30*, 7-82 (譯文見天氣發展的平流動力分析, 科學出版社)

1953年.

- [8] Baum, W. A., 1944, A Note on Kiebel's method of forecasting, *Bull. Amer. Met. Soc.*, **28**, 136.
- [9] Ertel, H., 1944, Wettevorhersage als Randwertproblem, *Met. Zeits.*, **61**, 181-190.
- [10] Charney, J. G., and Eliassen, A. 1949, A numerical method for predicting perturbations of the middle latitude westerlies, *Tellus*, **1**, 38-54.
- [11] Charney, J. G. 1949, On a physical basis for numerical prediction of large-scale motion in the atmosphere, *J. Met.*, **6**, 371-385.
- [12] Charney, J. G., Fjørtoft R. and Neumann J. v. 1950, Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2**, 237-254.
- [13] Charney, J. G. and Phillips, N. A. 1953, Numerical integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows, *J. Met.*, **10**, 71-99.
- [14] Charney, J. G., 1954, Numerical prediction of cyclogenesis, *Nat. Acad. Sci. Proc.*, **40**, 99-110.
- [15] Бөлєнский, В. А., 1948, *Динамическая Метеорология*, Гостехиздат, Ленинград.
- [16] Ertel, H., 1941, Die Unmöglichkeit einer exakten Wetterprognose auf Grund synoptischer Luftdruckkarten von Teilgebieten der Erde, *Met. Zeits.*, **58**, 309-313.
- [17] Eliassen, A. and Hubert, W. 1951, Computation of vertical motion and vorticity budget in a blocking situation, *Tellus*, **5**, 196-206.
- [18] Platzman, G. W., 1954, The computational stability of boundary conditions in numerical integration of the vorticity equation, *Archiv für Met. Geop., u. Biotk. Ser. A*, **7**, 29-40.
- [19] Charney, J. G., 1951, Dynamic forecasting by numerical process, *Compendium of Meteorology*, 470-482, Amer. Met. Soc. Boston.
- [20] Thompson, P. D., 1954, Notes on the theory of large-scale disturbances in atmospheric flow with applications to numerical weather prediction, *Geophysical Research Papers*, No. 16, 107 pp.
見 L. Berkofsky, The exact determination of the effective domain of dependence of one-dimensional numerical prediction formula, *Tellus*, **6**, 165-169.
- [21] 顧震潮, 1950, An iterative relation of the influence function in numerical forecasting, *J. Met.*, **2**, 163-164.
- [22] Lönnqvist, O., 1949, The numerical prediction method for upper air profiles tried on some regular type profiles, *Tellus*, **1**, 53-57.
- [23] 顧震潮, 1949, 48-hr prognostic 500-mb charts prepared by Charney's numerical method of forecasting, *Manuscript*.
- [24] Bolin, B. and Charney, J. G. 1951, Numerical tendency computations from the barotropic vorticity equations, *Tellus*, **3**, 248-257.
- [25] Staff members, Univ. of Stockholm, Preliminary report on the prognostic value of barotropic method in the forecasting of 500 mb height changes, *Tellus*, **4**, (1952) 21-30.
- [26] Staff members, Inst. of Met., Univ. of Stockholm, Results of forecasting with a barotropic model on an Electronic Computer (BESK), *Tellus*, **6** (1954), 139-149.
- [27] Numerical Prediction Group, Preliminary report on the numerical prediction over the Far East, *Geop. Mag. (Tokyo)*, **26** (1954), 38-52.
- [28] Fjørtoft, R., 1952, On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation,

Tellus, 4, 179-194.

- [29] 顧震潮, 關於積分大氣渦度方程的圖解解法 (尚未發表).
- [30] Berson, F. A., 1953, A quantitative analysis of large-scale flow patterns with special regard to the effect of eddy motion, *Q. J. Roy. Met. Soc.* 79, 210-223.
- [31] Clapp, P. F., 1951, Application of barotropic tendency equation to medium range forecasting, *Tellus*, 5, 80-93.
- [32] Scorer, R. S., 1954, The use of normals in numerical forecasting, *Tellus*, 6, 23-26.
- [33] Thompson, P. D., 1954, Prognostic equations for the mean motion of simple fluid systems and their relation to the theory of large-scale atmospheric turbulence, *Tellus*, 6, 150-164.
- [34] Wippermann, F., 1954, Zur Frage der Anwendung numerischer Prognosenmethoden auf zeitlich gemittelte Felder. *Met. Rundschau*, 7, 123-124.