氣 象 學 報
第25卷第3期 1954年9月

大範圍垂直運動的分析計算*

顧 震 潮

（中國科學院地球物理研究所）

目 次

一、垂直運動的一般情況
二、大範圍垂直運動的分析計算
1. 邊界條件法
2. 個別變化法
3. 輻合法
4. 降水强度法
5. 動力法 (1) 變壓法 (2) 温度法
三、結語
參考文獻

一、垂直運動的一般情況

誰也知道大氣運動中的最根本的動力在於日射不均勻造成位能和內能釋放，而這種位能和內能的釋放是必然要通過垂直運動來完成的。沒有垂直運動，大氣環流就無法由這個過程取得動能，因而也無法維持。並且大氣中的重要天氣現象：即雲和降水，主要是空氣上升，絕熱冷却（或所謂動力冷却）發生凝結的結果。別的冷却作用是不會產生大量凝結的。此外，通過垂直運動蒸發凝結又造成大氣環流熱量平衡中非常重要的潛熱輸送。因此，垂直運動的問題對於理論工作者和對於天氣預報工作者來說，都是一個極有原則意義的問題。

再看一下垂直運動的各項影響，那就更多了。 在動力冷却[1]發生凝結的問題中，垂直運動就幾乎是決定性的因素。因爲，以一般情形來說，濕度大小變化所造成的凝結高度的變化不過二公里左右。然而在可能有的不同垂直運動下空氣在同一時間中上升或下降的高度適比這數字來得大[2]。這就是說濕度變化所造成的凝結高度的變化不是唯一主要的，抬舉高度變化的大小範圍也比垂直運動的變

* 中國科學院地球物理研究所論著第254號。

1) 如果速度 $w=2$ 厘米/秒，温度遞減率 $\gamma=6°C$/千米，那末在沒有凝結蒸發時上升或下降的結果已可以造成 $\triangle T_{24}=\pm 6°C$。

2) 如升降速度差5厘米/秒計，24小時升降可差4.5公里，而地面温度 30°C 時，如濕度由100%降到50%，或由30%升到80%凝結高度相差還不到二公里。

化來得小。另一方面垂直運動直接影響了相對濕度，而在空氣到達飽和以前，濕度幾乎並不對垂直運動中發生什麼影響。因此可以說在動力冷却發生凝結的問題上垂直運動是主要的。因而在天氣預告中對垂直運動的估計是很需要的。

不但如此，事實上垂直運動的影響還遠爲廣泛，例如垂直運動必然要影響到空氣的穩定性（反過來穩定性又要影響到垂直運動），垂直運動可以引起動量和渦度的垂直傳遞和變換而引起大範圍流型的改變，垂直運動又相對的表示了天氣系統的發展情況。最後，地形動力擾動[1]和熱力擾動其很主要的一面，也是通過强迫的垂直運動來發生作用的。

然而垂直運動雖然是很有意義，很主要的因素，在一般天氣學教科書和動力氣象學教科書中對垂直運動的估計方法，缺少比較有系統的介紹，因此，在這方面作一些綜合的介紹或許還不無用處。

垂直運動是大氣非地轉運動或非梯度運動的結果。主要的原因不外三種：即是斜壓發展，摩擦[1] 和地形等强迫上升。在正壓的氣體運動中，並不是不能夠有垂直運動，但就天氣的意義來說，都不是最重要的，因爲例如在正壓波動中垂直方向上輻散符號上下相同[2]，因此垂直運動一般不會很大，並且較大的垂直運動產生在氣層頂部，對天氣影響較小。而斜壓波動中不但輻散符號可以上下不同。垂直運動因而比較大，並且垂直運動最大的地方往往就在對流層中部或中雲高度附近，因此對於天氣的影響就大多了。再斜壓情形中即使不看輻散，絕熱運動中的空氣沿着等熵面運動，垂直速度很容易到每秒幾厘米，而正壓大氣中空氣就不是如此，在別的條件相同時要沿等壓面運動，在對流層中下部垂直速度大小就已與斜壓大氣的要相差一個級次，它的影響因此就遠爲微小。

摩擦影響包括了大氣湍流的作用，它主要使空氣發生摩擦輻散（或輻合）而造成垂直運動。地形的影響更爲清楚，運動學的邊界條件決定了空氣必須沿着地面運動，必須發生垂直運動。如果空氣不穩定的話，更可引起更大的垂直運動。

此外不僅在對流層內有垂直運動，就是在平流層內也是有垂直運動的。平流層這名稱實際上並不就意味着在這層中只有空氣的平流。自然平流層中的穩定層結對垂直運動有着抑制作用，但是垂直運動可以影響到穩定性，因此特別在對流頂附近的平流層裏，不但存在着垂直運動，並且垂直運動還可能很大[3]，甚至還

1) 見 F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, S. 138, 2te auflage, J. Springer Velag wien 1925. 又 Lettau [3], Sieber [4] 並討論了內摩擦對垂直運動的影響。

可以使對流頂本身發生位移、變化和生滅[4]。

垂直運動的大小級次因運動的範圍尺度不同而不同。小範圍運動的垂直運動極大，例如龍卷風中，極端發展的積雨雲，大小範圍是幾公里，它的垂直運動可以大到每秒數米，甚至每秒十多米。然而大範圍（例如 $L=10^7$—10^8 厘米）的運動中垂直運動只有每秒幾個，幾十個厘米，一般說來[5]

$$\text{垂直運動（厘米/秒）}=10^3/\text{運動水平範圍（千米）}.$$

我們也要指出，由於大氣對流層厚度極爲有限，因此，大範圍中每秒 1 厘米的垂直運動也是很可觀了。每秒 1 厘米的垂直運動約相當於一晝夜上升（或下降）一千米，因此，不但對於大範圍凝結降水已可能大有影響[1]，並且如果繼續三、四天，對流層中部的空氣就已經可以上升到對流頂或者下降到地面了。這不論從運動本身或天氣影響上來說，都是非常可觀的。的確，對每秒一厘米的大範圍垂直運動應該和對每秒 10 米的對流層中部水平氣流一樣被重視，甚至應該更重視些。

然而我們在天氣預報中如何來估計大範圍垂直運動的大小呢？大家知道一般的天氣圖表上是不容易直接看出垂直運動的。垂直運動也不是單純從地面氣壓分佈或等壓面的形勢直接決定的。因此我們不能不另作一些計算（或圖表）來幫助了解和決定垂直運動。在下節中我們要說的就是這些計算方法。

二、大範圍垂直運動的分析計算

對垂直運動的計算和決定，方法很多。在大氣湍流方面觀測和分析中就有許多方法，但這不是我所要談的，我們也不打算在討論關於當地或單站上空垂直運動的分析方法：例如由探空計算局部對流强度，用測風探空的合併觀測、核對預定上升速度下各時間的氣球應到高度和依上升曲綫算得的實際到達高度（或用雙經緯儀觀測直接確定實際到達的高度）來求垂直運動。這裏所談的是天氣分析預報中所用的分析方法，特別着重造成大片天氣區的大範圍垂直運動。現在按類別把各種方法分述如下：

1. 較大範圍垂直運動最容易決定的，便是强迫上升或抬高時所生的垂直運動這包括鋒面上滑上，等熵面滑上等地形抬升等等情形。這種垂直運動自成類型，牠

1) 以 700mb 高度爲例：這種上升（下沉）運動一般可以在一晝夜內使氣溫下降（升高）5°C，使原來相對濕度是 50% 的空氣達到飽和而凝結。

和動力發展直接造成的垂直運動不同。根據運動學的邊界條件 $V_{\perp,F}-V_{\perp,W}=0$，（$\perp$ 表示與鋒面垂直的成分），如果氣流沿鋒滑升，（由此可能引起不穩定的對流運動，不在此例）鋒面上的垂直運動 w 是由鋒前氣流垂直於鋒面的分速 V_W 對鋒面的相對速度 V_W-V_F 和鋒面坡度 $m=\mathrm{tg}\ \alpha$ 而定，即[6]

$$w=m\ (V_W-V_F), \qquad (1)$$

V_F 是鋒面的移動速度，可以由鋒上地轉風，最近移動速度，變壓分佈等等來估計。在一般情況下 $V_W-V_F=10^2$，$m=10^{-2}$，因此 $w=10$厘米/秒。强烈的滑上運動中心往往可以到 10^1厘米/秒。特別是在急行冷鋒上面，不過這時鋒前對流活動較强，已不只是抬升了[1]。

等熵面上的滑行情形與鋒面上的滑升完全一樣。不過等熵面本身的移速不易決定，因此要看等熵面本身的抬高速度 w_θ，

$$w=mv-w_\theta, \qquad (2)$$

其中 m 是等熵面坡度，可由等熵面上等高綫[2]的距離來決定，v 是等熵面上氣流上下坡吹的分速（即垂直於等熵面上等高綫的成分）。在實際工作中決定 w_θ 最簡單的方法是看最近兩次等熵面圖上等熵面高度的變化，但最好看看目下等熵面下方氣流的來向，如果下方氣流是向等熵面的高度較低的方向吹的，那末它要抬高等熵面，即 $w_\theta>0$，反之 $w_\theta<0$。

高空刮北風時通常下沉强，天氣較好，而高空刮南風時通常上升運動明顯，天氣較壞（有雲或降水）。沿等熵面的滑升滑下是這現象的主要因素之一，因爲等熵面一般都是由南向北高度漸漸增加的。一般說來等熵面坡度比鋒面小，等熵面滑升的垂直運動也要比鋒上小一些。但像華中華南冬半年降水來說暖空氣沿等熵面長時間滑升，對降水仍是很重要的因子。

地形抬高問題更簡單些，這時因爲地形是固定不動的，所以

$$w=mv,$$

m 是山的坡度，v 是對着山坡直吹的風速成分。由於山嶺地形的坡度即使在大範圍內也經常比鋒面大，甚至可以大十多倍，因此，而 $v=10^2-10^3$，$m=10^2-10^1$，$w=10^0-10^2$

至於在小範圍局部峻陡的山坡上沿坡上升的垂直運動自然更要大得多。

1) 颮綫的性質目下還沒有定論，不能確定是否爲物質綫，並且對流活動更明顯，因此不屬此類。

2) 實用上可以由等壓綫來代替，繪製較易。

2. 顯然對於一般任意地方的垂直運動，我們是不能靠上面的辦法來計算的。這時我們另有許多方法。很自然，要決定垂直運動，必需尋找含有垂直運動的各種關係式。一般說來，動力學方程式裏雖然也包括 w 在內，但是解答常常很複雜，因此大家就不得不儘先尋找運動學的關係式。

第一個明顯的關係式便是質點的個別變化的表達式，大家知道

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla+w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4}$$

其中必然含有垂直運動所造成的垂直輸送項，這裏 V 是水平速度向量，$\frac{d}{dt}$ 是個別變化，$\frac{\partial}{\partial t}$ 是當地變化，$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}$。所以我們如果能夠求出氣象要素的個別變化那末把它和當地變化和平流變化比較便可求出垂直輸送的大小，因而也可求出垂直運動的大小，即

$$w=\left(\frac{d}{dt}-\frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\Big/\frac{\partial}{\partial z}, \tag{5}$$

這方法可以稱做個別變化法，過去用得很多。一般說來，上項計算適合於許多氣象要素，例如比濕 q 就是其一；在沒有雲點凝結和蒸發時，$\frac{dq}{dt}=0$，

$$w=-\frac{\frac{\partial q}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\frac{\partial q}{\partial n}}{\frac{\partial q}{\partial z}}, \tag{6}$$

這非常簡單。但特別是等熵面上，由等比濕綫在等熵面上上坡、下坡的移動就可以直接估計出上升運動來，但到四、五公里以上比濕很小，又不易精確觀測。所以一般以用在2—5公里高度上較好。

大家更常用的還是氣溫（或位溫）。在沒有飽和之前，絕熱過程下的氣塊溫度按乾絕熱遞減率而變化，即 $\frac{dT}{dt}=-w\gamma_a$，因此

$$w=\frac{\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla T}{\gamma-\gamma_a}, \tag{7}$$

其中 $\gamma=-\frac{\partial T}{\partial z}$。顯然如果空氣飽和絕熱上升時，$\gamma_a$ 要用飽和遞減率 γ_s 代替。這裏溫度平流項 $\boldsymbol{V}\cdot\nabla T$ 可以由高空圖或測風氣球直接算出。$\frac{\partial T}{\partial t}$ 是當地的實際變化，可由探空或高空圖上求出。蘇聯 Ключарев[7] 應用這方法到等壓面圖上。因爲在

等壓面圖上等温線即是等位温綫，路徑上的

$$\left.\frac{\delta T}{\delta t}\right|_{\text{路徑}} = -w(\gamma_a - \gamma),$$

因此

$$w = \frac{\left.\frac{\delta T}{\delta t}\right|_{\text{路徑}}}{\gamma - \gamma_a}, \qquad (8)$$

Зверев[8] 也應用這方法到等壓面圖上。如果在 δt 時間中某等壓面上温度平流變化該是 A 度（注意 $A = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla T$ 風向着氣温梯度吹時是暖平流），而實際上當地的温度變化是 B 度，那末（6）式成爲

$$w = -\frac{100}{36\delta t(\gamma_a - \gamma)}(B - A)\text{厘米/秒}, \qquad (9)$$

其中 B, A 以度計，γ_a, γ 以 °C/100 米計，δt 以小時計。當 $\gamma_a = 0.6$ °C/100米，$\delta t =$ 24 小時，

$$w = 0.29(A - B)\text{厘米/秒}, \qquad (10)$$

這是空氣質點在過去 24 小時中的平均垂直運動速度。

例如 1953 年 11 月 21 日晚 700mb 圖上烏拉爾區形成 −20°C 的中心（前一張圖上四周並沒有這冷中心存在，所以這決非平流作用的結果），根據前後 700mb 圖 $A - B = 8$ °C，850mb 及 700mb 間 $\gamma = 0.5$ °C/100 米，由此得 $w = 1.8$ 厘米/秒。

此外，我們還可以用 1000mb 到 500mb 相對高度 OT^{500}_{1000} 的變化 A_m，B_m 代替單獨一個等壓面上温度的變化 A, B，其中 A_m 應該是 700mb 地轉風或實測風下的平均厚度，平流（以十米計），因此（10）式成爲

$$w = 0.15\,(A_m - B_m)\text{厘米/秒}, \qquad (11)$$

但注意這時 OT^{500}_{1000} 用來作爲 1000mb 到 500mb 厚度的氣柱平均温度的一個指標，而後者因下方貼近地面，要受非絕熱變化的影響。同樣理由，二公里以下（8）或（9）式也都不大能用，除非先估計出非地轉變化［如下文公式（11）］。又上面的式子也可改寫以用在每 12 小時間隔的變化，如果每天有二次探空的話，（10），（11）兩式前面的係數這時要被 2 乘。原則上這更好一點，與實際情況也比較更符合[6]。當然這時候也可能受温度日變的影響。在我國有些地區即使在 700mb 甚至 500mb 面上温度日變化還是相當大的。

此外 Thompson[9] 不用實際的 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 而用動力模型解出 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 代入（7）式來決定 w_β，但是這方法用了動力學公式計算相當繁，而本質上仍是運動學的方法，因此

不能認爲是很成功的。

應該指出，Panofsky 和紐約大學一派人把這類方法稱做絕熱方法[10] (Graham[11]等稱它做熱力學方法)，是非常模糊的看法，特別因爲在下面接下去要講的一種方法中 Panofsky 也用了絕熱的假定。Panofsky 看到在 (5) 式化成 (6) 式時，爲了表達$\frac{dT}{dt}$用了絕熱過程，使用了這個名稱。然而不但 (5) 式本身是一個遠爲一般的關係，就是具體用温度做對象的時候，只要我們能估計出温度非絕熱變化的大小 (例如在我國用這方法時如果取 $\delta t=12$ 小時，我們可用平均日變化中適當時間的 ΔT_{12} 來大致的估計温度日變化)，即使是温度受非絕熱過程的作用 (5) 式也可以化成與 (6) 式相應的公式

$$w=\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla T-\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\text{非絕熱}}\right]\Big/\gamma-\gamma_a. \tag{11'}$$

在原則上這方法的主要缺點是 (5) 式中所需要的$\frac{d}{dt}$項有時不易估計，例如在已有凝結或蒸發發生時$\frac{dq}{dt}\neq 0$，並且不易估計。不規則的非絕熱温度變化也不易估計。而對於 (7) 式來說，實際遞減率愈接近絕熱遞減率 (7) 式分母的大小就接近分母本身誤差的大小，因此當垂直運動愈明顯的時候，用 (7) 式來計算就恰恰愈不易準確。這是 (6) 式的根本缺點。在這種情形下，如果空氣還不曾接近飽和，我們可以用比濕關係 (6) 來計算。

3. 另一個含有垂直運動的運動學基本關係式便是連續性方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{12}$$

由此

$$w=-\int_0^z \mathrm{div}_2\boldsymbol{V}dz-\int_0^z\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}dz \tag{13}$$

或者

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$w=-\frac{1}{\rho_z}\int_0^z \rho\,\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}dz=\frac{1}{\rho_z g}\int_{\rho_0}^{\rho}\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}dp, \tag{14}$$

g 是垂直運動加速度，ρ 是空氣密度。以上 (13) 及 (14) 式都假定了在地面 $w_p=0$，而$\frac{\partial \rho}{\partial t}$項對 w 的影響很小，可以略去[1]。這類方法稱爲連續性方程

1) 如果 6 小時內三公里內氣温降低 10°C，$w\doteq\frac{1}{\rho}\int_0^z\frac{\partial \rho}{\partial z}dz\doteq 0.05$ 厘米/秒，故$\frac{\partial \rho}{\partial z}$項對大範圍垂直運動的影響最大也不會到 1 厘米/秒。

法[1]，或輻合法[12](Panofsky 稱之爲運動學方法[10]，仍是很模糊混亂的，因爲個別變化法也是從運動學的關係得來的)。

在這方法中不論用 (13) 或 (14) 式主要的問題顯然是輻合的估計和積分。輻合可從流綫的輻散輻合死算，但這需要中下到上各等壓面層上的流綫，而事實上我們頂多只畫五六層等壓面圖，因此這也是不夠的。一般用得更多的是由實際測風紀錄來算。A, B, C 三個測站所構成的△上任一頂點，對由此點到對邊的高是h，而各測站上平行於相應的高的風速是v，即可得[13][14]

$$\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}=\frac{V_A}{h_A}+\frac{V_B}{h_B}+\frac{V_C}{h_C}, \tag{15}$$

這樣，用各層的測風紀錄，逐層求出 $\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}$，再對高度或向上對氣壓積分，就可以求得垂直運動。在計算所費時間方面，熟練一些的人每算一個連帶積分約花半小時[13]。

Panofsky 用 (12) 式來計算垂直運動[2]，但這一般是比較不方便的。比較值得介紹的一點是：假定運動是絕熱的，那末$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=\frac{W}{\rho}\frac{d\rho}{dz}=\frac{W}{\gamma_a p}\frac{dp}{dz}=\frac{W}{\gamma_a p}\frac{\partial p}{\partial z}$代入 (12) 式乘 $\left(\frac{p_0}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}$，原來的$\frac{\partial W}{\partial z}$和$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}$項合併成$\frac{\partial}{\partial z}W\left(\frac{p_0}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}$，積分得 z 高度上的空氣垂直速度

$$w_z=\left(\frac{p_0}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma}}w_{z_0}-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}\nabla\cdot\boldsymbol{V}dz, \tag{16}$$

略去$\left(\frac{p}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}$和 h 的水平變化，Panofsky 證得

$$w_z=-\nabla\cdot\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\bar{p}}{p}\right)\boldsymbol{V}dz=-\left(\frac{\bar{p}}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}\nabla\cdot\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{V}dz=-b\left(\frac{\bar{p}}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}\nabla\cdot\int_{t(z)_0}^{t(z)}\boldsymbol{V}\,dt \tag{17}$$

或

$$w_z=-b\left(\frac{\bar{p}}{p_z}\right)^{\frac{1}{\gamma_a}}\nabla\cdot\boldsymbol{R}, \tag{18}$$

1) 這方法由來較早。V. Bjerknes 等曾利用這方法由圖解求 ρw 的分佈。見 V. Bjerknes, Th. Hesselberg 及 O. Devik 合著 Kinematik der Atmosphäre und Hydrosphäre (V. Bjerknes and Collaborators, Dynamische Meteorologie und Hydrographie Bd. II.) Washington, 1911, 德文譯本 Braunschweig 1913, M. Margues, 並討論過這方法的可能性，見 F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, 2te Aufl., S. 76.

2) Austin[43] 及 Lettau [31]也用(12) 式來求垂直運動。

其中 b 是氣球上升速率，$\boldsymbol{R}$ 是氣球軌跡水平投影上從 $t=0$ 點到 $t=t$ 點的向量距離。$\nabla\cdot\boldsymbol{R}$ 或 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{R}$ 即 $\boldsymbol{R}$ 的輻散，可用求 $\mathrm{div}_2\,\boldsymbol{V}$ 的方法來求[1)]。

上面所說的方法已比較複雜，並且計算輻散輻合只計算一個測站三角時還不一定够，因此費的時間特別多。再者輻合的計算本身已有相當誤差，而各高度的輻合，一般都符號相反，因此在把它對高度積分時，往往彼此抵消，積分所得數值就比較小，而相對的百分誤差就變得相當大。並且輻合主要是非地轉風的輻合，因此必須用測風紀錄來計算。而高度愈高，測風紀錄愈少，誤差也愈大，更不必說下雨時，除了用測風無綫電外，就沒有紀錄可用。

4. 正如上面所指出，以上這些方法在下雨時都不大好用。在這時候如果降水是大片均勻的上升抬高或滑升的結果，而不是對流不穩定性的局部降水，那末我們也可以應用降水强度來估計垂直運動。因爲降水强度是和垂直運動直接有關係的。根據降水强度 I 的公式(詳見[16][17])

$$I=\int_{z_1}^{z_2}\rho\frac{dq}{dz}w\,dz=\overline{w}\frac{1}{g}\int_{p_2}^{p_1}\frac{dq}{dz}dp, \tag{19}$$

其 z 是 p_2（高度 z_2）及 p_1（高度 z_1）間即凝結層中的一種平均值。在整個空氣柱都已飽和並且溫度沿飽和絕熱綫分佈時，最後一個積分只是這飽和絕熱線上濕球位温 θ_z（可取開始上升那一層的 θ_w），p_1 和 p_2 的函數。因此由此可以求出垂直運動

$$\overline{w}=kI, \tag{20}$$

k 由 θ_w, p_2, p_1 決定。這種方法可以稱做降水强度法。Bannon[17]曾建議用這個方法估計下雨時的垂直運動，他給了 $p_2=0$ 時 k (θ_w, p_2) 的表，詳見[16][17]。

這方法的缺點是使用範圍較狹，例如對於雨量强度較大的雷暴雨就不能用來估計垂直運動。因爲這時上下攪動劇烈，與 (20) 式所表示的情形不合。

5. 上面所說的種種方法，有一個共同之點，就是都沒有直接連繫到水平的運動方程。因此不能說是動力學的分析。當然對垂直運動作徹底的動力學分析，必然牽涉到全部天氣方程式的完全解答。但是我們爲了分析的目的，我們不必把運動方程式積分，而可以僅僅應用它的微分關係來表達垂直運動，因此這種方法仍然和天氣方程式的眞正解答即和垂直運動的預報方法有着根本的區別的。

(1) 要把垂直運動連聯到水平運動，就必須應用水平運動方程。這就有不同

1) 有泉氏[15]由此證明風速向上順轉時有上升運動，風速向上逆轉時有下沉運動。原文未見。

的結合方法。在輻合法中我們已經通過連續性方程用輻合來表達垂直運動。現在我們有水平運動方程可用，我們就可以想到我們不一定需要直接硬算輻合；而可以再進一步通過運動方程把輻合表達出來。很明顯，這樣所表達出來的輻合一定是非地轉風的輻合，因爲根據定義地轉風的輻合必然等於零。如果我們把水平運動分做地轉成分 u_g, v_g 和非地轉成分 u', v'，那麼

$$u=u_g+u'; \qquad v=v_g+v',$$

因此

$$\mathrm{div}_2 V=\mathrm{div}_2 V', \tag{21}$$

略去摩擦（因爲這項對垂直運動的影響只存在於地面層及摩擦層，並且作用性質明顯，例如摩擦總使高壓中氣流輻散下沉等。Дюбюк[18] 曾作此類詳細計算，詳見原文），即只考慮惰性項的作用，並且只考慮氣壓場發生改變下風速的局地變化，那末在一定的假定下[19]非地轉風即可由變壓風來表示，即

$$\rho u'=-\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \dot{p}}{\partial x}; \qquad \rho v'=-\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \dot{p}}{\partial y}, \tag{22}$$

其中 λ 是地轉參變數，$\dot{p}\equiv\frac{\partial p}{\partial t}$，$u', v'$ 各是變壓風設 x 和 y 軸的分速。因此

$$w=-\frac{1}{\rho}\int_0^z \mathrm{div}\,\rho V\,dz=\frac{1}{\lambda^2\rho}\int_0^z \nabla^2\dot{p}\,dz, \tag{23}$$

∇^2 是拉普拉斯算符。這裏仍假定 $w_0=0$。Орлова[20] 曾建議在各等壓面層上分別計算圍繞某點的一個小正邊形，用

$$V'=-\frac{1}{\lambda^2\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right) \tag{24}$$

來計算變壓風，H 是該等壓面的位勢高度。由此可得垂直於小正方形的四個變壓風成分 V'_n，而根據定義

$$\Delta w=-\Delta H=-\frac{\sum_L V'_n \Delta L}{S}\Delta z=\frac{-\Delta z}{L}(V'_{1n}+V'_{2n}+V'_{3n}+V'_{4n}), \tag{25}$$

其中 S 是邊長 ΔL 的小四邊形面積。由此把由下向上各層的 Δw 相加就得高空某處的空氣垂直速度。

之後，Таборовский 根據平流動力分析理論把變壓風看做冷暖平流不均勻的結果，而提出了新的變壓風的式子來計算垂直運動[21]。平流動力分析證明，任何高度 z 上的平流變壓 $\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)$，可寫成[22]

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1 = -\left(\alpha\frac{\dot{p}}{p_0} - \frac{g\rho}{T_0}\beta z\right)(T_0, p_0), \tag{26}$$

其中 (T_0, p_0) 是 T_0, p_0 的雅各比算式，它代表暖(冷)平流，ρ 是 z 高度上的空氣密度，α, β 是參變數。以此變壓代入 (23) 式並把 (T_0, p_0) 換成 (θ, T) 其中 $\theta = \alpha T_0 + \beta p$，(在質的分析中 θ 可以看做是引導層等壓面的高度)，得

$$w = \left[\frac{1}{\lambda^2\rho}\int_0^z\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{p}{p_0} - \frac{g}{T_0}pz\right)dz\right]\nabla^2(\theta, T) \equiv K\nabla^2(\theta, T), \tag{27}$$

其中參變數 K 可以看做只依高度和緯度而變，而 ∇^2 是拉普拉斯算符。(27) 式表達了在不均勻的平流分佈下，平流變壓造成的垂直運動。它表明在這情形下垂直運動 w 和冷暖平流 (θ, T) 之間的關係就與地轉風渦度 ζ 和氣壓 p、或圓形彈性膜上所加的力 f 和彈性變形位移 S 的關係一樣。取一個特殊的情形來說，也就是 (θ, T) 最大即暖平流最大或冷平流最小的地方垂直運動是正的 (上升氣流)，而在冷平流最大或暖平流最小的地方垂直運動是負的 (下沉氣流)。

Таборовский 方法的優點就是把平流變壓的變壓風所造成的垂直運動用溫壓場構造來表達，因此我們根據溫壓場就可以計算當時的變壓，不必像原來形式 (23) 那樣必需要有實際變壓 (或變高) 出來才能計算。這是因爲 Таборовский 聯繫到進一步的物理過程——平流作用的緣故。Таборовский 的公式還不是完全的，但上面所說的優點就可以使我們把它用在溫壓場的溫壓場預報圖上以定出由此所決定這種垂直運動的預報值。像 Miller[21] 那樣在這方面僅僅提出一個在那時已人人知道了的形式 (23)，也不再進一步加以發展就自以爲完成了任務、是完全不够的。

(2) 另外一個方法，也是更好的方法是把垂直運動聯繫到水平運動方程即應用連續性方程和氣體方程的全部方程式，而引出溫度與垂直運動的關係。最簡單的結果就是略去摩擦、湍流及其他因素的影響，我們可以從兩個水平運動方程求出一個渦度方程 (當然另外還有一個方程，但在這裏暫時沒有用)，而在連續方程和渦度方程之間消去兩度輻散。由此從尺度理論證明[23]，在 Кибель 的第二近似值中[1]略去非地轉渦度 Coriolis 參變數的緯度變化和垂直渦度運輸，

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\rho}{\lambda}\left[\frac{\partial\zeta_g}{\partial t} + \boldsymbol{V}_g\cdot\nabla\zeta_g\right], \tag{28}$$

1) 第一近似值下只有地轉風平流作用，因此 $w=0$。

$$w=\frac{1}{\rho\lambda}\int_0^z \rho\frac{d\zeta}{dt}dz, \tag{29}$$

這裏ζ_g是地轉風的渦度，$\frac{d\zeta_g}{dt}\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla\zeta_g$，這是很容易了解的。因爲最簡單的渦度方程式$\frac{\zeta+\lambda}{D}=$常數就表明相對渦度$\zeta$的變化必然是和氣柱厚度$D$的變化相關連的，而厚度$D$的變化正是氣柱在垂直運動下伸長或縮短的結果。重要的是ζ_g的變化和氣壓變化同樣必須看做是天氣發展過程的一部分，即聯繫到温壓場，從平流動力分析來了解。

自從 Кибель 應用渦度方程式來決定垂直運動後[1]，相繼用這方法的就多了。Упинский[25]、Морской[26]以及近年來分析計算大範圍垂直運動的其他學者大都是應用這方法的。其中比較熟知的是英國 Sutcliff[27] 提出應用渦度方程求氣柱平均垂直運動的方法，之後 Sawyer[28,29]，Bushby[30]就依着他的方法繼續發展。Riehl[32]討論降水預報中的垂直運動也是用這方法。Eliassen 和 Hubert[33]，在研究大範圍垂直運動的作用時也是用這方法來估計垂直運動的。

爲什麼近年來大家都紛紛採用這方法來分析垂直運動呢。這不僅是一個理論問題，也不是渦度方程比較時行的關係，而是實際上使用這方法是更爲合適的。前面已經說過，以前各種方法特別是第三種方法的最大缺點是計算結果不夠精確，像輻合一項，本身就誤差很大，不大可靠。但在現在這方法中，用的是渦度，而渦度的計算要比輻散方便[2]，並且上下符號常常一致，牠對高度積分所得結果要比輻散對高度的積分更精確一些。

不過大家用的雖然是同一類方法，具體的計算還是各有不同。爲了正確的預報温壓場，Успинский[25] 不得不計算w。他用温壓場構造來表示了渦度的變化，因爲渦度變化也是由氣壓（或高度）的平流變化和動力變化來決定的。他求出垂直運動的表達式

$$w=-\frac{1}{\rho_z}\int_0^z\frac{\rho}{\lambda}\{[\alpha a(\nabla^2T_0,p_0)+\alpha a(T_0,\nabla^2p_0)+a^2(\nabla^2p_0,p_0)]+[(\beta b+ab)(\nabla^2p_0,T_0)+(ab-\beta b)(\nabla^2T_0,p_0)]z+b^2(\nabla^2T_0,T_0)z^2\}dz, \tag{30}$$

1) 蘇聯理論氣象學者 Фридман 對渦度方程非常注意使用很多，渦度方程在蘇聯文獻中即稱做 Фридман 方程，但 Фридман 是否曾在 Кибель 以前即使用（29）式來決定垂直運動，因無 Фридман 文集，暫無可考。Dedebant 及 Wehlé[24]以前也曾提出用渦度垂直運動，因無原文，也暫誌於此待考。

2) 渦度可用地轉風渦度，計算較易，而輻散必須用非地轉風來計算，就麻煩多了。

其中 $a=\frac{RT}{\lambda p_0}$, $b=\frac{g}{\lambda T_0}$。 Успинский 並用了 a,b 等各參變數的一般實際數值把 (30) 式化成

$$w_n=-\frac{\bar{\rho}_{0z}}{\rho_z}\{[0.0004(\nabla^2 T_0,p_0)+0.00004(T_0,\nabla^2 p_0)+0.0002(\nabla^2 p_0,p_0)](z_n-z_{n-1})$$
$$+[0.0001(\nabla^2 p_0,T_0)+0.00001(\nabla^2 T_0,p_0)](z_n^2-z_{n-1}^2)$$
$$+0.00002(\nabla^2 T_0,T_0)(z_n^3-z_{n-1}^3)\}, \qquad (31)$$

這裏 w^n 是 n 層上的垂直風速，$\bar{\rho}_{0z}$ 是 z 高度和地面間的空氣平均密度。w_n 單位是公里/晝夜，氣壓單位：毫巴，氣温單位：攝氏度，距離單位：1000 公里，時間單位：晝夜，拉普拉斯算 ∇^2 可以按一般數值計算方法化做有規則網格上各值的有限差[1]，網格距離不要超過 500—1000 公里。

Sutcliff[27] 爲了研究大氣發展，用温壓場構造來表示氣柱平均垂直運動 $\bar{w}$。因爲

$$\frac{d}{dt}(\zeta_0+\lambda)-\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)=-\lambda(\mathrm{div}_2\,\boldsymbol{V}-\mathrm{div}_2\,\boldsymbol{V}_0)\propto\bar{w}, \qquad (32)$$

而展開左邊，

得
$$\bar{w}\propto\mathrm{div}_2\,\boldsymbol{V}-\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}_0=-V'\frac{\partial}{\partial s}(\lambda+\zeta_0+\zeta)=-V'\frac{\partial}{\partial s}(\lambda+\zeta+2\zeta_0), \qquad (33)$$

其中 V' 是熱成風，ζ' 是熱成風的渦度，它們都可從厚度圖求出。Sawyer[28][29] 後來曾依照這公式來直接計算垂直運動以分析降水情況，他認爲結果還是與實際情況符合的。此外 Bushby[20] 曾在 (33) 式加上垂直穩定性的影響，加以進一步的修正。

但這方法方面更多文獻中都只是死算，很多作者不再考慮如何把渦度聯繫到温壓場而直接從實況計算渦度（用有限差方法）的變化來求垂直運動。應該指出，這一類方法是不如 Успинский 和 Sutcliff 等方法的，因爲他們在理論上和在垂直運動預報的問題上又後退了一步。Sawyer[28] 把正壓渦度方程

$$\mathrm{div}_2\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\zeta+\lambda}\frac{d}{dt}(\zeta+\lambda)$$

---

1) 如果我們環繞其點上取一個小圈（半徑 500 公里），我們在小圈上取定間隔各點上的變數平均值 $\overline{X}$，而某點的參變數值是 X，那麼 $\nabla^2 X\propto X-\overline{X}$。用環繞某點的正方形上的點，也可得到相似的結果。

寫成

$$\mathrm{div}_2 \boldsymbol{V} = -\frac{d}{dt}\ln(\zeta+\lambda), \tag{34}$$

而先求出同一層高空圖上各點前後兩次 ln (ζ+λ) 的數值，再用圖解法來求出 $\mathrm{div}_2 \boldsymbol{V}$ 而求垂直運動。Riehl[32]在試做降水預報的時候也用 (28) 式求垂直運動。[他把 (28) 式或在任意高度 $z=h$ 及 $z=\infty$之間積分] 但他也只形式地把渦度的個別變化展開，略去幾項而把渦度平流$\frac{\partial\zeta}{\partial s}$代替渦度個別變化$\frac{d\zeta}{dt}$。這不但是死算，並且又略去了$\frac{\partial\zeta}{\partial t}$及$W\frac{\partial\zeta}{\partial z}$項。前者他自己也知道是很大的，但他宣佈暫時不談這問題。

Eliassen 和 Hubert[33]討論垂直方向上的渦度輸送時，對垂直運動也是直接計算的。他們把渦度方程寫做

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\eta - \omega\frac{\partial\eta}{\partial p} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial p} = -\boldsymbol{V}\cdot\nabla\eta - \eta^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\omega}{\eta}\right),$$

其中絕對渦度 $\eta=\zeta+\lambda$, $\omega=\frac{dp}{dt}$是垂直運動的一個衡量。

由此

$$\left.\frac{\omega}{\eta}\right|_{P_1} = \left.\frac{\omega}{\eta}\right|_{P_0} - \int_{P_1}^{P_0}\frac{\frac{\alpha\eta}{\alpha t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\eta}{\eta^2}\,dp, \tag{35}$$

例如

$$\left.\frac{\omega}{\eta}\right|_{850} = \left.\frac{\omega}{\eta}\right|_{1000} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla p}{\eta^2}\right)_{1000} - \left(\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla p}{\eta^2}\right)_{850}\right]\times 150\ \mathrm{mb},$$

其他等壓面層同此。

值得提出的是 Швец[34] 和 Морской[26] 曾應用更一般的渦度方程來求垂直運動。他們證明在渦度方程中斜壓項比較不重要，比其他各項差好幾個級次，但垂直方向湍流性渦度輸送$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$和其他一些項目卻要保留，而得

$$(\lambda+\zeta)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d'}{dt}(\zeta+\lambda) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) - (\lambda+\zeta)\frac{dL}{dt},$$

其中 $L=\ln\rho$, $\frac{d'}{dt}$表示水平方向上的個別微分，令 $S=\ln(\zeta+\lambda)$

而

$$N = \frac{d'S}{dt} - \frac{1}{\lambda+\zeta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) - \frac{dL}{dz},$$

則

$$w = \frac{\lambda+\zeta}{\rho_z}\int_0^z\frac{\rho}{\lambda+\zeta}N dz \approx \frac{1}{\rho}\int_0^z\rho N dz, \tag{36}$$

這裏假定在地面上 $w=0$, Морской 曾給予更一般、同時也更複雜的式子，因目前實用意義不大，從略。

*　　*　　*　　*

必須注意以上種種方法，從坡度法到動力法，都是分析上的方法。由這些計算所得的垂直運動都是當時的運動，乃至過去一段短時間中的平均垂直運動。因此本質上這些方法是不能用來預報未來的垂直運動的，除非有關因素的未來情況，如鋒面坡度，溫壓場構造等，先有了預報數值。因爲如前面所指出，以上各種用來決定垂直運動的關係都是同時間的關係，即使有時間微分關係也是用當時實況代入計算，不曾作全盤的解決。所以，由此算出的垂直運動固然常常和當時或當時前後短時間內的雲區和降水區比較符合，因而可以幫助分析，但是卻決不能用來製作雲和降水的預報。

應該提出，垂直運動預報問題是一個重要的根本問題，是不能也無法"偷巧"的。這問題的解決要從整個天氣方程的解答中獲得。垂直運動應該並且也只有和溫壓場一起作出預報。事實上，近年來的數值預報也已漸漸的從氣壓場預報注意到溫壓場預報和垂直運動的預報，除了 Кибель 所指出的道路外，資本主義國家的氣象研究者如 Eliassen[35], Árnason[36], Sawyer 和 Bushby[37], 及 Bushby[38]等等都已把溫壓場和垂直運動的預報一起作出，並算出一些實際例子。在這方面，這樣做法是必要的。

三、結　　語

從前節的討論看來，我們不難了解，針對着各種不同原因所產生的垂直運動，計算垂直運動的方法也是多種多樣的。每種方法都不是十全十美的，但每種方法都至少還適合於其中一種特殊的情形。例如 Таборовскгй 的方法中顯然沒有直接考慮到摩擦及上坡運動所造成的垂直運動。邊界條件法中恰就顧到這因子，但又並沒有直接考慮斜壓性天氣發展所造成垂直運動。上升抬高下雨時，降水强度法是合用的，但是沒有凝結降水時就得用別的方法。在比較近地面的氣層中由於測風紀錄較多，輻合法比較合適。相反的，溫度個別變化法就不大合適，到三公里以上由於雲層遮蔽測風減少，輻合法不大能用，但這區域中溫度個別變化法反而比較更合適等等。另一方面，我們也必須指出，各種方法之間也不是各有所長不分彼此的。前節中我們也曾隨時指出，那種方法原則上較好，那種較差，例如動

力法就有其原則上的重要性。

嚴重的問題是，即使有合適的分析計算方法可用，我們的紀錄，特別是高空紀錄對於決定垂直運動來說仍然是數量很不夠多而質量上不夠精確的。在平原上，無線電測風就不太多，更不必說高原、沙漠、海洋和極地了。因此高空觀測的不斷增加和不斷提高仍然是我們的迫切要求。而從預報上來看，垂直運動的分析計算顯然是不能滿足預報要求的，因此如何從理論上進一步由垂直運動的分析計算而結合溫壓場的預報找出預報垂直運動的方法，是應該解決的基本問題。

* * * *

由於時間的忽促和材料的限制，上面的一個綜合報告恐怕還是很不全面的。特別是有許多文獻，或則只由別處轉引（如 [7], [15], [23], [31], [34], [39] [44], [46]）或則只見到論文摘要（如 [40], [42]），其原文目下還搜集不到。因此所見一定不廣，希望大家指正。

參 考 文 獻

[1] Кибель, И. А., К вопросу о переваливании циклона через горный хребет, *Труды ИНУ, ГУГМС*, сер. 1. вып. 30, 5—9, 1947. （論氣旋過山運動，張家誠譯．收入"天氣發展的平流動力分析"，中國科學院出版，1953年）

[2] Монин, А. С., Изменния давления в баротропной атмосфере, *Изв. АН СССР сер. геофиз.*, 1952, No. 4, 76—85.

[3] Palmén, E. and Nagler, K. M., The formation and structure of a large-scale disturbance in the westerlies, *Jour. Met.* **6** (1949), 227—242.

[4] Palmén, E., Aerologische Untersuchungen der Atmospherischen Störungen bei besonderer Berücksichtigung der Stratosphärischen Vörgange, *Soc. Scient. Fenn. Comment. Phy. Math.*, VII, no. 5. 65 pp. Helsinki, 1933.

[5] Large scale vertical motion in the atmosphere, Discussion, *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **75** (1949), 192—195.

[6] Хромов, С. П., *Основы Синоптической Метеорологии*, Гидрометиздат, Л., 1948.

[7] Ключарев, С. С., 大氣中溫度變化的分析方法，氣象與水文 (*М. и. Г.*), 1940年，第九期，13—22. 見 [10] 所引.

[8] Зверев, А. С., Термодинамический анализ карт балической топографии и примение адвективно-динамического метод к прогнозу осадков, *Труды ИНУ, ГУГМС*, сер. 2, вып. 14, 1946. 見 [6], § 78, стр. 583—584.

[9] Thompson, P. D., On the theory of large scale disturbances in a two-dimensional barodinic equivalent of atmosphere, *Q. J. Roy. Met. Soc.* **79** (1953), 51—70.

[10] Panofsky, H. A., Methods of computing vertical motion in the atmosphere, *Jour. Met.*, **3** (1946), 45—49.

[11] Graham, R C., The estimation of vertical motion in the atmosphere, *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **73** (1947), 407.

[12] Кашин, К. И., Разпределение ветра в пространстве и осадки, *М. и. Г.*, 1951, № 1, 3—13.

[13] Shapperd, P. A., Recent research at Imperial College, in 'Large scale vertical motion in the atmosphere,' *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **75** (1949), 188—192.

[14] Ballemy, J. C., Objective calculation of divergence, vertical velocity and vorticity, *Bull, Amer. Met. Soc.*, **30** (1949), 45—49.

[15] Arizumi (有泉), N., A diagrammatic method of computing vertical motion in the atmosphere and its applications, *Geop. Mag.* (Tokyo). **22** (1950), 131—141. 見 *Met. Abstracts and Bibliography*, **2** (1951), 438.

[16] 顧震潮，預報降水量時需要考慮的幾個降水直接因素，天氣月刊，1954年，第8期.

[17] Bannon, J. K., The estimation of large-scale vertical currents from the rate of rainfall, *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **74** (1948), 57—67.

[18] Дюбюк, А. Ф., К вычислению ветикальных скорости по полю дабления, *Труды НИУ, ГУГМС*, сер. II. вып. 24, 28—51, 1947.

[19] Brunt, D., *Physical and Dynamical Meteorology*, 1st ed. University Press, Cambridge, 1934.

[20] Орлова, Е. М., Метод расчета вертикальных скоростей на различных уровнях по картам барической топографии, *Труды ЦИП. ГУГМС*, вып. 15(42), 74—90, 1949.

[21] Таборовский, Н. А., Гидродинамическая теория бароклинной атмосферы и основные вопросы синоптической метеорологии, *Труды НИУ, ГУГМС*, сер. II. вып. 26. 1947.（斜壓大氣的流體力學理論和天氣學的基本問題，張家誠譯，中華書局出版，1954年）.

[22] Miller, J. E., Studies of large scale vertical motions of the atmosphere, *Meteorological Papers*, vol. 1. no. 1, New York University, 1948.

[23] Кибель, И. А., Преложение к метеорологии уравнений маханики бароклинной жидкости, *Изв. АН СССР сер. географ. и геофз.*, No. 5. 1940. 見 Белинский, В. А., Динамическая Метеорология, гостехиздат, 1948.

[24] Dedebant G. and Ph. Wehlé, L'equation du tourbillon et son application à la thèorie du système nuageux, *U.G.G.I. Cinquième Assemblée Générale. Lisbonne 1933; Proc. Verb. de L'A.I.M.*, **2**, 117—144. 1933.

[25] Успинский, Б. Д., Прогноз температуры и влажности на висотах по методу Кибеля И. А., *Труды НИУ, ГУГМС*, сер. I, вып. 30. 70—82. 1947.（根據基培爾方法預告高空的溫度和溼度，陳漢耀譯，收入'天氣發展的平流動力分析'，中國科學院出版，1953年）.

[26] Морской, Г. И., К проблеме вычеслення вертикальной скорости воздуха, *М. и Г.*, 1954, № 1.

[27] Sutcliff, R. C., A contribution to the theory of development, *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **73** (1947), 370—383.

[28] Sawyer, J. S., Recent research at central forcasting office, Dunstable, in 'Large scale vertical motion in the atmosphere' *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **75** (1949), 185—188.

[29] Sawyer, J. S., A study of the rainfall of two synoptic situations, *Q. J. Roy. Met.* Soc., **78** (1952), 231—246.

[30] Bushby, The evaluation of vertical velocity and thickness tendency from Sutcliff's theory, *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **77** (1951), 354—362.

[31] Lettau, H., Über wetterwirksame vertikal bewegungen und ihre Ermittlung and der Druckfeld, 1. u. 2. Teil, *Met. Runds*, 1 (1948), 257—260 u. 519—523. 又見 John, H., Über den Aufbau und die Entwicklung von Kaltlufttropfen, Untersuchungen auf der Grundlage des Vertikalwindfeldes, *Veröff. des Geop. Inst. der Univ. Leipzig, II. ser., Bd. XVI*, Heft. 3. Akad. Verlag. Berlin, 1953.

[32] Riehl, H., Norquest, K. S. and Sugg, A. L., A quantitative method for the prediction of rainfall patterns, *Jour. Met.*, **9** (1952), 291—298.

[33] Eliassen, A. and Hubert, W. E., Computation of vertecal motion and vorticity budget in a blocking situation, Tellus, **5** (1953), 196—206.

[34] Швец, М. Е., Определение вертикальных скоростей в движущейся воздушиной массе при помощи уравнений гидромеханики. *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геоф.*, №. 4-5. 1941. 見 [25].

[35] Eliassen, A., Simplified models of the atmosphare, designed for the purpose of numerical weather prediction, *Tellus*, **4** (1952), 145—156.

[36] Árnason, G., A baroclinic model of the atmosphere applicable to the problem of numerical forecastng in theree dimensions. II, *Tellus*, **5** (1953), 386—407.

[37] Sawyer, J. S. and Bushby, F. H., A baroclinic model atmosphere suitable for numerical investigation, *Jour, Met.*, **10** (1953), 54—59.

[38] Bushby, F. H. and Hinds, M. K., Computation of tendencies and vertical motion with two-parameter model of the atmosphere, *Q. J. Roy, Met, Sac.*, **80** (1954), 16—26.

[39] Хргиан, А. Х., *Физика Атмосферы*, Москва, 1953. 本書第 20 章第 147 節(天氣預報)中曾提到在垂直運動和降水的問題方面還有 Г. И. Морской, З. Л. Туркетти, Н. В. Победова, А. Н. Мерцалов 等的貢獻.

[40] Kiveliovitch, M., Sur la composante vertical du vent, Pt. I. et II. *Jour. Scientifique de la Mét.* **1** (1949), 18—22, **2** (1950), 26—31. 見 *Met. Abstracts and Bibliography* **1** (1950), 163及435.

[41] Sieber, P., Vertikalbewegungen und Luftdruckänderungen, *Met. Runds*, **1** (1948), 322—329. 見 *met. Abstracts and Bibligraphy* **1** (1950), 295.

[42] Masuda (增田), Y., On the method of computing vertical motion in the atmosphere (1st, 2nd and 3rd report), *Papers in Met. and Geop.*, Tokyo, **1** (1950), 1—28. 見 *Met. Abstracts and Bibliography*, **2** (1951), 752.

[43] Austin, J. M., Cloudiness and precipitation in relation to frontal lifting and horizontal Convergence, *Papers Phy. Ocean. Meteor. Mass. Insn. Tech. and Woods Hole Ocean. Inst.* **9**, no. 3. (1943) 46 pp.

[44] Schmitz, H. P., Zur Ermittlung der Vertikalbewegung infolge Bodenreibung aus dem Druckfeld. *Met. Rundschan*, **2** (1949).

[45] Schmitz, H. P., Eine approximative Ermittlung der durch Drückänderungen bedingten Vertikal bewegung in der plantarischen Grenzschicht. *Met. Rundschen*, **4** (1951), 2—7.

[46] Möller, F., Vertikalbewegungen in Atmosphäre, *Fiat Report*, Nr. 1089 (1947). 見 [45] 轉引.