

基培爾預報方程的物理導法 及一些解釋*

徐爾瀨

(南京大學氣象系)

目次

- | | |
|------------|-------------|
| 一、第一近似預報方程 | 二、地面溫壓系統的移動 |
| 三、引導層原理 | 四、高空溫壓系統的移動 |
| 五、第二近似預報方程 | |

基培爾理論預報方法是蘇聯氣象科學中偉大貢獻之一，無論對動力氣象學及天氣學均有深遠的影響，實是近代氣象學中一個最巨大的成就，值得我們細心學習鑽研。因為基培爾方法所用算式十分繁複，初學者有時苦於不易把握算式的物理意義，因而影響對整個方法的領會。本文¹⁾目的就在用物理意義比較明顯的方法來推導基培爾方法中幾個骨幹方程，即預報方程，並予以適當的解釋；有若干問題更予以一些引伸和發揮；作為學習基培爾方法的幫助。但本文並非對基培爾方法的全面介紹；全面介紹可看 Белинский 的書^[1]或葉篤正同志的文章^[4]。

在敘述正文之前，先簡單地說一下基培爾方法的主要思路。基培爾所研究的對象是對流層中自由大氣的大規模運動，要預報的是這種運動的短期間內（1—2天）的變化。他採用地面氣壓 $p_0 = p_0(x, y, t)$ ，地面氣溫 $T_0 = T_0(x, y, t)$ ，及氣溫直差率非線性偏差 $\delta = \delta(x, y, z, t)$ 作為基本變數，其他大氣界情狀變數均可由基本變數推算。如由 T_0 及 δ ，當然可知高空氣溫場；既知 p_0 及高空氣溫分佈，則應用靜力方程自可推算高空氣壓場；既知各高度的氣壓與氣溫分佈，由運動方程可推算各高度的水平速度；既知水平速度，由連續方程可推算各高度的垂直速度。故要預報大氣界未來情況問題，歸結到預報 p_0 、 T_0 及 δ 問題。

* 本文大意曾於1953年12月10日，在南大氣象系天氣動力氣象教學小組的學術討論會上報告過。

1) 基培爾原文未看到，本文主要參考 Белинский：動力氣象學第二十章。

基培爾預報方程就能成功地、巧妙地預報這些基本變數，因而能第一次成功地解決數值預報問題。

考慮 $\delta \neq 0$ ；所得的一套預報方程，基培爾稱之為完全方案（полная схема）；若不考慮 δ ，即假定 $\delta = 0$ ，所得的一套預報方程，基培爾稱之為簡化方案（упрощенная схема）。前者太複雜，不便於應用。實際應用的都是簡化方案，本文要討論的亦是簡化方案的預報方程。

一、第一近似預報方程

第一近似預報方程，基於下列五個假定上：

- 1) 因考慮對象為短期間的自由大氣大規模運動，可當是絕熱過程。
- 2) 作為最初步的近似，可當自由大氣大規模運動為地轉運動。這種風壓場的關係，基培爾稱作第一近似。基於這種關係的預報方程即第一近似預報方程。
- 3) 大氣界垂直方向情狀為靜力平衡。
- 4) 作為對流層整層平均情形看，可當溫高關係是線性的，且氣溫直差率為常數。
- 5) 對流頂為物質面；因對流頂是不連續面，如不為物質面，則其移動速度將達聲速，這顯然與事實不符合的。

現考慮地面空氣質點運動時，其溫壓變化，因根據假定 1)，當適合絕熱方程：

$$\frac{dT_0}{dt} - \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \frac{dp_0}{dt} = 0 \quad (1)$$

根據假定 2)，質點運動速度 $V_{h,0}$ 即為地轉風速 $V_{g,0}$ ：

$$\nabla_{h,0} = \nabla_{g,0} = k \wedge \frac{1}{f\rho_0} \nabla_h p_0 \quad (2)$$

彼處 k 為鉛直向上的單位矢； f 為折向參數， $f = 2\Omega \sin\Phi$ ； ∇_h 為算子， $\nabla_h = i \frac{\partial}{\partial x} +$

$j \frac{\partial}{\partial y}$ 。

以 (2) 代入 (1)，得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + V_{g,0} \cdot \nabla_h T_0 - \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \left[\frac{\partial p_0}{\partial t} + V_{g,0} \cdot \nabla_h p_0 \right] = 0$$

或

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{1}{f\rho_0} \left[\frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right] - \frac{RT_0}{C_p p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{RT_0}{C_p p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} - \frac{RT_0}{l p_0} \{T_0, p_0\} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{彼處} \quad \{T_0, p_0\} &= \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ &= \mathbf{k} \cdot \nabla_h T_0 \wedge \nabla_h p_0 \end{aligned} \quad (4)$$

因假定(4)，對流頂($z=H$)的溫度為

$$T_H(x, y, t) = T_0(x, y, t) - \gamma H(x, y, t) \quad (5)$$

上式當然亦即對流頂這個面的方程。因假定(5)

$$\frac{d}{dt} (T_0 - \gamma H - T_H) = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial}{\partial t} (T_0 - \gamma H - T_H) + u_{g,H} \frac{\partial}{\partial x} (T_0 - \gamma H - T_H) + v_{g,H} \frac{\partial}{\partial y} (T_0 - \gamma H - T_H) = 0 \quad (6)$$

推導上式時，注意因 T_0, H, T_H 都只為 x 及 y 的函數，故對 z 的偏微分均為零；又質點運動速度為地轉風速。

根據觀測，對流頂高度變化(對 x, y 及 t)的趨勢，與對流頂溫度變化的趨勢常相反，即對流頂高度增加(或減少)時，對流頂溫度常降低(或增加)。因此在上式中這兩種變化率合起來時，數值大部相互抵消，剩下來的值比 T_0 變化率小得多，即

$$\frac{\partial T_H}{\partial t} + \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \ll \frac{\partial T_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial T_H}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H}{\partial x} \ll \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial T_H}{\partial y} + \gamma \frac{\partial H}{\partial y} \ll \frac{\partial T_0}{\partial y} \quad (7)$$

利用(7)，故(6)可簡化為

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_{g,H} \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_{g,H} \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

上式 $u_{g,H}$ 及 $v_{g,H}$ 為對流頂處地轉風速 $\mathbf{V}_{g,H}$ 的分量： $\mathbf{V}_{g,H} = u_{g,H} \mathbf{i} + v_{g,H} \mathbf{j}$ 。對流頂處地轉風速 $\mathbf{V}_{g,H}$ 與地面地轉風速 $\mathbf{V}_{g,0}$ 當然可用熱成風方程聯結起來。在線性溫高關係的假定下，熱成風方程為

$$\mathbf{V}_{g,H} = \frac{T_H}{T_0} \mathbf{V}_{g,0} + \frac{gH}{lT_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h T_0 \quad (9)$$

$$\text{或} \quad u_{g,H} = \frac{T_H}{T_0} u_{g,0} - \frac{gH}{lT_0} \frac{\partial T_0}{\partial y}, \quad v_{g,H} = \frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{gH}{lT_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \quad (10)$$

以(9)代入(8)，得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{T_H}{T_0} \mathbf{V}_{g,0} \cdot \nabla_h T_0 = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{T_H}{T_0} \frac{1}{l\rho_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h p_0 \cdot \nabla_h T_0 = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{RT_H}{l\rho_0} \{T_0, p_0\} = 0$$

或
$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \beta \{T_0, p_0\} \quad (11)$$

彼處
$$\beta = \frac{R T_H}{l p_0} \quad (12)$$

以(11)代入(3),得

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{c_p}{l} \left(1 - \frac{T_H}{T_0}\right) \{T_0, p_0\}$$

或
$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\alpha \{T_0, p_0\} \quad (13)$$

彼處
$$\alpha = \frac{c_p}{l} \left(1 - \frac{T_H}{T_0}\right) \quad (14)$$

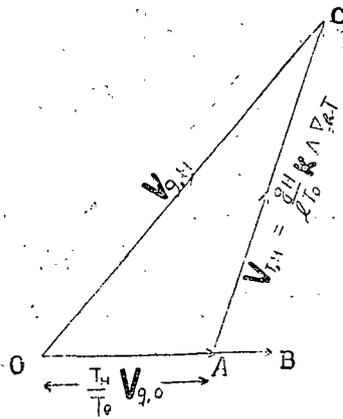


圖1. \vec{OB} 地面地轉風;
 \vec{OC} 對流頂地轉風;
 \vec{AC} 熱成風.

(11)及(13)即第一近似預報方程; 由現在溫壓場的結構 $\{T_0, p_0\}$, 可以計算溫、壓變化率, 因此可預測未來的溫度與氣壓. 注意它們的由來: 在第一近似法中我們有兩個基本變數或未知數, 需要兩個獨立的方程方能決定. 一個方程由考慮絕熱方程而來, 即(3); 另一個方程則由考慮對流頂為物質面而來, 即(8).

(11)及(13)所表示的溫壓變化完全是溫壓系統平移的結果. 若假定地面氣壓沒有變化, 則空氣質點運動時所產生的溫度局地變化應是 $-\mathbf{V}_{g,0} \cdot \nabla_h T_0$, 即等於等溫線以 $\mathbf{V}_{g,0}$ 速度平移的結果. 實際地面氣壓是有變化的, 故地面實際的溫度局地變化是 $-\mathbf{V}_{g,H} \cdot \nabla_h T_0$, 即等於等溫線以 $\mathbf{V}_{g,H}$ 速度平移的結果. 兩者的差異 $(\mathbf{V}_{g,0} - \mathbf{V}_{g,H}) \cdot \nabla_h T_0$, 代表着與空氣質點運動時經歷着的氣壓局地變化相對應的溫度變化. 因此可根據兩種溫度局地變化差異, 來求氣壓的局地變化; 此即(13)所代表的意義.

二、地面溫壓系統的移動

根據觀測, 在一定的緯度區域內, 在短時期內, α 及 β 之值隨地點或隨時間的變化甚小. 例如在 $55-65^\circ\text{N}$, β 約為 $5 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1} \text{ ton}^{-1}$; α 值冬季約 $0.9 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ ton}^{-1} \text{ grad}^{-1} \text{ sec}^{-1}$, 夏季 $1.6 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ ton}^{-1} \text{ grad}^{-1} \text{ sec}^{-1}$. 因此在我們的問題中可以把 α 及 β 當是常數. 故以 α 乘(11), 以 β 乘(13), 相加則得

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_0 + \beta p_0) = 0 \quad (15)$$

上式意即 $(\alpha T_0 + \beta p_0)$ 之值不隨時間變化. 上式對時間 t 積分, 得

$$\alpha T_0 + \beta p_0 = \text{常數 (對 } t \text{ 講)}$$

$$= \theta(x, y) \quad (16)$$

θ 值不隨時間改變，只是 x 及 y 的函數；其因次為 $[L^2 T^{-1}]$ 。在圖解中若溫度改以 αT 作單位，氣壓改以 βp 作單位，則等溫線與等壓線所構成的平行四邊形，其對角線即為等 θ 線，如圖 2 所示。

因(16)，可採取 θ 作基本變數來代替 p_0 或 T_0 ；因等 θ 線與引導層氣流方向平行，亦即與等溫線及等壓線平移方向平行，應用非常方便。由(16)得

$$\alpha \nabla_h T_0 + \beta \nabla_h p_0 = \nabla_h \theta \quad (17)$$

或 $\{T_0, p_0\} = -\frac{1}{\beta} \{\theta, T_0\} = +\frac{1}{\alpha} \{\theta, p_0\} \quad (18)$

故第一近似預報方程又可寫成下列形式：

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\{\theta, p_0\} = \frac{\alpha}{\beta} \{\theta, T_0\} \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -\{\theta, T_0\} \quad (20)$$

現在我們來證明地面溫壓系統，即等 T_0 線及等 p_0 線將沿等 θ 線移動，其速度為 $k \nabla_h \theta$ 。

考察圖 2， B 點氣壓本為 $(\beta p) + 1$ ，溫度 $(\alpha T) + 1$ ；若 B 點氣壓升高 1 單位，即由 $(\beta p) + 1 \rightarrow (\beta p) + 2$ ，則由於(16)式， B 點溫度必須降低 1 單位，即由 $(\alpha T) + 1 \rightarrow \alpha T$ 。因此當 B 點氣壓及溫度有這樣多的變化時，就好像本在 A 點的等壓線及等溫線沿等 θ 線 AB 移到了 B 點。換言之，我們可想像等壓線及等溫線都沿着等 θ 線移動，產生了相應的 $\partial p_0 / \partial t$ 及 $\partial T_0 / \partial t$ 值。注意，這樣想像，是為了方便，即我們由等 θ 線的分佈很容易推得溫壓系統的移動速度及相應的溫壓變化。

現令等溫線沿等 θ 線移動的速度為 C ， C 值大小待定。等溫線移動時所產生的溫度局地變化為

$$\frac{\partial(\alpha T_0)}{\partial t} = -C \cdot \nabla_h(\alpha T_0) \quad (21)$$

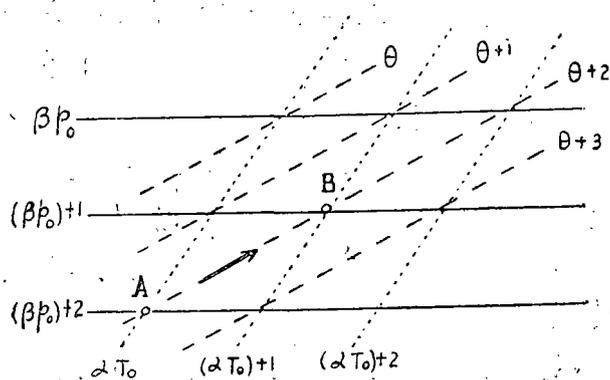


圖 2. 等壓線——； 等溫線……； 等 θ 線 - - - - -。

但另由 (20) 可得

$$\frac{\partial(\alpha T_0)}{\partial t} = -\{\theta, \alpha T_0\} = -k \cdot \nabla_h \theta \wedge \nabla_h(\alpha T_0) = -k \wedge \nabla_h \theta \cdot \nabla_h(\alpha T_0) \quad (22)$$

顯然兩式所示的 $\partial(\alpha T_0)/\partial t$ 應相同，故得 $(\mathbf{C} - k \wedge \nabla_h \theta) \cdot \nabla_h(\alpha T_0) = 0$ 但 $(\mathbf{C} - k \wedge \nabla_h \theta)$ 的方向不與 T_0 方向垂直，故必有

$$\mathbf{C} - k \wedge \nabla_h \theta = 0$$

或

$$\mathbf{C} = k \wedge \nabla_h \theta \quad (23)$$

可見等溫線沿等 θ 線移動，移動時保持右方 θ 值大於左方，移動速度絕對值等於 θ 梯度的絕對值。

再設等壓線沿等 θ 線移動的速度為 \mathbf{C}' ；這種移動產生相應的氣壓局地變化為

$$\frac{\partial(\beta p_0)}{\partial t} = -\mathbf{C}' \cdot \nabla_h(\beta p_0) \quad (24)$$

但由 (19) 可得

$$\frac{\partial(\beta p_0)}{\partial t} = -\{\theta, \beta p_0\} = -k \cdot \nabla_h \theta \wedge \nabla_h(\beta p_0) \quad (25)$$

上兩式應相等，得

$$(\mathbf{C}' - k \wedge \nabla_h \theta) \cdot \nabla_h \beta p_0 = 0$$

或

$$\mathbf{C}' = k \wedge \nabla_h \theta \quad (26)$$

與 (23) 比較，

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C}$$

可見等溫線沿等 θ 線移動，速度值亦等於 $\nabla_h \theta$ 值；亦即等壓線移動速度與等溫線移動速度完全相同。這是採用等 θ 線作為等壓線及等溫線移動指標的很大優點。下節證明等 θ 線與引導層氣流方向平行；由引導層風速推測溫壓系統的移動是更其方便了。

基培爾預報方程的應用，因有 θ 線而十分方便。不但地面溫壓系統的移動速度決定於 θ 場，第四節中將證明高空溫壓場移動速度亦決定於 θ 場。故第一近似法的特點是：所有各高度的溫壓場的變化均由於溫壓系統의 平移而產生，而溫壓系統移動的速度完全由等 θ 線的分佈，或引導層氣流所決定。

由溫壓系統移動速度相同的規律，或直接由 (16) 式，可見在第一近似法中，地面氣壓與氣溫變化的趨勢永遠是相反的，即有冷平流時必須有氣壓升高，有暖平流時必須有氣壓降低。實際情形有時合乎這規律，有時則不合；其故因氣壓除平流變化外，另有動力變化。當氣壓動力變化強大時，溫壓場變化趨勢自不能如上述平流規則那樣簡單了。 θ 只是 x 及 y 的函數，因此在第一近似法中，溫壓系統的移動速度將永遠一律，沒有改變。實際情形並不如此，其原因就在氣壓有動力變化，

動力變壓引起引導層上流場的改變，亦即是 θ 場的改變，因此溫壓系統移動的速度也要改變了。

第一近似法中，氣壓的變化都是平流的變化，即氣壓變化完全由於等壓線移動而起；因此氣壓場的發展，如低壓的加深或填塞，或高壓的加強或削弱，就無法說明。氣壓場的發展，完全是由於氣壓動力變化的作用，這將於第五節中討論。

三、引導層原理

經驗老早就證明地面氣壓系統隨高空某選定氣層的流場移動，但在舊的氣象學裏對此一直沒有能給予圓滿的理論解釋。現在應用基培爾的理論，這種引導層原理就很容易解釋了。

因熱成風的作用，地轉風速矢由地面的 $V_{g,0}$ 轉而為對流頂的 $V_{g,H}$ ，如圖 3 所示。因對流頂高度很大，故到該處的熱成風速矢 $V_{T,H}$ 很大，故 $V_{g,H}$ 矢近於與 $V_{T,H}$ 矢平行。但熱成風是與等 T_0 線平行的，故 $V_{g,H}$ 矢近於與等 T_0 線平行。在等 P_0 線與等 T_0 線夾角之間必有一等 θ 線，亦即在 $V_{g,0}$ 矢與 $V_{g,H}$ 矢間必有一等 θ 線。因此當高度由地面 $z=0$ 漸增至對流頂 $z=H$ 時，地轉風由 $V_{g,0}$ 轉而為 $V_{g,H}$ ；在中途必有一高度 $z=s$ ，在該高度的地轉風 $V_{g,s}$ 剛與等 θ 線平行。地轉風與等壓線平行，在 $z=s$ 的等高面上等壓線就與地面等 θ 線平行。

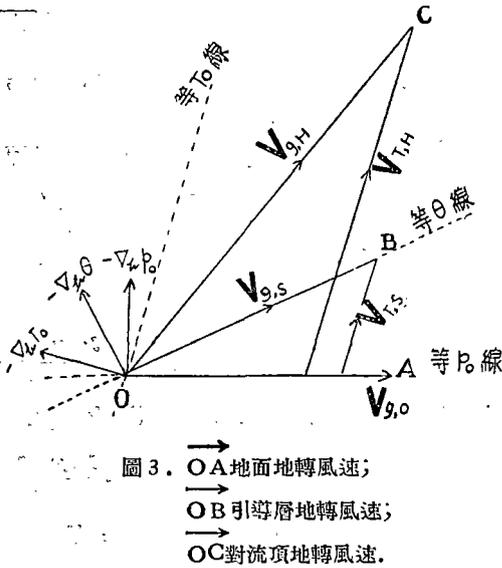


圖 3. OA 地面地轉風速；
OB 引導層地轉風速；
OC 對流頂地轉風速。

高空等壓線很近於流線，故 $z=s$ 處的流線與等 θ 線平行。上節已證明地面溫壓系統沿着等 θ 線移動，因此亦沿着 $z=s$ 處的流線移動。

這好像是 $z=s$ 處的流場在操縱着地面溫壓系統的移動；因此 $z=s$ 處稱作高空引導層。

現需求引導層高度 s 為多少。根據上述引導層定義， $V_{g,s}$ 平行於等 θ 線。由圖可知

$$-\frac{m}{f} \nabla_h \theta = k \wedge V_{g,s} \quad (27)$$

彼處 m 為待定常數。但由熱成風方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{g,s} &= \frac{T_s}{T_0} \mathbf{V}_{g,0} + \frac{g}{l} \frac{s}{T_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h T_0 \\ &= \frac{T_s R}{l p_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h p_0 + \frac{g s}{l T_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h T_0 \end{aligned} \quad (28)$$

以(28)代入(27), 得 $m \nabla_h \theta = \frac{T_s R}{p_0} \nabla_h p_0 + \frac{g s}{T_0} \nabla_h T_0$ (29)

以(17)代入上式, 得 $m \alpha \nabla_h T_0 + m \beta \nabla_h p_0 = \frac{T_s R}{p_0} \nabla_h p_0 + \frac{g s}{T_0} \nabla_h T_0$ (30)

因已知 $\nabla_h T_0$ 矢與 $\nabla_h p_0$ 矢不平行, 故由 (30) 必須有下列關係:

$$\left. \begin{aligned} m \alpha &= \frac{g s}{T_0} \\ m \beta &= \frac{T_s R}{p_0} = \frac{R(T_0 - \gamma s)}{p_0} \end{aligned} \right\} (31)$$

解上式, 得

$$S = \frac{\alpha T_0}{\alpha \gamma + \beta g \rho_0} \quad (32)$$

$$m = \frac{g}{\alpha \gamma + \beta g \rho_0} \quad (33)$$

由 (32) 可知引導層的高度為 $\alpha T_0 / (\alpha \gamma + \beta g \rho_0)$ 。由 (33) 可求得地面溫壓系統移動速度與引導層風速的比例, 其法如下:

以 (33) 代入 (27), 得

$$\nabla_h \theta = - \frac{l(\alpha \gamma + \beta g \rho_0)}{g} \mathbf{k} \wedge \mathbf{V}_{g,s}$$

再以上式代入 (26), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{k} \wedge \nabla_h \theta \\ &= \frac{l(\alpha \gamma + \beta g \rho_0)}{g} \mathbf{V}_{g,s} \\ &= \kappa \mathbf{V}_{g,s} \end{aligned} \quad (34)$$

彼處

$$\kappa = \frac{l(\alpha \gamma + \beta g \rho_0)}{g} \quad (35)$$

可見地面溫壓系統移動速度, 方向與引導層風速方向相同, 大小則為引導層風速的 κ 倍。

若以 α 及 β 之值代入 (32) 及 (33), 得

$$s = \frac{H}{1 + \tau \epsilon} \quad (36)$$

$$\kappa = \frac{1 + \tau \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (37)$$

彼處

$$\tau = \frac{T_H}{T_0} \quad \epsilon = \frac{\gamma_d - \gamma}{\gamma} \quad (38)$$

可見 τ 值必小於 1, 符號永為正號; 而 ϵ 符號可正可負, 其值可大可小, 均視

γ 值而定。因此可得下列諸規則：

- 1) 在穩定大氣中，地面溫度愈高（或愈低），則 τ 值愈小（或愈大），故引導層高度愈高（或愈低）。
- 2) 在穩定大氣中，對流頂溫度愈高（或愈低），則 τ 值愈大（或愈小），故引導層高度愈低（或愈高）。
- 3) 在穩定大氣中，氣溫直差率愈大（或愈小），則引導層愈高（或愈低）。
- 4) 在穩定大氣中， ε 為正值， κ 值小於 1，故地面溫壓系統移動速度總是小於引導層風速。
- 5) 在穩定大氣中，氣溫直差率愈大，則地面溫壓系統移動速度愈接近於引導層風速。
- 6) 在穩定大氣中，地面溫度愈低，則地面溫壓系統移動速度愈接近於引導層風速。
- 7) 在中性大氣中，引導層高度將達對流頂，地面溫壓系統移動速度將等於引導層風速。
- 8) 在不穩定大氣中，引導層高度將超過對流頂（即無引導層），地面溫壓系統移動速度將大於引導層風速。

當然，在實際大氣中，7) 及 8) 所述情形不會發生。

由 (36) 及 (37) 可見，因引導層高度 s ，地面溫壓系統移動速度對引導層風速比值 κ ，均決定於 T_0 及 ρ_0 ，亦即 s 及 κ 實均為地點及時間的函數。但在短期間內，在一定的區域， s 及 κ 變化不大，可當是常數。因此在同一天氣圖上可當地面各地點的溫壓系統為同一引導層，以同比例速度操縱着。但若天氣圖範圍太廣，如此半球天氣圖，是否可用這種簡化辦法，實值得研究。

據蘇聯觀測資料，在冬季 s 約為 3 公里， κ 約為 0.9；在夏季， s 約為 7 公里， κ 約為 0.8。引導層冬低夏高，季節差別相當大，不同季節怎樣用不同引導層，值得研究。

在我國更多了一重困難，即地形複雜。西部海拔與東部相差懸殊，應用同一個引導層顯然是有困難的。問題應如何解決，還待我們努力。

四、高空溫壓系統的移動

在第一近似法中，地面溫壓場怎樣變化，地面溫壓系統怎樣移動，已於前面三

節中分別討論。現在進一步討論，在同樣的假定下，高空溫壓場怎樣變化，高空溫壓系統怎樣移動。

首先證明，在第一近似法中，引導層高度無氣壓變化；即引導層高度沒有氣壓的平流變化。

由靜力方程

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}}$$

可得任意高度處的局地氣壓變化為

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{g\rho z}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} \quad (39)$$

故引導層高度 $z=s$ 處氣壓的局地變化為

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{p_s}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{g\rho_s s}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t}$$

以 (11) 及 (13) 代入，

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial t} &= \frac{-\alpha p_s}{p_0} \{T_0, p_0\} + \frac{\beta g \rho_s s}{T_0} \{T_0, p_0\} \\ &= \left(\frac{\beta g \rho_s s}{T_0} - \frac{\alpha p_s}{p_0}\right) \{T_0, p_0\} \end{aligned} \quad (40)$$

但引導層高度，由 (32)，為 $s = \frac{\alpha T_0}{\alpha\gamma + \beta g \rho_0}$

故

$$\begin{aligned} \frac{\beta g \rho_s s}{T_0} - \frac{\alpha p_s}{p_0} &= \frac{\beta g}{T_0} \frac{p_s}{RT_s} \frac{\alpha T_0}{\alpha\gamma + \beta g \rho_0} - \frac{\alpha p_s}{p_0} \\ &= \alpha p_s \left[\frac{\beta g p_0 - RT_s(\alpha\gamma + \rho_0 \beta g)}{RT_s(\alpha\gamma + \rho_0 \beta g)} \right] \\ &= \frac{\alpha p_s}{RT_s(\alpha\gamma + \beta g \rho_0)} \left[\beta g p_0 - \left(T_0 - \frac{\gamma \alpha T_0}{\alpha\gamma + \beta g \rho_0}\right) R(\alpha\gamma + \beta g \rho_0) \right] \\ &= \frac{\alpha p_s}{RT_s(\alpha\gamma + \beta g \rho_0)} \frac{\beta g p_0(\alpha\gamma + \beta g \rho_0) - \beta g p_0(\alpha\gamma + \beta g \rho_0)}{\alpha\gamma + \beta g \rho_0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

以 (41) 代入 (40)，得

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = 0 \quad (42)$$

引導層氣壓變化（平流變化）為零的規律，其物理意義仍可由靜力方程說明之：按靜力方程，地面氣壓增加，高空某定點氣壓將增加；而地面溫度增加，該點氣壓亦將增加。但在第一近似法中，地面氣壓增加時，地面溫度必須減低；因此地面氣壓與溫度對高空氣壓變化的影響是相反的；這兩種相反的影響在引導層高度上剛剛抵消，因此該處的平流氣壓變化總為零。

因為引導層上沒有氣壓平流變化，因此該層上若有氣壓變化，應都是屬於動力變化。這樣氣壓的平流變化及動力變化就很容易分開來，這給予實際工作以很大方便，也增加了引導層的重要性。

現進一步考察，在第一近似法中，高空任定高度處氣壓的局地變化。應用預報方程 (11)，則 (39) 可改寫作

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta g \rho_z}{T_0} - \frac{\alpha p}{p_0} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad (43)$$

並已知引導層高度 s ，由於 (41)，為

$$s = \frac{\alpha p_s}{p_0} \frac{T_0}{\beta g \rho_s} \quad (44)$$

結合上兩式，可得下列規則：

1) 在引導層以下各高度， $z < s$ ， $p > p_s$ ，則 $\beta g \rho_z / T_0 - \alpha p / p_0 < 0$ ，故 $\partial p / \partial t$ 與 $\partial p_0 / \partial t$ 同符號；且 $\partial p / \partial t$ 之絕對值，當高度愈接近引導層時，就愈小。

2) 在引導層以上各高度， $z > s$ ， $p < p_s$ ，則 $\beta g \rho_z / T_0 - \alpha p / p_0 > 0$ ，故 $\partial p / \partial t$ 與 $\partial p_0 / \partial t$ 兩者符號相反；且 $\partial p / \partial t$ 之絕對值，高度愈接近引導層就愈小；或高度愈高， $\partial p / \partial t$ 之絕對值就愈大。

3) 當然，在引導層高度， $z = s$ ， $p = p_s$ ，故氣壓變化總為零。

現在順便談一下在第二近似法中各高度的氣壓變化。在第二近似法中，氣壓變化除平流變化 $(\partial p_0 / \partial t)_a$ 外，尚有動力變化 $(\partial p / \partial t)_a$ ；溫度變化亦然。（詳見第五節）。

在第二近似法中：

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_a + \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_d \quad (45)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_a + \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_d \cong \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_a \quad (46)$$

以 (45) 及 (46) 代入 (39)，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{p}{p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_a + \frac{p}{p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_d + \frac{g \rho_z}{T_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_a \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta g \rho_z}{T_0} - \frac{\alpha p}{p_0} \right) \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_a + \frac{p}{p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_d \end{aligned} \quad (47)$$

上式右方第一項由於地面氣壓平流變化所引起，第二項由於地面氣壓動力變化所引起。因此任定高度的氣壓變化亦可當作是由於兩部分組成，一為平流變化 $(\partial p / \partial t)_a$ ，另一為動力變化 $(\partial p / \partial t)_d$ ，彼處

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta g \rho z}{T_0} - \frac{\alpha p}{p_0} \right) \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_a \quad (48)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_a = \frac{p}{p_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \right)_a \quad (49)$$

任定高度氣壓平流變化 $(\partial p/\partial t)_a$ 隨高度變化的規律, 即是第一近似法中氣壓變化隨高度變化的規律, 已述於上段。

但任定高度氣壓動力變化 $(\partial p/\partial t)_a$ 隨高度變化的規律却與上述規律完全不同。由 (49) 可知, 任定高度的氣壓動力變化 $(\partial p/\partial t)_a$, 其符號與地面氣壓動力變化 $(\partial p_0/\partial t)_a$ 的符號始終是相同的, 而其絕對值總是隨高度增加而減小的。

地面氣壓的平流 (或動力) 變化不能用地面氣壓的動力 (或平流) 變化的簡單的顯函數形式表示出來, 因此在第二近似法中 (也代表大氣界實際情形), 總的氣壓變化 $\partial p/\partial t$ 怎樣隨高度而變, 不能歸納成簡單的規律。

我們要注意到

1) 引導層的概念, 建築在氣壓平流變化的關係上。

2) 引導層上的氣壓動力變化的符號雖與地面氣壓動力變化的符號相同, 但兩者的絕對值却不相等, 前者比後者要小。

3) 若地面氣壓動力變化與平流變化同符號, 則總的氣壓變化為零, 即 $\partial p/\partial t = 0$ 的高度應該比引導層更高一點。

4) 若地面氣壓動力變化與平流變化符號相反, 則總的氣壓變化為零的高度應比引導層低一點。

現在仍回過來討論第一近似法中的問題, 即在第一近似法中高空任定高度上, 溫壓系統移動速度問題。

在第一近似法中, 高空任定高度上等溫線的移動速度均等於地面等溫線的移動速度, 即等於 $\mathbf{C} = \mathbf{k} \wedge \nabla_h \theta$ 。證明如下:

$$\text{因} \quad T = T_0 - \gamma z$$

故任定高度上等溫線都是與地面等溫線平行的。當地面等溫線以 $\mathbf{C} = \mathbf{k} \wedge \nabla_h \theta$ 的速度移動時, 相應的高空等溫線亦必須以同樣速度移動。

在第一近似法中, 高空任定高度上等壓線移動的速度都等於地面等壓線移動的速度, 即等於 $\mathbf{C} = \mathbf{k} \wedge \nabla_h \theta$ 。證明如下:

設任定高度上等壓線的移動速度為 \mathbf{C}' , 則該高度上相應的氣壓變化應為

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{C}' \cdot \nabla_h p \quad (50)$$

當然，在第一近似法中氣壓變化全由於等壓線移動而產生的。

應用靜力方程對數微分，可得

$$\frac{1}{\rho} \nabla_h p = \frac{RT}{p_0} \nabla_h p_0 + \frac{g^z}{T_0} \nabla_h T_0 \quad (51)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{RT}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{g^z}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} \quad (52)$$

地面等壓線及等溫線的移動速度均為 $\mathbf{C} = k \wedge \nabla_h \theta$ ，故地面氣壓變化為

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\mathbf{C} \cdot \nabla_h p_0 \quad (53)$$

地面溫度變化為

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -\mathbf{C} \cdot \nabla_h T_0 \quad (54)$$

以 (53) 及 (54) 代入 (52)，得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{C} \cdot \left(\frac{RT}{p_0} \nabla_h p_0 + \frac{g^z}{T_0} \nabla_h T_0 \right)$$

以 (51) 代入上式，得

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{C} \cdot \nabla_h p \quad (55)$$

比較 (50) 與 (55)，顯然兩方所示的氣壓變化應相同，故得

$$\mathbf{C}' = \mathbf{C} = k \wedge \nabla_h \theta \quad (56)$$

即任定高度上等壓線的移動速度都與地面等壓線的移動速度相同¹⁾，即等於 $\mathbf{C} = k \wedge \nabla_h \theta$ 。

由此可得下列各規則。應用這些規則，則高空溫壓場的變化及高空溫壓系統的移動所代表的物理意義就更清楚了。

爲了幫助理解下列規則，先看下列各圖。圖 4 爲地面等壓線，等溫線，等 θ 線分佈情形。假定由氣壓梯度矢 $\nabla_h p$ 反鐘向轉至等壓線移動速度矢 \mathbf{C} 的角度 ψ 大於 $\pi/2$ 。圖 5 中 $\mathbf{V}_{g,0}$ 爲地面風速矢， $\mathbf{V}_{g,1}$ 爲引導層以下任定高度的風速矢， $\mathbf{V}_{g,s}$ 爲引導層上風速矢， $\mathbf{V}_{g,2}$ 爲引導層以上任定高度的風速矢。根據熱成風原理，在引導層以下各高度（包括地面）的風速矢偏在 $\mathbf{V}_{g,s}$ 矢的一側（在本圖爲右側），引導層以上各高度的風速矢必須偏在 $\mathbf{V}_{g,s}$ 矢的另一側（在本圖爲左側）。 $\mathbf{V}_{g,s}$ 矢方向當然與 \mathbf{C} 矢方向（即等 θ 線方向）重合。圖 6 爲引導層以下任定高度 z_1 的等壓

1) 嚴格點說，在剛好是引導層的那個高度，因 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ，故 $|\mathbf{C}'|$ 變爲不定值。

線, 等溫線及等 θ 線分佈圖。注意本圖中等溫線方向與圖 4 中等溫線方向相同, 而等壓線方向 (與 $V_{g,1}$ 矢平行) 則與圖 4 中所示不同; 但 ψ 角仍然大於 $\pi/2$ 。圖 7 為引導層上情形; ψ 角等於 $\pi/2$ 。圖 8 為引導層以上任定高度 z_2 的情形; 此時 ψ 角變為小於 $\pi/2$ 。

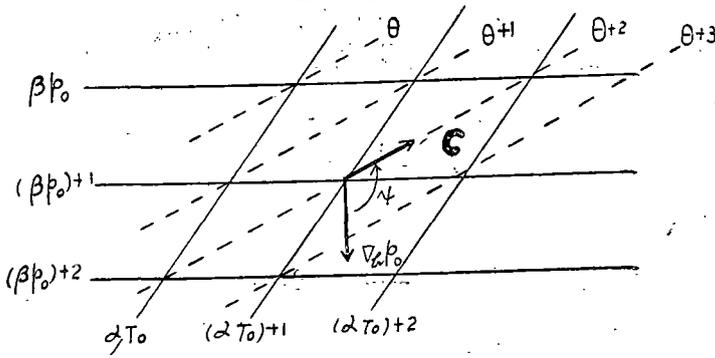


圖 4. 地面情形; $\psi > \frac{\pi}{2}$ 。

1) 若地面的 ψ 角大於 (或小於) $\pi/2$, 則引導層以下各高度的 ψ 角均大於 (或小於) $\pi/2$; 故地面氣壓變化為正號 (或負號), 引導層以下各高度的氣壓變化均為正號 (或負號)。

2) 若地面的 ψ 角大於 (或小於) $\pi/2$, 則引導層以上各高度的 ψ 角均小於 (或大於) $\pi/2$; 故地面氣壓變化為正號 (或負號), 而引導層以上各高度的氣壓變化均為負號 (或正號)。

3) 在引導層上的 $\psi = \pi/2$, 故氣壓變化總為零。

4) 離引導層愈遠 (不論以下, 或以上), 則 $(\psi - \pi/2)$ 的值愈大, 故氣壓變化的絕對值亦愈大。

5) 不論引導層以上或以下, 任何高度的等溫線均與地面等溫線平行, 均以地面等溫線移動的速度移動, 因此不論任何高度的溫度變化符號都與地面相同, 溫

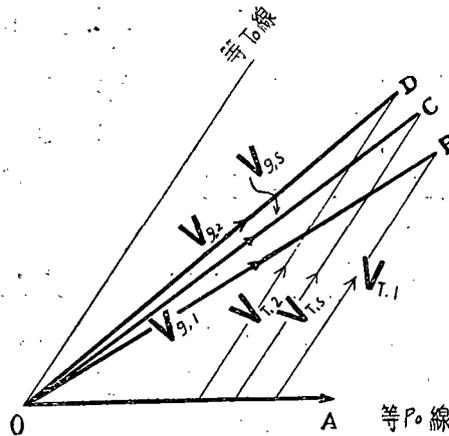


圖 5. \vec{OA} 地面風速; \vec{OB} 引導層以下 ($Z_1 < S$) 風速; \vec{OC} 引導層 ($Z = S$) 風速; \vec{OD} 引導層以上 ($Z > S$) 風速。

度變化的數值亦與地面相同。

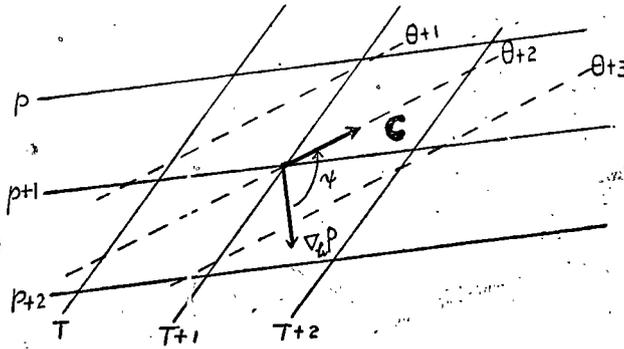


圖 6. 引導層以下 ($Z_1 < S$) 情形; $\psi > \frac{\pi}{2}$

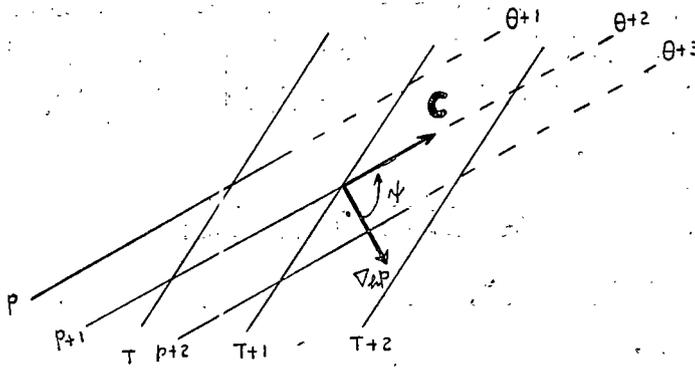


圖 7. 引導層 ($Z=S$) 情形; $\psi = \frac{\pi}{2}$

6) 結合 1), 2) 及 5) 可得: 因地面情形為冷 (或暖) 平流伴隨着氣壓升高 (或降低) (這在第一近似法中是必然的), 故在引導層以下任何高度, 冷 (或暖) 平流亦必須伴隨氣壓升高 (或降低) 出現。

7) 反之, 在引導層以上任何高度, 冷 (或暖) 平流必須伴隨氣壓降低 (或升高) 出現。

由以上討論可得重要推論: 在第一近似法中 (或若只考慮氣壓平流變化時), 整個對流層 (當然限於所考慮地區), 任何高度的溫壓系統的移動速度均與地面溫

壓系統的移動速度相同；因此任何高度的溫壓系統的移動均由同一個引導層流場操縱着。引導層的高度（或等壓面）由地面溫壓場決定，但整個對流層只能有一個引導層。任何高度的溫壓變化既完全由溫壓系統移動而產生，故任何高度的溫壓變化亦完全由地面溫壓場結構所決定。

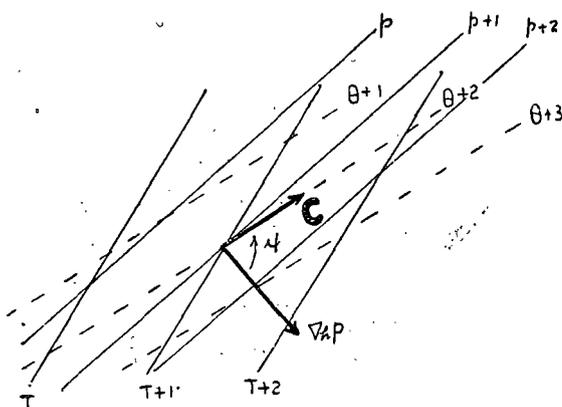


圖 8. 引導層以上 ($Z > S$) 情形; $\psi < \frac{\pi}{2}$.

在第一近似法中垂直速度總是零，因此可以選定一個等

高面代替真正的地面作為對流層的底層邊界。但只可選取一個等高面作為“地面”，而不能選取一個以上的等高面；而且一經選定，整個對流層情形（各高度溫壓場的變化等等）就算決定。因此選取那一個等高而作“地面”，方最符合實際情形，實是很重要的問題。

五、第二近似預報方程

第二近似預報方程建築在下列諸假定上：

- 1) 絕熱過程。
- 2) 考慮地轉偏差，但地轉偏差用下列近似的形式決定：

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{f^2} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{f} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \\ v' &= \frac{1}{f^2} \left[-\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{f} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right\} (57)$$

- 3) 靜力平衡。
- 4) 線性溫高關係，即 $\delta = 0$ 。
- 5) 對流頂是物質面。

除 2) 外，第二近似預報方程所用各項假定與第一近似預報方程所用假定相同；惟有第 2 項假定彼此不同。第一近似法中假定空氣質點運動是地轉運動，而第二近似法則考慮空氣質點運動有地轉偏差。當考慮質點速度除地轉成分外，有

地轉偏差如 (57) 所示者，基培爾稱這種風壓場的關係為第二近似值，由此而得的預報方程即第二近似預報方程。因地轉偏差的產生是由於動力作用，故地轉偏差部分所產生的溫壓變化稱作動力變化；而地轉風部分所產生的溫壓變化，與第一近似法中相同，稱作平流變化。

爲了要清楚了解第二近似預報方程，先簡單介紹一下地轉偏差。地轉偏差的定義，爲水平風速與地轉風速的矢量差，即

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_h - \mathbf{V}_g \quad (58)$$

彼處 \mathbf{V}' 即地轉偏差矢， $\mathbf{V}' = iu' + jv'$ 。

按水平運動方程爲

$$\frac{d\mathbf{V}_h}{dt} + 2\Omega \wedge \mathbf{V}_h = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \mathbf{g} \quad (59)$$

彼處 Ω 爲地轉自轉角速度， \mathbf{g} 爲重力。以 k 又乘 (59)，得

$$k \wedge \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} + 2k \wedge (\Omega \wedge \mathbf{V}_h) = -\frac{1}{\rho} k \wedge \nabla \rho$$

即

$$k \wedge \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} - l \mathbf{V}_h = -l \mathbf{V}_g$$

故得

$$\mathbf{V}' = \frac{1}{l} k \wedge \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} \quad (60)$$

可見地轉偏差完全決定於加速度，其方向與加速度垂直，大小與加速度成正比。故空氣質點一定要作加速度運動時方有地轉偏差；而質點獲有加速度，則由於動力作用；因此地轉偏差的產生亦必須有動力作用。上式右方加速度可用不同的方法拆成各種分量，因此地轉偏差亦可拆成各種分量，即以不同的形式表現出來；最熟知之例即等變壓風。

作爲近似，上式右方加速度項中所包含的水平速度可用地轉近似代進去，則得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \frac{1}{l} k \wedge \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &\cong \frac{1}{l} k \wedge \left[\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \mathbf{V}_g \right] \\ &= \frac{1}{l^2} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \nabla_h \rho \right) - \frac{1}{l} \frac{1}{\rho} \nabla_h \rho \cdot \nabla_h \left(k \wedge \frac{1}{\rho} \nabla_h \rho \right) \right] \end{aligned} \quad (61)$$

拆開則得 (57)，可見以上式或 (57) 所表示的地轉偏差，只是地轉偏差的一部分（當然是主要的部分），而非全部分。

現來推導第二近似預報方程。注意現在 $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}'$ 。

在地面上,空氣質點運動時,其溫壓變化關係,按照絕熱方程,應為

$$\frac{dT_0}{dt} - \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \frac{dp_0}{dt} = 0$$

注意在地面的邊界條件為 $w=0$, 故上式可改寫作

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} + (\mathbf{V}_{g,0} + \mathbf{V}'_0) \cdot \nabla_h T_0 &= \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \left[\frac{\partial p_0}{\partial t} + (\mathbf{V}_{g,0} + \mathbf{V}'_0) \cdot \nabla_h p_0 \right] \\ &= \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \left[\frac{\partial p_0}{\partial t} + \mathbf{V}'_0 \cdot \nabla_h p_0 \right] \quad (62) \end{aligned}$$

比較上式右方兩項的概量, $u'_0 \frac{\partial p_0}{\partial x}$, $v'_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} \sim 10^0$ ($10^{-7} - 10^{-6}$), 而 $\partial p_0 / \partial t \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ (均用 MTS 制); 可見上式右方第二項比第一項小得多, 可以略去, 因此得近似式:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + (\mathbf{V}_{g,0} + \mathbf{V}'_0) \cdot \nabla_h T_0 = \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad (63)$$

因

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{g,0} \cdot \nabla_h T_0 &= \frac{1}{\rho_0} k \wedge \nabla_h p_0 \cdot \nabla_h T_0 \\ &= \frac{RT_0}{p_0} \{T_0, p_0\} \end{aligned}$$

代入 (63), 得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{RT_0}{p_0} \{T_0, p_0\} + \mathbf{V}'_0 \cdot \nabla_h T_0 = \frac{R}{C_p} \frac{T_0}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} \quad (64)$$

由於考慮對流頂為物質面, 得

(8) 式:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_H \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_H \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0$$

或

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + \mathbf{V}_{g,H} \cdot \nabla_h T_0 + \mathbf{V}'_H \cdot \nabla_h T_0 = 0 \quad (65)$$

彼處 \mathbf{V}'_H 為對流頂處的地轉偏差。應用熱成風方程代入上式

$$\mathbf{V}_{g,H} = \frac{T_H}{T_0} \mathbf{V}_{g,0} + \frac{gH}{fT_0} k \wedge \nabla_h T_0$$

(65) 變為

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{RT_H}{fT_0} \{T_0, p_0\} + \mathbf{V}'_H \cdot \nabla_h T_0 = 0$$

或

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \beta \{T_0, p_0\} - \mathbf{V}'_H \cdot \nabla_h T_0 \quad (66)$$

或

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_a + \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_d \quad (67)$$

彼處

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_a = \beta \{T_0, p_0\} = \text{地面氣溫的平流變化} \quad (68)$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial t} \right)_d = -\mathbf{V}'_H \cdot \nabla_h T_0 = \text{地面氣溫的動力變化}$$

(69)

以 (66) 代入 (65), 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= \frac{C_p}{l} \frac{(T_H - T_0)}{T_0} \{T_0, \rho_0\} + \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} (\mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}'_H) \cdot \nabla_h T_0 \\ &= -\alpha \{T_0, \rho_0\} + \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} (\mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}'_H) \cdot \nabla_h T_0 \quad (70)\end{aligned}$$

或寫作
$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_d \quad (71)$$

彼處
$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a = -\alpha \{T_0, \rho_0\} = \text{地面氣壓的平流變化} \quad (72)$$

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_d = \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} (\mathbf{V}'_0 - \mathbf{V}'_H) \cdot \nabla_h T_0 = \text{地面氣壓的動力變化} \quad (73)$$

由上可見在第二近似法中，地面氣溫及氣壓的變化，均可分成平流變化及動力變化兩部分。

但溫度的動力變化比平流變化小得多；這可由 (65) 式看出。由 (65) 可知溫度動力變化的概量與平流變化的概量之比，約為對流頂處地轉偏差與地轉風速之比。很顯然，對流頂處風速自近於地轉風，故該處地轉偏差比地轉風速要小得多；故溫度動力變化亦應比平流變化小得多。因此在討論溫度變化時，常可把其中動力變化項略去，即

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} \approx \left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_a \quad (74)$$

但氣壓的動力變化的概量，與其平流變化的概量常是相等的。因此我們討論氣壓變化時，動力變化與平流變化必須同時考慮在內。

氣壓動力變化，如 (73) 所表示者，尚不是我們所需要的形式；因該式右方包括 \mathbf{V}'_0 及 \mathbf{V}'_H ，這些物理量必須用基本變數 ρ_0 及 T_0 表示出來。這由 (61) 或 (57) 看，當然可以的。

爲了方便，把地轉偏差寫成下列形式：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}' &= -\frac{1}{l} \mathbf{k} \wedge \left[\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \mathbf{V}_g \right] \\ \text{或} \quad \left. \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{l} \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) \\ v' &= -\frac{1}{l} \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (75)\end{aligned}$$

對流頂地轉風速與地面地轉風速用熱成風方程聯系之：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{g,H} &= \frac{T_H}{T_0} \mathbf{V}_{g,0} + \frac{gH}{lT_0} \mathbf{k} \wedge \nabla_h T_0 \\ &= \left(1 - \frac{\alpha l}{C_p}\right) \mathbf{V}_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \mathbf{k} \wedge \nabla_h T_0\end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} u_{g,H} &= \frac{T_H}{T_0} u_{g,0} - \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial y} \\ v_{g,H} &= \frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \end{aligned} \right\} (76)$$

將 (73) 改寫為

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right)_d = \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} \left[(u'_0 - u'_H) \frac{\partial T_0}{\partial x} + (v'_0 - v'_H) \frac{\partial T_0}{\partial y} \right] \quad (77)$$

現先求 $u'_0 - u'_H$ 之值。利用 (75)，得

$$\begin{aligned} u'_0 - u'_H &= \frac{1}{l} \left[\left(-\frac{\partial v_{g,0}}{\partial t} + \frac{\partial v_{g,H}}{\partial t} \right) + \left(-u_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial x} + u_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-v_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} + v_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (78)$$

利用 (76)，得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v_{g,0}}{\partial t} + \frac{\partial v_{g,H}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-v_{g,0} + \frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\alpha l}{C_p} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \\ &= \frac{-\alpha l}{C_p} \frac{1}{l \rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\alpha^2 R T_0}{C_p \rho_0} + \frac{\alpha \beta \gamma_d}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial x} \{ T_0, \rho_0 \} \\ &= \alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) \left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \text{因} \quad u_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial x} &= \left(\frac{T_H}{T_0} u_{g,0} - \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{T_H}{T_0} \right)^2 u_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial x} + \frac{T_H}{T_0} \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} u_{g,0} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{T_H}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} - \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad -u_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial x} + u_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial x} &= \left(-1 + \frac{T_H^2}{T_0^2} \right) u_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial x} + \frac{T_H}{T_0} \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} u_{g,0} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{T_H}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} - \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (80)$$

上式右方第一項概量比其餘各項至少小一級；其原因為構成 $\mathbf{V}_{g,H}$ 的兩部分，熱成風部分比 $\mathbf{V}_{g,0}$ 部分大得多；亦即上式右方第二、三及四項均含有因子 α ，而 α 的概量達 $10^6 \text{ mton}^{-1} \text{ deg}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ ，故都是很大的。後三項中以第三項為最小；但即是第三項，其概量亦比第一項大一級。因第一項概量與第三項概量之比，約為地面地轉

風概量與熱成風概量之比，前者應比後者小一級。

根據以上討論，(80) 右方第一項可略去，得近似形式為

$$-u_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial x} + v_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial x} = \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \left(\frac{-1}{\rho_0} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} - \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{T_H}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} - \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \text{因 } v_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial y} &= \left(\frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_H}{T_0} v_{g,0} + \frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{T_H}{T_0} \right)^2 v_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} v_{g,0} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } -v_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} + v_{g,H} \frac{\partial v_{g,H}}{\partial y} &= \left(\frac{T_H^2}{T_0^2} - 1 \right) v_{g,0} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} v_{g,0} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial v_{g,0}}{\partial y} + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \\ &\approx \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \quad (82) \end{aligned}$$

以 (79), (81) 及 (82) 相加, 得

$$\begin{aligned} l(u'_0 - u'_H) &= \left[\alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) - \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} \right] \frac{\partial T_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial y} \\ &\quad - \left[\alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) - \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} \right] \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ &\quad + \left[\alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} \right] \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \left[\alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} \right] \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} \\ &\quad - \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \quad (83) \end{aligned}$$

但因

$$\begin{aligned} \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} &= \frac{\alpha \beta \gamma_d}{\gamma} \\ \alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) - \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} &= \alpha \beta \left(-1 + \frac{T_0}{T_H} \right) \\ \alpha \beta \left(\frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{\alpha l}{C_p} \frac{T_0}{T_H} \right) + \frac{T_H \alpha \gamma_d}{T_0 \gamma} \frac{1}{\rho_0} &= \alpha \beta \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1 \right) \end{aligned}$$

故 (83) 可寫作

$$\begin{aligned} l(u'_0 - u'_H) &= \alpha \beta \left(\frac{T_0}{T_H} - 1 \right) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} - \alpha \beta \left(\frac{T_0}{T_H} - 1 \right) \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \\ &\quad + \alpha \beta \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1 \right) \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} - \alpha \beta \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1 \right) \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial \gamma_d}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \quad (84)$$

上式右方第一及第二項的概量比第三及第四小一級，因第一及第二項的係數比第三及第四項的係數小一級，而各項偏微商乘積却是同等級。因此上式右方第一及第二項可略去，得近似形式。

$$l(u'_0 - u'_H) = \alpha \beta \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} - \alpha \beta \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} - \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\alpha \gamma_d}{\gamma}\right)^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} \quad (85)$$

若令

$$\tilde{\alpha} = \frac{\left(\frac{\gamma_d}{\gamma}\right)^2 \alpha}{2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1} \quad (86)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\alpha} T_0 + \beta \rho_0 \quad (87)$$

則 (85) 可改寫為

$$\begin{aligned} l(u'_0 - u'_H) &= \alpha \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \left[\beta \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x \partial y} - \beta \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} - \tilde{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} \right] \\ &= \alpha \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \left[\frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \beta \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \beta \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) \right] \\ &= \alpha \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \left[\frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} \right] \\ &= \alpha \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right\} \quad (88) \end{aligned}$$

再令

$$A = \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\alpha}{l} \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \quad (89)$$

則

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} (u'_0 - u'_H) \frac{\partial T_0}{\partial x} &= \frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\alpha}{l} \left(2 \frac{\gamma_d}{\gamma} + \frac{T_0}{T_H} - 1\right) \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right\} \frac{\partial T_0}{\partial x} \\ &= A \frac{\partial T_0}{\partial x} \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right\} \quad (90) \end{aligned}$$

同理可證

$$\frac{C_p}{R} \frac{\rho_0}{T_0} (v'_0 - v'_H) \frac{\partial T_0}{\partial y} = A \frac{\partial T_0}{\partial y} \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \right\} \quad (91)$$

以 (90) 及 (91) 代入 (77)，最後得

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_a = A \left[\frac{\partial T_0}{\partial x} \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial T_0}{\partial y} \left\{ T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \right\} \right] \quad (92)$$

由 (86) 式，可見 $\tilde{\alpha}$ 之值與 α 值極相近，因此 $\tilde{\theta}$ 值亦與 θ 值極相近（在任定時間）；在實際工作中多以 θ 來代替 $\tilde{\theta}$ 。以後氣壓動力變化的方程中亦多以 $\tilde{\theta}$ 來代替 $\tilde{\theta}$ 。

但須注意 $\tilde{\theta}$ 的定義與 θ 的定義有本質上的差別，即 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(x, y, t)$ 為時間的函數，而 $\theta = \theta(x, y)$ 與時間無關。理由如下：

由 (87) $\tilde{\theta}$ 的定義式

$$\tilde{\theta} = \tilde{\alpha} T_0 + \beta p_0$$

因 $T_0 = T_0(x, y, t)$, $p_0 = p_0(x, y, t)$ 均為時間函數，故 $\tilde{\theta}$ 亦必須為時間的函數。

θ 之定義式

$$\theta = \alpha T_0 + \beta p_0$$

雖與 $\tilde{\theta}$ 定義式形式相似，但另有關係式

$$\alpha \left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_a + \beta \left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_a = 0 \quad (93)$$

即

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = 0$$

故 θ 與時間無關。對 θ 講，則並無類似 (93) 的關係，故 θ 不能與時間無關。

$\tilde{\theta}$ 值近似 $\tilde{\theta}$ 值，而 θ 為時間函數， θ 則否；則兩條規律並不矛盾。因氣壓變化包括平流及動力兩部分，氣壓平流變化部分與溫度變化結合起來得 θ ，即 (93)，這是不隨時間變化的。但氣壓總變化（平流加動力）與溫度變化結合起來則得 $\tilde{\theta}$ ，這是隨時間改變的。

取 (87) 式對時間偏微分；利用 $\tilde{\alpha} \cong \alpha$ ，及 (93)，可得

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_a \quad (94)$$

可見 $\tilde{\theta}$ 值隨時間的變化，是由於氣壓動力變化產生的；其大小等於氣壓動力變化的 β 倍。如果沒有氣壓動力變化， $\tilde{\theta}$ 值就不隨時間變化， $\tilde{\theta}$ 就等於 θ 了。

氣壓動力變化的方程如 (92) 所示者尚不便於實用；如坐標改換用自然坐標，則氣壓動力變化可用 θ 場與 T_0 場的幾何結構很清楚地表示出來。先令 (92) 改寫成

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_a = A \left[\frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \left\{ \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \quad (95)$$

今取 s 軸與等 θ 線相切，指向等 θ 線的正方向，即其右方 θ 值總高於左方。取 n 軸與 s 軸垂直，指向 s 軸的右方，即自高 θ 值指向低 θ 值。

又規定等 T_0 線（或等 θ 線）的正方向為這樣的方向，其右方的 T_0 值（或 θ 值）總高於左方。自等 θ 線正方向反鐘向轉至等 T_0 線正方向的角度為 φ 。又令 v 表等溫線的法線方向，自低 T_0 值指向高 T_0 值。

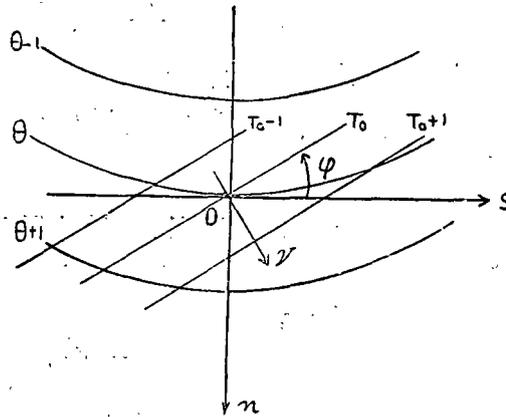


圖9. θ 場內的自然坐標。

這些規定都表示於圖9。又 r 為在所考慮地點等 θ 線的曲度半徑。

應用坐標轉換，(95) 式可改用自然坐標， s 及 n 軸表示如下：

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a = \frac{A}{2} \left(\frac{\partial T_0}{\partial v}\right)^2 \left[2\cos 2\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial n} - \sin 2\varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} + \sin 2\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial n} \right] \quad (96)$$

氣壓平流變化的公式亦可用自然坐標表示：

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a = -\alpha \{T_0, \rho_0\} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial T_0}{\partial v} \sin \varphi \quad (97)$$

若令 h_T 表示每單位差等溫線間距離， h_θ 表示每單位差等 θ 線間距離，則 (97) 及 (96) 又可改寫作

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\sin \alpha}{h_\theta h_T} \quad (98)$$

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right)_a = \frac{A}{2} \frac{1}{h_T^2} \left[-\frac{\alpha \cos^2 \varphi}{h_\theta^2} \frac{\partial h_\theta}{\partial s} + \frac{\sin^2 \varphi}{h_\theta^2} \frac{\partial h_\theta}{\partial n} + \frac{\sin^2 \varphi}{h_\theta} \frac{1}{r} \right] \quad (99)$$

由 (99) 或 (96)，可見動力變壓與溫度梯度成正比，故鋒區為動力變壓作用最強烈的區域。這揭露了鋒區的重要意義，也解釋了鋒區易於產生低壓的原因。同時該式又把高低壓系統的發展原因統一了起來，動力減壓可產生低壓，動力加壓可產生高壓，原是一事的兩面，基本的道理是一樣的。該式又明顯地揭露氣壓場的發展不單單決定於氣壓場或氣溫場，而是決定於溫壓場相互的結構；任何片面的，孤立的處理是要犯錯誤的。

(99) 或 (96) 指出產生動力變壓的原因有三種，亦即是使氣壓場發展的有三種作用，則由該式右方三項代表。第一項是等 θ 線的散度作用，亦即引導層上氣流

線的散度作用；第二項是等 θ 線（或引導層氣流線）在其法線方向的疏密變化作用；第三項是等 θ 線（或引導層氣流線）的曲度作用。在通常情形中，第一項最重要，第二及第三項常可略去。其故因當溫度梯度相當大時，即動力變壓顯著到應予考慮時， φ 角常是很小的，故第一項之值很大，而第二、第三項很小。另外，在通常情形中，第二、第三項所代表的動力變壓的符號，與平流變壓的符號相同，可併在一起考慮；但第一項動力變壓的符號與平流變壓符號無關，非單獨考慮不可。至於詳細討論見後列參考文獻，茲不贅。

參考文獻

- (1) Белинский, В. А. 1948, Динамическая метеорология, Глава XX.
- (2) Ветлов, И. П. 1953, 鋒生與高空變形場的改變(陶詩言譯)。
- (3) Извеков, В. И. 1941, 基培爾教授的天氣預報的理論方法(羅濟歐重譯)。
- (4) 葉篤正, 1953, 蘇聯的平流動力分析理論, 氣象學報24卷4期。
- (5) 朱和周, 1953, 變高變壓的平流動力理論與應用, 氣象局。

NOTES ON KIBEL'S FORECASTING EQUATIONS

E. H. Hsu

(University of Nanking)

Abstract

Kibel's forecasting equations, both to the first and to the second approximation, are re-derived on the base of the principle, of thermal wind. The physical meaning of such procedure is easy to grasp. The significance of θ -lines is discussed and it is demonstrated by a graphic method that surface isobars and isotherms must move along θ -lines with the speed numerically equal to the gradient of θ -lines. With the aid of thermal wind it is shown that there must exist the steering layer, the significance of which is discussed in detail. It is demonstrated that to the first approximation, variations of pressure below and above the steering layer have opposite signs while variations of temperature are characterized by the same signs. It is proved with emphasis that the first approximation implies that isobars, as well as isotherms, at all levels within the entire troposphere are steered by the same steering layer and transmitted at the very same velocity.