非线性正压亚临界不稳定①

陆维松

(南京气象学院, 南京, 210044)

摘 要

文中提出了一个新的广义能量作为 Lyapunov 函数, 导出了包含两个联立不等式的一种新的非线性正压稳定性判据。并指出其中一个不等式是初始扰动振幅小于某一临界值, 另一个则是摩擦系数大于另一临界值, 前者对后者有很强的约束。该判据表明, 在实际大气中对于有限振幅扰动容易产生正压亚临界不稳定, 它大大地改进了以前的结果。

关键词: 亚临界不稳定, 非线性判据, 广义能量。

1 引 言

正压不稳定理论一直是地球物理流体力学中的一个重要问题, 对于研究大气环流和天气系统的发生、发展起着重要的作用。目前, 全球气候变化已引起广泛关注, 与之有关的许多现象都具有相当正压性, 并可通过正压不稳定理论加以解释。例如, Simmons 等[1]提出了纬向非均匀基流出现正压不稳定时所产生的具有特定位相的最快增长波型, 类似于大气低频遥相关的 PNA 型, 但过去的研究一般都仅讨论线性无摩擦的情况。近年来, 国际上已开始研究有摩擦的纬向基流的非线性正压不稳定, 但研究工作很少, 且主要采用弱非线性的近似方法。若对于任意大小的扰动或快速增长的初始小扰动, 基流是否稳定, 其方法就失效。Hanrotay[2]采用 Serrin-Joseph 能量方法[3]得到了有摩擦的定常基流的非线性斜压不稳定判据, 并指出推广到含有任意切变的基流是困难的。由于实际大气都是有摩擦的而且是非线性的, 它们对于研究全球气候变化和气候动力学都起着相当重要的作用, 这是因为气候变化的时空尺度非常大, 使能量的耗散和补充显得尤为重要, 此时, 扰动振幅通常很大而且处于相当正压状态。因此, 很有必要用广义能量方法对任意大小的扰动确定有摩擦时的纬向切变基流的非线性稳定性条件。

Lu Weisong[4] 曾经采用 Serrin-Joseph 能量方法导得非线性正压稳定性判据, 并通过把总能量和总位涡拟能的线性组合作为 Lyapunov 函数, 解决了 Hanrotay 提出的疑难问题。但是 Lyapunov 函数的选取所得到的非线性稳定性判据不能显式地包含非线性效应,

① 初稿时间: 2000 年 2 月 5 日; 修改稿时间: 2001 年 3 月 5 日。
资助课题: 国家自然科学基金资助项目(49875013)

这样也就反映不出初始振幅对稳定性的影响。Lee 和 Held[5] 利用数值模式提出了亚临界不稳定这一概念, 即在一定的参数范围内, 对小振幅的初始扰动基流是稳定的, 而对于大振幅的初始扰动基流则是不稳定的。Yong[6] 指出对于任意大小的初始扰动, 要激发出近定常正压波主要取决于初始扰动振幅是否超越了某一临界值。可见初始扰动振幅对稳定性的影响是很大的。因此, 很有必要找到一种新的广义能量作为 Lyapunov 函数, 从而使导出的非线性正压稳定性判据显式地表示初始振幅对稳定性的重要影响。

本文提出了一种新的广义能量, 取代以往总能量和总位涡拟能的线性组合作为 Lyapunov 函数, 导出了一种新的非线性稳定性判据。

2　基本方程和广义能量方程

在 β 平面上, 含 Ekman 摩擦的无量纲准地转正压涡度方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = -r\nabla^2\psi + Q \tag{1}$$

式中, $q = \nabla^2\psi + \beta y$ 为位涡, ψ 为流函数, r 和 Q 分别是 Ekman 摩擦系数和外部涡源项, J 是雅可比算符。流体限制在南北两个刚墙之内, 而在 x 方向则是周期性的。令

$$\psi = \overline{\Psi}(y) + \psi'(t, x, y) \qquad Q = \overline{Q} + Q' \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得非线性准地转扰动正压涡度方程, 即

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\overline{\Psi}, q) + J(\psi, \overline{q}) + J(\psi, q) = -r\nabla^2\psi \tag{3}$$

其中, ψ 与 q 是略去撇号的扰动量。设平均外部涡源项 $\overline{Q}$ 与平均 Ekman 摩擦项相平衡, 且 $Q' \doteq 0$。

由式(3)得总的扰动广义能量方程为

$$\frac{dE}{dt} = P_1 + P_2 - rD_p \tag{4}$$

式中

$$E = Q + \lambda_1 E_1 + \lambda_2 Q_1 + \lambda_3 E_2 + \lambda_4 Q_2 \tag{5}$$

$$P_1 = P_{1a} + P_{1b} \qquad D_p = D_{pa} + D_{pb} \tag{6}$$

$$P_{1a} = A_1 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 C_1 \qquad P_{1b} = \lambda_3 G_1 + \lambda_4 F_1 \tag{7}$$

$$P_2 = A_2 + \lambda_3 G_2 + \lambda_4 F_2 \tag{8}$$

$$D_{pa} = D_Q + \lambda_1 D_{E_1} + \lambda_2 D_{Q_1} \qquad D_{pb} = \lambda_3 D_{E_2} + \lambda_4 D_{Q_2} \tag{9}$$

在 x 方向的一个波长 L 内, 令 $\langle(\ )\rangle \equiv \int_{-1}^{1} dy \int_0^L (\ )\, dx$, 则

$$Q = \langle G^2(y)\, |\nabla^2\psi|^2 \rangle / 2 \qquad E_1 = \langle |\nabla\psi|^2 \rangle / 2 \qquad Q_1 = \langle |\nabla^2\psi|^2 \rangle / 2 \tag{10}$$

$$E_2 = \langle (\nabla(\nabla^2\psi))^2 \rangle / 2 \qquad Q_2 = \langle (\nabla^4\psi)^2 \rangle / 2 \tag{11}$$

$$A_1 = \langle \{(d/dy)[G^2(\beta - \bar{u}'')]\}(\partial\psi/\partial x)(\partial\psi/\partial y) \rangle \tag{12}$$

$$B_1 = \langle \bar{u}'(\partial\psi/\partial x)(\partial\psi/\partial y) \rangle \qquad C_1 = -\langle \bar{u}'''(\partial\psi/\partial x)(\partial\psi/\partial y) \rangle \tag{13}$$

$$G_1 = -\langle \nabla(\nabla^2\psi) \cdot \nabla[\bar{u}(\partial\nabla^2\psi/\partial x)] \rangle - \langle \nabla(\nabla^2\psi) \cdot \nabla[(\beta - \bar{u}'')(\partial\psi/\partial x)] \rangle \tag{14}$$

$$F_1 = -\langle \nabla^4\psi\, \nabla^2[u(\partial\nabla^2\psi/\partial x)] \rangle - \langle \nabla^4\psi\, \nabla^2[(\beta - u'')(\partial\psi/\partial x)] \rangle \tag{15}$$

$$A_2 = \left\langle \left(\mathrm{d}G^2/\mathrm{d}y\right)\left(\partial\psi/\partial x\right)\left(\nabla^2\psi\right)^2\right\rangle/2 \tag{16}$$

$$G_2 = \left\langle \nabla^4\psi\, J(\psi, \nabla^2\psi)\right\rangle \tag{17}$$

$$F_2 = -\left\langle \nabla^4\psi\, \nabla^2 J(\psi, \nabla^2\psi)\right\rangle \tag{18}$$

$$D_Q = 2Q \qquad D_{E_1} = 2E_1 \qquad D_{Q_1} = 2Q_1 \tag{19}$$

$$D_{E_2} = 2E_2 \qquad D_{Q_2} = 2Q_2 \tag{20}$$

其中 $G(y)$ 是任意一个已知的连续函数; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 是任意的正常数。从式(3)可得, Q, E_1, Q_1, E_2, Q_2 分别为时间函数的方程, 将这些方程分别乘以 $\lambda_i (i = 1, \cdots, 4)$ 后相加得式(4)。式中 P_1 和 P_2 分别是与式(3)中的线性项和非线性项对应的广义能量产生项; D_p 是广义能量耗散项。

广义能量 E 中的 Q 是广义位涡拟能, 它含有一个任意的以 y 为自变量的已知函数 $G(y)$。显然非线性项所产生的广义能量 P_2 是由于 Q, E_2 和 Q_2 所引起的, 而通常的能量 E_1 和位涡拟能 Q_1 却没有这样的作用。陆维松和 Hanrotay 曾经选取的广义能量($E_1 + \lambda Q_1$)在本文中是 E 的一个特例, 它可通过令 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 且忽略 Q 或令 $G = \lambda_2^{\frac{1}{2}}$ 而得到。

3　一种新的非线性正压稳定性判据

设

$$r_1^* = \max(P_{1a}/D_{pa}) \tag{21}$$

$$r_2^* = \max(P_{1b}/D_{pb}) \tag{22}$$

把式(21)和式(22)代入式(4)得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq -\left[(r - r_1^*)D_{pa} + (r - r_2^*)D_{pb}\right] + P_2 \tag{23}$$

当 $r_2^* \geq r_1^*$ 时, 令

$$D = D_{pa} + \left[\left(r - r_2^*\right) / \left(r - r_1^*\right)\right] D_{pb} \tag{24}$$

并设

$$P_2 \leq \alpha D E^{1/2} \tag{25}$$

由式(24)和(25)可将式(23)转换为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq -\left[\left(r - r_1^*\right) - \alpha E^{1/2}\right] D \tag{26}$$

在式(21), (22)和(25)中, r_1^*, r_2^* 和 α 均是需要确定的正常数。设

$$r > r^* \qquad r^* = \max\left(r_1^*, r_2^*\right) \tag{27}$$

且

$$E(0) < \left(r - r_1^*\right)^2 / \alpha^2 \tag{28}$$

那么在 $t = 0$ 附近, 则有 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t < 0$。因此类似地对于任意的时间 t 则有

$$E(t) < E(0) \tag{29}$$

从式(24), (5), (6), (9), (19)和(20)可见

$$D \leq D_p = 2E \tag{30}$$

将式(29), (30)代入式(26), 积分得

$$E(t) \leq E(0)\exp\left\{-2\left[\left(r - r_1^*\right) - \alpha E^{1/2}(0)\right] t\right\} \tag{31}$$

当 $t\to\infty$ 时，$E(t)\to 0$，因此式(27)和(28)是非线性正压稳定性的充分条件。$E(t)$ 随时间的衰减率主要取决于 $E^{1/2}(0)$ 是如何趋近于 $\left(r-r_1^*\right)\backslash\alpha$ 的，但是 $\left(r-r_1^*\right)\backslash\alpha$ 又取决于 $\left(r-r_1^*\right)$ 和 α 的取值。当 $t\to\infty$ 时，能量 E_1 和位涡拟能 Q_1 分别趋近于 0。当 $r_2^*<r_1^*$ 时，所得的结果与上面相类似。

以下分别介绍 r_1^*，r_2^* 和 α 的求解方法。

3.1　求解 r_1^*

为了确定 r_1^*，需要把式(21)转换成一个变分问题。令 $1\backslash\mu_1 = P_{1a}\backslash D_{pa}$，则

$$\delta(D_{pa} - \mu_1 P_{1a}) = 0 \tag{32}$$

式中，δ 是变分算符，μ_1 是 Lagrange 乘子。利用式(7)，(9)，(12)，(13)和(19)，与式(32)相应的Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned}&[\nabla^2(G^2\nabla^2\psi) - \lambda_1\nabla^2\psi + \lambda_2\nabla^4\psi] +\\ &(\mu_1/2)[W''(y)(\partial\psi/\partial x) + 2W'(y)(\partial^2\psi/\partial x\partial y)] = 0\end{aligned} \tag{33}$$

其中

$$W(y) = (\beta - \bar{u}'')G^2 + \lambda_1\bar{u} - \lambda_2\bar{u}'' \tag{34}$$

当式(33)是线性化方程时，可以按标准波型法求解，令

$$\psi = \phi(y)\exp[i(kx - \sigma t)] \tag{35}$$

式中，k 和 σ 分别是 x 方向的波数和频率。将式(35)代入式(33)得

$$\begin{aligned}&(D^2/Dy^2)[G^2(D^2\phi/Dy^2)] - \lambda_1(D^2\phi/Dy^2) +\\ &\lambda_2(D^4\phi/Dy^4) + (ik\mu_1/2)[W''\phi + 2W'\phi'] = 0\end{aligned} \tag{36}$$

其中，$D^n/Dy^n = (d^2/dy^2 - k^2)^{n/2}$，$(n=2,4,6,8)$，撇号表示对 y 的导数。借助变换

$$\phi = \exp[ik\mu_1 W/2\xi]\hat{\phi} \qquad \xi = \lambda_1 + 2k^2\lambda_2 \tag{37}$$

进行如下运算 ≪ $[\hat{\phi}^*$ (36)] ≫，这里 ≪ ( ) ≫ $\equiv \int_{-1}^{1}(\ )\mathrm{d}y$，$\phi^*$ 是 ϕ 的复共轭，积分得

$$\begin{aligned}&(M_2^2 + 2k^2M_1^2 + k^4M_0^2) - k^2 \ll (G^2)''|\hat{\phi}|^2 \gg + \lambda_1k^2I_0^2 +\\ &\lambda_2(I_2^2 + k^4I_0^2) + \xi J_1^2 - (k^2\mu_1^2/4\xi) \ll (W')^2|\hat{\phi}|^2 \gg = 0\end{aligned} \tag{38}$$

则有

$$\begin{aligned}1/\mu_1^2 = (k^2/4\xi)(W')_c^2I_0^2/\{&(M_2^2 + 2k^2M_1^2 + k^4M_0^2) +\\ &\lambda_1k^2I_0^2 + \lambda_2(I_2^2 + k^4I_0^2) + \xi J_1^2 - k^2(G^2)_c''I_0^2\}\end{aligned} \tag{39}$$

式中 $(W')_c$，$(G^2)_c''$ 是积分中值，且

$M_n^2 = \ll G^2|\mathrm{d}^n\phi/\mathrm{d}y^n|^2 \gg$，$I_n^2 = \ll |\mathrm{d}^n\phi/\mathrm{d}y^n|^2 \gg$，$J_n^2 = \ll |\mathrm{d}^n\hat{\phi}/\mathrm{d}y^n|^2 \gg$，$(n = 0, 1, 2)$。

由于 G 是任意的连续函数，那么如果 G^2 有最大值，则有 $(G^2)''<0$。例如

(1)　$G^2 = G_0^2(1-y^2)$；(2)　$G^2 = \cos(\pi y/2)$，$(-1\le y\le 1)$。那么式(39)可以写为

$$\frac{1}{\mu_1} \le \frac{(k/2\sqrt{\xi})AI_0}{[\xi J_1^2 + \lambda_1k^2I_0^2 + \lambda_2(I_2^2 + k^4I_0^2) + (M_2^2 + 2k^2M_1^2 + k^4M_2^2)]^{1/2}} \tag{40}$$

其中

$$A = |[(\beta - \bar{u}'')G^2]'|_{max} + \lambda_1|\bar{u}'|_{max} + \lambda_2|\bar{u}'''|_{max} \tag{41}$$

利用如下不等式

$$I_2^2 \ge \lambda_0^2I_0^2 \qquad I_1^2 \ge \pi^2I_0^2/4 \qquad I_2^2 \ge \pi^2I_1^2 \qquad \lambda_0^2 \approx 2.3650^4 \tag{42}$$

$$J_1^2 \ge \pi^2J_0^2/4 \qquad J_0^2 = I_0^2 \qquad M_n^2 \ge (G^2)_{min}I_n^2 \qquad (n = 0, 1, 2) \tag{43}$$

式(40) 可以化为

$$1/\mu_1 \le r_1^*$$

$$r_1^* = \frac{kA/2\quad\overline{\xi}}{[\pi^2\xi/4 + \lambda_1 k^2 + \lambda_2(\lambda_0^2 + k^4) + (G^2)_{\max}(\lambda_0^2 + \pi^2 k^2/2 + k^4)]^{1/2}} \tag{44}$$

3.2　求解 r_2^*

为了确定 r_2^*, 式(22) 也需要转换成一个变分问题, 令 $1/\mu_2 = P_{1b}/D_{pb}$, 则有

$$\delta(D_{pb} - \mu_2 P_{1b}) = 0 \tag{45}$$

利用式(7), (9), (14) 和(15), 与之相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$(\lambda_4\nabla^8\psi - \lambda_3\nabla^6\psi) + (\mu_2/2)\{\lambda_3\partial/\partial x[\nabla^2(\overline{u}\nabla^4\psi) - \nabla^4(\overline{u}\nabla^2\psi) + F\nabla^4\psi - \nabla^4(F\psi)] + \lambda_4\partial/\partial x[-\nabla^2(\overline{u}\nabla^6\psi) + \nabla^6(\overline{u}\nabla^2\psi) - F\nabla^6\psi + \nabla^6(F\psi)]\} = 0 \tag{46}$$

这里 $F = \beta - \overline{u}''$。

将式(35) 代入式(46) 得

$$\begin{aligned}&[\lambda_4 D^8\phi/Dy^8 - \lambda_3 D^6\phi/Dy^6] + (ik\mu_2/2)\{\lambda_3[D^2/Dy^2(\overline{u}D^4\phi/Dy^4) -\\ &D^4/Dy^4(\overline{u}D^2\phi/Dy^2) + FD^4\phi/Dy^4 - D^4/Dy^4(F\phi)] +\\ &\lambda_4[-D^2/Dy^2(\overline{u}D^6\phi/Dy^6) + D^6/Dy^6(\overline{u}D^2\phi/Dy^2) -\\ &FD^6\phi/Dy^6] + D^6/Dy^6(F\phi)\} = 0\end{aligned} \tag{47}$$

再作如下运算 $\ll[\phi^* \cdot (47)]\gg$, 式(47) 转换成

$$(\lambda_4 B_1 + \lambda_3 B_2) + (ik\mu_2/2)(\lambda_3 \ll A_1\ \phi^* \gg + \lambda_4 \ll A_2\ \phi^* \gg) = 0 \tag{48}$$

其中

$$B_1 = I_4^2 + 4k^2 I_3^2 + 6k^4 I_2^2 + 4k^6 I_1^2 + k^8 I_0^2 \tag{49}$$

$$B_2 = I_3^2 + 3k^2 I_2^2 + 3k^4 I_1^2 + k^6 I_0^2 \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\ll \phi^*\ A_1 \gg = \ll &\overline{u}'(\phi^{*\prime\prime\prime}\phi'' - \phi^{*\prime\prime}\phi''') + 2(k^2\overline{u}' + \overline{u}''')(\phi^{*\prime\prime}\phi' - \phi^{*\prime}\phi'') +\\ &(k^4\overline{u}' + k^2\overline{u}''' - \overline{u}^{(5)})(\phi^{*\prime}\phi - \phi^*\phi') \gg\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\ll \phi^*\ A_2 \gg = \ll &2\overline{u}'(\phi^{*\prime\prime\prime\prime}\phi''' - \phi^{*\prime\prime\prime}\phi'''') + (6k^2\overline{u}' + 2\overline{u}''')(\phi^{*\prime\prime\prime}\phi'' - \phi^{*\prime\prime}\phi''') +\\ &(6k^4\overline{u}' + 2k\overline{u}''' - 4\overline{u}^{(5)})(\phi^{*\prime\prime}\phi' - \phi^{*\prime}\phi'') +\\ &(\overline{u}^{(7)} - 2k^2\overline{u}^{(5)} + 2k^6\overline{u}')(\phi^{*\prime}\phi - \phi^*\phi') \gg\end{aligned} \tag{52}$$

其中 $\overline{u}^{(n)} = d^n\overline{u}/dy^n$。注意到

$$\begin{aligned}\ll I_m(\overline{u}^{(n)}\phi^{*(l)}\phi^{(j)}) \gg &= -(i/2) \ll \overline{u}^{(n)}\left(\phi^{*(l)}\phi^{(j)} - \phi^{*(j)}\phi^{(l)}\right) \gg\\ &\le |\overline{u}^{(n)}|_{\max} I_l I_j\end{aligned} \tag{53}$$

可将式(48) 推导为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_2} &= \frac{k(e_1 I_4 I_3 + e_2 I_3 I_2 + e_3 I_2 I_1 + e_4 I_1 I_0)}{\lambda_4 I_4^2 + a_2 I_3^2 + a_3 I_2^2 + a_4 I_1^2 + a_5 I_0^2}\\ &\le k\left[\frac{e_1 I_4 I_3}{\lambda_4 I_4^2 + a_2 I_3^2} + \frac{e_2 I_3 I_2}{\lambda_4 I_4^2 + a_2 I_3^2 + a_3 I_2^2} +\right.\\ &\left.\frac{e_3 I_2 I_1}{\lambda_4 I_4^2 + a_2 I_3^2 + a_3 I_2^2 + a_4 I_1^2} + \frac{e_4 I_1 I_0}{\lambda_4 I_4^2 + a_2 I_3^2 + a_3 I_2^2 + a_4 I_1^2 + a_5 I_0^2}\right]\end{aligned} \tag{54}$$

其中

$$\begin{cases} a_2 = 4k^2\lambda_4 + \lambda_3 & a_3 = 6k^4\lambda_4 + 3k^2\lambda_3 \\ a_4 = 4k^6\lambda_4 + 3k^4\lambda_3 & a_5 = k^8\lambda_4 + k^6\lambda_3 \end{cases} \tag{55}$$

$$e_1 = 2\lambda_4 \left|\bar{u}'\right|_{\max} \qquad e_2 = \left|\lambda_3\bar{u}' + \lambda_4(6k^2\bar{u}' + 2\bar{u}''')\right|_{\max} \tag{56}$$

$$e_3 = \left|2\lambda_3(k^2\bar{u}' + \bar{u}''') + \lambda_4(6k^4\bar{u}' + 2k^2\bar{u}''' - 4\bar{u}^{(5)})\right|_{\max} \tag{57}$$

$$e_4 = \left|\lambda_3(k^4\bar{u}' + k^2\bar{u}''' - \bar{u}^{(5)}) + \lambda_4(\bar{u}^{(7)} - 2k^2\bar{u}^{(5)} + 2k^6\bar{u}')\right|_{\max} \tag{58}$$

利用关系式 $ab/(a^2+b^2) \le 1/2$, 式(54)可以写为

$$1/\mu_2 \le r_2^*$$

$$r_2^* = \frac{k}{2}\left\{\frac{e_1}{(\lambda_4 a_2)^{1/2}} + \frac{e_2}{[a_2(\lambda_4\lambda_0^2 + a_3)]^{1/2}} + \frac{e_3}{[(\lambda_4\lambda_0^2 + a_3)(\lambda_0^2 a_2 + a_4)]^{1/2}} + \frac{e_4}{[(\lambda_0^4\lambda_4 + \lambda_0^2 a_2 + a_5)(\lambda_0^2 a_2 + a_4)]^{1/2}}\right\} \tag{59}$$

3.3 求解 α

由式(8),(16),(17)和(18)得

$$\begin{aligned} P_2 &= A_2 + \lambda_3 G_2 + \lambda_4 F_2 \\ &= \frac{1}{2}\left\langle (G^2)'\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)^2\right\rangle + \lambda_3\left\langle \nabla^4\psi\, J(\psi,\nabla^2\psi)\right\rangle - \\ &\quad \lambda_4\left\langle \nabla^4\psi\, J(\psi,\nabla^2\psi)\right\rangle \end{aligned} \tag{60}$$

注意

$$\nabla^2 J(\psi,\nabla^2\psi) = J(\psi,\nabla^4\psi) + 2\left\{J\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}\right) + J\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}\right)\right\} \tag{61}$$

$$J(A,B) = (\boldsymbol{k}\times\nabla A)\cdot\nabla B \le |\nabla A|\,|\nabla B| \tag{62}$$

将式(61)和(62)代入式(60)得

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2}\left\langle (G^2)'\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi)^2\right\rangle + \lambda_3\left\langle \nabla^4\psi\, J(\psi,\nabla^2\psi)\right\rangle + \\ &\quad \lambda_4\left\langle \nabla^4\psi\left\{J(\psi,\nabla^4\psi) + 2\left[J\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}\right) + J\left(\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}\right)\right]\right\}\right\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\left|(G^2)'\right|_{\max}\left\langle\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|(\nabla^2\psi)^2\right\rangle + \lambda_3\left\langle|\nabla^4\psi|\,|\nabla\psi|\,|\nabla(\nabla^2\psi)|\right\rangle + \\ &\quad 2\lambda_4\left\langle|\nabla^4\psi|\left(\left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial y}\right|\right)\right\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\left|(G^2)'\right|_{\max}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\max}\|\nabla^2\psi\|^2 + \lambda_3|\nabla\psi|_{\max}\|\nabla^4\psi\|\,\|\nabla(\nabla^2\psi)\| + \\ &\quad 2\lambda_4\|\nabla^4\psi\|\left[\left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right|_{\max}\left\|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial x}\right\| + \left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right|_{\max}\left\|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial y}\right\|\right] \\ &= \left|(G^2)'\right|_{\max}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\max}Q_1 + 2\lambda_3|\nabla\psi|_{\max}(Q_2E_2)^{1/2} + \\ &\quad 2\sqrt{2}\lambda_4 Q_2^{\frac{1}{2}}\left[\left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right|_{\max}\left\|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial x}\right\| + \left|\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right|_{\max}\left\|\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial y}\right\|\right] \end{aligned} \tag{63}$$

式中已用了如下等式

$$\|(\ )\| \equiv \langle(\ )^2\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad \langle B\, J(A,B)\rangle = \langle J(A,B^2/2)\rangle = 0 \tag{64}$$

利用 Sobolev 嵌套原理中的 Lemma 不等式[7], 即

$$\Phi \leq \sup \Phi \leq n \nabla^2\Phi \tag{65}$$

Galdi 和 Straughan[8] 曾就三维情况计算了嵌套常数 n。由于本文的边界条件与他们计算时所取的边界条件不同, 而且本文研究的是二维问题, 因此可根据本文的边界条件以及方程维数减少的条件, 即设 Φ 与 z 无关, 作类似计算得

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/4}\pi^{1/2}(\sqrt{2}-1)^{1/2}(\pi^2/4+k^2)} + 2^{5/2}\frac{5(1+\pi^2/4+k^2)}{3} \tag{66}$$

n 与 Galdi 和 Straughan 所计算的相应常数 C 并不完全相同。由于通道的纬向长度总比经向长度要长, 因此本文已将常数 C 中的 h 取为 1, 对应 $L > 2$。注意到

$$Q_1 \leq \beta_1^2 Q_2 \qquad Q_1 \leq \beta_2^2 E_2 \qquad \lambda_4 Q_2 \leq E \tag{67}$$

将式(65) 代入式(63), 并利用式(5), (10), (11) 和(20), 推出

$$\begin{aligned} P_2 \leq\ & n\left[|(G^2)'|_{\max} \frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial x} Q_1 + 2\lambda_3 \| \nabla(\nabla^2\psi) \| (Q_2E_2)^{1/2}\right] + \\ & 2\sqrt{2}\,n\lambda_4 Q_2^{1/2}\left[\frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial x}^2 + \frac{\partial\nabla(\nabla^2\psi)}{\partial y}^2 \right] \\ \leq\ & \sqrt{2}\,n\left[|(G^2)'|_{\max} Q_1E_2^{1/2} + 2\lambda_3 Q_2^{1/2}E_2 + 4\lambda_4 Q_2^{3/2}\right] \\ \leq\ & \sqrt{2}\,nQ_2^{1/2}\left\{ \beta_1 |(G^2)'|_{\max}(E_2Q_1)^{1/2} + 2\lambda_3 E_2 + 4\lambda_4 Q_2 \right\} \\ \leq\ & \sqrt{2/\lambda_4}\,nE^{1/2}\left[n_1\lambda_3 D_{E_2} + 2\lambda_4 D_{Q_2}\right] E^{1/2} \\ \leq\ & \sqrt{2/\lambda_4}\,nn_0 D_{\mathrm{pb}} E^{1/2} \end{aligned} \tag{68}$$

其中

$$n_0 = \max(n_1, 2) \qquad n_1 = 1 + \frac{1}{2\lambda_3}\beta_1\beta_2 |(G^2)'|_{\max} \tag{69}$$

$$\beta_1^2 = \frac{1}{\lambda_0^2 + k^2\pi^2/2 + k^4} \qquad \beta_2^2 = \frac{1}{\pi^2/4 + k^2} \tag{70}$$

由式(24) 可知 $D_{\mathrm{pb}} \leq \frac{D(r - r_1^*)}{r - r_2^*}$, 则式(68) 可改写为

$$P_2 \leq \alpha D E^{1/2} \tag{71}$$

式中

$$\alpha = \frac{\sqrt{2/\lambda_4}\,n_0 n(r - r_1^*)}{r - r_2^*} \tag{72}$$

将式(72) 代入式(28) 得

$$E(0) < \frac{\lambda_4(r - r_2^*)^2}{2n^2 n_0^2} = E_c(0) \tag{73}$$

那么式(73) 和式(27), 即

$$r > r^* \qquad r^* = \max(r_1^*, r_2^*) \tag{74}$$

同时成立是非线性正压稳定性的充分条件, 相反, 式(73) 或(74) 有一不成立则是非线性正压不稳定的必要条件。特别是当线性稳定的扰动不满足式(73) 却满足式(74) 时, 亚临界不稳定就可能发生。

3.4 讨论 λ_3,λ_4

(1) 由式(47)可知,λ_3 和 λ_4 可以合并成一个参数,或使 $\lambda_4=1$ 而 λ_3 是个变数。

(2) 式(59)中对 r_2^* 的数值计算结果表明,r_2^* 与 λ_3 成反比,而与 λ_4 成正比。当 $\lambda_3\to\infty$ 或 $\lambda_4\to 0$ 时,r_2^* 有一个最优临界值。

(3) 式(73)中令 $\lambda_4\to\infty$和式(69)中令 $\lambda_3\to\infty$,则 $n_1\to 1$ 且 $n_0=2$,它们分别都是 $E_c(0)$ 的最优临界值。

总结以上3个方面,可以选取

$$\lambda_3\to\infty \text{ 且 } \lambda_4=1 \tag{75}$$

3.5 讨论 λ_1,λ_2

(1) 当式(44)中令 $G=0,\lambda_1=1$ 且 $\lambda_2=\lambda$ 时,所得结果与陆维松[4]的计算结果一致。

(2) 由式(44)可见,当 $G\neq$且 $\lambda_1=1$ 时,可推出

$$\frac{\partial r_1^*}{\partial\lambda_2}=\frac{k(\lambda_2 g_2-g_1)}{4g_3^{3/2}} \tag{76}$$

和

$$\left.\frac{\partial^2 r_1^*}{\partial\lambda_2^2}\right|_{\lambda_2=\lambda_{2c}}=\frac{kg_2}{4g_3^{3/2}} \tag{77}$$

这里当 $\lambda_2=\lambda_{2c}=g_1(k^2)\backslash g_2(k^2)$ 时,有 $\partial r_1^*/\partial\lambda_2=0$

其中

$$g_1=b_0b_2-2a_3b_3,\quad g_2=a_3b_2-2b_1b_0,\quad g_3=b_1\lambda_2^2+b_2\lambda_2+b_3 \tag{78}$$

$$b_0=a_6+\lambda_1a_1,\qquad b_1=2k^2(\lambda_0^2+\pi^2k^2/2+k^4) \tag{79}$$

$$b_2=\lambda_1(\lambda_0^2+k^2\pi^2+3k^4)+(G^2)_{\min}\ 2k^2(\lambda_0^2+k^2\pi^2/2+k^4) \tag{80}$$

$$b_3=\lambda_1^2(\pi^2/4+k^2)+\lambda_1(G^2)_{\min}(\lambda_0^2+\pi^2k^2/2+k^4) \tag{81}$$

由于 $b_i\geq 0,\lambda_1,\lambda_2>0$,则

①当 $g_1>0$ 且 $g_2>0$ 时,有 $\partial^2r_1^*/\partial\lambda_2^2>0$,则当 $\lambda_2=\lambda_{2c}$时,r_1^* 有最小值 $r_1^*(\lambda_{2c})$。

②当 $g_1<0$ 且 $g_2>0$ 时,有 $\lambda_{2c}<0$,$\partial r_1^*/\partial\lambda_2>0$,则当 $\lambda_2\to 0$ 时,r_1^* 有最小值 $r_1^*\ {}_{\lambda_2\to 0}$。

③当 $g_1>0$ 且 $g_2<0$ 时,有 $\lambda_{2c}<0$,$\partial r_1^*/\partial\lambda_2<0$,则当 $\lambda_2\to\infty$时,r_1^* 有最小值 $r_1^*\ {}_{\lambda_2\to\infty}$。

④当 $g_1<0$ 且 $g_2<0$ 时,有 $\partial^2r_1^*/\partial\lambda_2^2<0$,则当 $\lambda_2=\lambda_{2c}$时,r_1^* 有最小值 $r_1^*(\lambda_{2c})$。

因此,最优判据的临界值为

$$r_1^*=(r_1^*)_{\min} \tag{82}$$

根据 k^2 的三次代数方程 $g_1(k^2)=0$ 和 $g_2(k^2)=0$,可求得 k^2 的正实根为临界波数,使之对于某些波长的波 g_1 和 g_2 的正负一定,从而确定式(82)中的$(r_1^*)_{\min}$。

3.6 几种基流的计算结果

在实际大气中通常选取3种基流

$$(1)\ \overline{u_1}=\tan h(y);\ (2)\ \overline{u_2}=\sec h^2(y);\ (3)\ \overline{u_3}=\cos^2(\pi y/2) \tag{83}$$

其中$-1\leq y\leq 1$。令 $\lambda_1=\lambda_4=1,\lambda_2=2,\lambda_3=10^8$,$G^2=0.1\cos(\pi y/2)$,利用式(44),(59),(73)

和(74) 并假设 $E_c = E_c(0)/(r - r_1^*)^2$, 这样列出表 1。表中的 $r^*(\overline{u_1})$, $r^*(\overline{u_2})$ 和 $r^*(\overline{u_3})$ 分别与上面 3 种基流相对应。

表 1　3 种基流的 r^* 和 $E_c(0)$　　$E_c(0)$: (10^{-4})

k	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	20.0
$r^*(\overline{u_1})$	0.000	0.619	0.540	0.540	0.558	0.614	0.675	0.772	0.862	0.887	0.897	0.909
$r^*(\overline{u_2})$	0.000	1.008	0.967	0.829	0.627	0.439	0.334	0.282	0.305	0.322	0.332	0.346
$r^*(\overline{u_3})$	0.000	3.445	3.286	2.791	2.067	1.394	0.879	0.652	1.117	1.265	1.329	1.409
$E_c(0)$	0.567	0.495	0.346	0.213	0.125	0.074	0.045	0.019	0.005	0.002	0.001	0.000

3.7　稳定性判据的物理解释

由式(44) 和式(54) 可见, 当 $k \to 0$ 和 $k \to \infty$ 时都有 $r_1^* \to 0$, $r_2^* \to 0$。若初始扰动满足式(73), 那么对于很长和很短的波, 基流都是稳定的, 只有既不太长也不太短的波长的波, 才可能出现非线性正压不稳定。由表 1 可知, 对这 3 种基流来说, 只有波数在 $0 < k_c < 1.0$ 之间所有最大值 r^* 对应波长的波才可能发生不稳定, 对应最不稳定波长 L_c。由于 $L_c = 2\pi L_0/k_c$, 所以最不稳定波长满足 $2\pi L_0 < L_c < \infty$, 一般 $L_0 \approx 1000$ km。因此, 最不稳定波长都是很长的。这与气候变化中行星波的不稳定增长相当一致。

值得注意的是, 非线性正压稳定的波不仅要满足式(74) 而且要满足式(73)。通常有 $r \sim O(1)$, 根据表 1 就有 $r_2^* \sim r^* \sim O(1)$, 那么有 $(r - r_2^*)^2 \sim O(1)$ 且 $E_c(0) \sim E_c(0)$。从表 1 和式(73) 可见, 若初始扰动能量 $E(0) \leq 0.57 \times 10^{-4}$, 则基流可能是稳定的, 但若 $E(0) > 0.57 \times 10^{-4}$, 那么即使式(74) 仍然成立, 也可能发生亚临界不稳定。在实际大气中, 初始扰动能量并不常常满足 $E(0) \leq 0.57 \times 10^{-4}$, 因此对于振幅比较大的行星波, 非线性不稳定增长会时常存在。在非线性正压稳定性的判据中, 式(73) 强烈制约着式(74)。Burns[9], Niion[10] 曾利用弱非线性方法且仅考虑了一种特定基流的效应研究了非线性正压不稳定, 但是他们都没有考虑初始振幅对稳定性的影响。本文提出了初始振幅对非线性正压稳定性的影响问题, 即式(73)。

4　结　语

文中提出了一种新广义能量作为 Lyapunov 函数。从含 Ekman 摩擦的非线性准地转正压涡度方程出发, 当初始扰动广义能量小于一个特定临界值时, 就得到了一种新的非线性正压稳定性的充分条件。这种稳定性条件受初扰动广义能量的制约, 这样也就受初始扰动振幅的制约, 实际上则反映了方程中非线性项所起的重要作用。文中提出的非线正压稳定性判据对于研究地球物理流体力学中的亚临界不稳定具有重要的价值。因此, 它比先前的同类研究有了较好的改善并有可能推广到斜压流体的情况。

参考文献

1 Simmons A J, Wallace J M, Branstator G W. Barotropic wave propagation and instability and atmospheric teleconnection patterns. J Atmos Sic, 1983, 40: 1363～1392
2 Hanroty P. Nonlinear baroclinic instability: An approach hased on Serrins's energy method. J Atmos Sci, 1983, 40: 762～768
3 Joseph D D. Eigenvalue bounds for Orr-Sommerfeld equation, Part 2. J Fluid Mech, 1969, 36, part 4: 721～734
4 Lu Weisong. Frictional dissipation and nonlinear barotropic instability. Science in China(B), 1990, 33: 716～725
5 Lee S, Held I M. Sudcritical instability and hysteresis in a two-layer model, J Atmos Sci, 1991, 48: 1071～1077
6 Yong W R. Selective decay of enstrophy and the excitation of barotropic waves in a channel. J Atmos Sci, 1987, 44: 2804～2812
7 Adams R A. Sobolve Spaces. New York: Academic Press, 1975, 326pp
8 Galdi G P, Straughan B, A nonlinear analysis of the stabilizing effect of rotation in the Benard problem. Proc R Soc Lond, 1985, A402: 257～283
9 Burns A G. Maslowe S A. Finite amplitude stability of a zonal shear flow. J Atmos Sic, 1983, 40: 3～9
10 Niino H. A weakly non-linear theory of barotropic instability. J Meteor Soc Japan, 1982, 60: 1001～1023

A NEW CRITERION OF NONLINEAR BAROTROPIC STABILITY INCLUDING EKMAN FRICTION

Lu Weisong

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing* 210044)

Abstract

A new generalized energy is proposed to act as Lyapunov function and thus a new criterion of nonlinear barotropic stability containing two inequalities is obtained. One of the inequalities is that the initial disturbance amplitude is less than a critical value, and the other is that the frictional coefficient is more than another critical value. The former adds a strong restriction to the latter, a usual nonlinear stability criterion, thus denoting that the subcritical instability easily occurs for a finite-amplitude disturbance in the real atmosphere. The new criterion has greath improved the previous results.

Key words: Subcritical instability, Nonlinear criterion, Generalized energy.

附　录

以下证明式(67):

式(67) 可以转换成求解函数 $F(\Psi) = Q_1/Q_2 = 1/\mu^2$ 的最大值问题, 即

$$\delta\left(\|\nabla^4\Psi\|^2 - \mu^2\|\nabla^2\Psi\|^2\right) = 0 \tag{A1}$$

相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\nabla^4\Psi - \mu^2\Psi = 0 \tag{A2}$$

将式(35) 代入式(A2) 得

$$(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}y^2 - k^2)^2\Phi - \mu^2\Phi = 0 \tag{A3}$$

进行如下运算 $\int_{-1}^{1}\Phi^*$ (A3) dy, 积分得

$$1/\mu^2 = \frac{I_0^2}{I_2^2 + 2k^2 I_1^2 + k^4 I_0^2} \leq \frac{1}{\lambda_0^2 + \pi^2 k^2/2 + k^4} = \beta_1^2 \tag{A4}$$

则有

$$Q_1 \leq \beta_1^2 Q_2 \tag{A5}$$

类似地有

$$Q_1 \leq \beta_2^2 E_2 \tag{A5}$$