

W-3 参数方程组的数值解法*

胡文忠

蔡志波

(内蒙古大学物理系, 呼和浩特, 010021) (内蒙古电力学校, 呼和浩特, 010010)

斑士欣

(内蒙古自治区经济贸易委员会, 呼和浩特, 010020)

摘 要

从 W-3 风频模型的期望值及其拟合误差出发, 分别用矩法和极值法导出关于 Weibull 参数的两组方程。结合实测风况资料用数值法求解, 获得相应的 W-3 风频参数, 通过几个气象台站的实测资料计算、比较, 证明这两种方法给出的参数其拟合精度均高于 W-2 模型给出的结果。

关键词: W-3 分布函数, 参数估算方法, 参数方程组。

1 引 言

在文献[1]中用若干个风频模型分别去拟合几个不同风场的风频分布规律, 比较拟合精度, 发现 W-3 分布函数优于其它模型, 这个结论已得到广泛认可。但在实际工作中使用 W-2 模型的次数多于使用 W-3 模型的次数, 究其原因除 W-3 模型的函数结构稍复杂之外, 主要是由于 W-3 模型的参数估算方法比较少, 且由文献[1]提供的极大似然法在得到极大似然方程组后, 要用 Mullar 抛物线法解方程, 解法复杂, 不便使用。

一般而言, 对于每个风频模型, 由于考虑问题的角度不同以及对于拟合误差的具体要求不同, 会有不同的参数估算方法^[2,3], 而对不同的参数估算方法, 自然拟合状况、拟合误差也就各不相同。

基于上述情况, 在研究 W-3 风频模型期望值的基础上, 采用不同的方式给出两个估算风频参数的方程组, 然后用数值计算近似求解, 获得风频参数。

2 理论准备

Weibull 三参数分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} ab^{\frac{c}{a}} v^{c-1} e^{-bv^a} / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 初稿时间: 1996年7月24日; 修改稿时间: 1998年3月9日。

其中 v 是风速, b 是尺度参数, $b^{-\frac{1}{a}}$ 的量纲与速度的量纲相同, a, c 是形状参数, 无量纲, $\Gamma(x)$ 是伽玛函数。

2.1 v^m 的期望值即风速 v 的 m 次矩记做 E_m

$$\begin{aligned} E_m &= E\{v^m\} = \int_0^\infty v^m f(v) dv \\ &= \int_0^\infty v^m ab^{\frac{c}{a}} v^{c-1} e^{-bv^a} dv / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

令 $bv^a = t$, 则有

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^\infty b^{-\frac{m}{a}} t^{\frac{c+m}{a}-1} e^{-t} dt / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) \\ &= b^{-\frac{m}{a}} \Gamma\left(\frac{c+m}{a}\right) / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 实测风速 v_i 的 m 次矩统计量为

$$R_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s f_i v_i^m \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (3)$$

其中 f_i 是风速 v_i 出现的频率(次数), n 是总观测次数, v_s 是观察到的最大风速值。

2.3 用 δ_m 记风速的 m 次矩理论计算与实测统计值之间的相对误差

$$\delta_m = (E_m - R_m) / R_m \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4)$$

$$\lambda = \left[\frac{1}{3} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

因风速的一次矩、二次矩、三次矩分别刻画了平均风速、标准差及平均风功率密度, 所以从应用的角度考虑, 用 λ 值的大小可以判断理论与实测风频分布规律之间拟合的总体效果。

3 参数方程组

由式(2)分别导出两个参数方程组。

3.1 在式(2)中分别令 $m = \frac{a}{2}, a, \frac{3}{2}a, 2a$, 即可得到

$$\begin{cases} E_{\frac{a}{2}} = b^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) \\ E_a = \frac{c}{ab} \\ E_{\frac{3}{2}a} = b^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{c}{a} + \frac{3}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{c}{a}\right) \\ E_{2a} = \frac{c}{ab^2} \left(1 + \frac{c}{a}\right) \end{cases} \quad (6)$$

在式(6)中利用伽玛函数的性质,把第一式和第三式合并成一个式子

$$E_{\frac{3}{2}a}/E_{\frac{1}{2}a} = \frac{1}{b} \left[\frac{c}{a} + \frac{1}{2} \right]$$

再分别用统计量 $R_{\frac{a}{2}}, R_a, R_{\frac{3}{2}a}, R_{2a}$ 替换式(6)中相应的 $E_{\frac{1}{2}a}, E_a, E_{\frac{3}{2}a}, E_{2a}$, 得到估算参数 a, b, c 的三元联立方程组

$$\begin{cases} R_a = \frac{c}{ab} \\ R_{2a} = \frac{c}{ab^2} \left(1 + \frac{c}{a} \right) \\ R_{\frac{3}{2}a}/R_{\frac{1}{2}a} = \frac{c}{ab} + \frac{1}{2b} \end{cases} \quad (7)$$

为了便于计算,亦可把这个方程组变成与之等价的方程组

$$\begin{cases} (R_{2a} + R_a^2)R_{\frac{1}{2}a} - 2R_{\frac{3}{2}a}R_a = 0 \\ b = R_a / (R_{2a} - R_a^2) \\ c = abR_a \end{cases} \quad (7)$$

方程组(7)中的第一个方程是关于参数 a 的一元方程,可近似求解,其中 $R_{\frac{1}{2}a}, R_a, R_{\frac{3}{2}a}, R_{2a}$ 都是 a 的函数,均由式(3)计算。这个方法实质上是一种矩法。

3.2 在式(2)中分别令 $m = 1, 2, 3$,再用统计量 R_1, R_2, R_3 分别替换相应的 E_1, E_2, E_3 得到另一个估算参数的方程组

$$\begin{cases} R_1 = b^{-\frac{1}{a}} \Gamma \left(\frac{c+1}{a} \right) / \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) \\ R_2 = b^{-\frac{2}{a}} \Gamma \left(\frac{c+2}{a} \right) / \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) \\ R_3 = b^{-\frac{3}{a}} \Gamma \left(\frac{c+3}{a} \right) / \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) \end{cases} \quad (8)$$

或与之等价的方程组

$$\begin{cases} R_1^2 \Gamma \left(\frac{c+2}{a} \right) \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) - R_2 \Gamma^2 \left(\frac{c+1}{a} \right) = 0 \\ R_1 R_2 \Gamma \left(\frac{c+3}{a} \right) \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) - R_3 \Gamma \left(\frac{c+1}{a} \right) \Gamma \left(\frac{c+2}{a} \right) = 0 \\ b = \left[\Gamma \left(\frac{c+1}{a} \right) / R_1 \Gamma \left(\frac{c}{a} \right) \right]^a \end{cases} \quad (8)$$

这里前两个方程是参数 a, c 的二元方程组,解出参数 a, c 后,再由第三个式子计算参数 b 。

因方程组(8)中含有伽玛函数,自然解它比解方程组(7)难度要大一些。

虽然解方程组(8)实质上也是一种矩法,但不难从式(4)看出分别用 R_1, R_2, R_3 代替 E_1, E_2, E_3 的前提是 $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$,也就是说 $\lambda = 0$,故这种方法应该称做 λ 取极值法,简称极值法。

4 参数及有关值的计算

为了说明当由上述解方程组的方法估算风频参数时W-3模型与实测风频分布规律的实际拟合效果,这里任选几个气象台站的风况资料进行检验。

表1 内蒙古地区4个气象台站的风况统计资料

气象台站	R_1	R_2	R_3	ρ
额尔古纳旗	1.884254	6.900871	33.28910	1.20630
宁 城	2.834136	13.49515	86.81144	1.18160
满 都 拉	5.062683	37.16585	342.5865	1.09765
朱 日 和	5.538590	41.45184	379.0883	1.10890

表1中, ρ 是相应地区空气密度的年平均值。

由方程组(7)及式(2)、(4)分别计算各气象台站的风频参数及其它有关值,计算结果如表2所示。

表2 由方程组(7)及式(2)、(4)计算的结果

气象台站	a	b	c	E_1	E_2	E_3	λ
额尔古纳旗	2.067660	0.039796	0.626956	1.895729	6.897932	33.44089	0.0044
宁 城	1.501615	0.113717	0.013079	2.831956	13.54043	86.81513	0.0020
满 都 拉	1.730243	0.037601	1.376361	5.063397	37.18758	342.8816	0.0006
朱 日 和	1.662832	0.052924	1.804796	5.542369	41.48926	379.6962	0.0011

由方程组(8)及式(2)、(4)分别计算各气象台站的风频参数及其它有关值,计算结果如表3所示。

表3 由方程组(8)及式(2)、(4)计算的结果

气象台站	a	b	c	E_1	E_2	E_3	λ
额尔古纳旗	2.331752	0.021824	0.578182	1.884254	6.900874	33.28910	2.5×10^{-7}
宁 城	1.390973	0.156871	1.088553	2.834136	13.49515	86.81144	9.5×10^{-8}
满 都 拉	1.724137	0.038362	1.381143	5.062683	37.16586	342.5867	4.3×10^{-7}
朱 日 和	1.681308	0.049919	1.786450	5.538590	41.45184	379.0882	1.2×10^{-7}

为便于与W-2模型比较拟合效果,由平均风速及其标准差^[2]计算W-2模型的风频参数及相应的 E_1, E_2, E_3, λ 值,计算结果如表4所示。

表4 W-2模型风频参数及有关值的计算结果

气象台站	k	c	E_1	E_2	E_3	λ
额尔古纳旗	1.031976	1.908505	1.884254	6.885149	37.15853	0.0671
宁城	1.232853	3.033158	2.834136	13.37583	86.23129	0.0064
满都拉	1.542695	5.626153	5.062683	36.85178	338.6465	0.0082
朱日和	1.764859	6.221785	5.538590	41.18254	371.9923	0.0114

5 结 语

(1) 参数估算方法是风频理论研究中的一个重要内容, 从同一个风频模型的特征、性质的不同方面进行讨论, 可以导出不同的参数估算方法。这里的两个方法都是从 W-3 模型的 m 次矩之间以及 m 次矩与统计资料之间的关系导出来的, 统称为矩法。矩法具有普遍性, 不仅适合 W-3 模型, 原则上也适用于其它风频模型(3), 另外矩法也比较规范和严格。

(2) 有了拟合精度的标准, 才能判断拟合效果的好坏。由于考虑问题的角度和具体要求不同, 有多种不同的判断标准, 如理论与实测风频曲线之间距离的均方根、平均风功率密度理论与实测统计值之间的误差等都为大家所熟知, 这里引进的 λ 就是从实际应用角度考虑的。多种拟合标准势必会造成这样一种局面, 即使对同一种拟合状况, 采用不同的拟合标准, 拟合效果的结论是不一样的, 因此, 要根据实际需要选择相应的拟合标准。

参考文献

- 1 Auwera Vam Der, May F De and Malet L M. The use of the weibull three-parameter model for estimating mean wind power densities. J Appl Meteor, 1980, 19(7): 819 ~ 825
- 2 Justus C G, Hargraves W R, Amil Mikhail, et al. Method for estimating wind speed frequency distribution. J Appl Meteor, 1978, 17(3): 350 ~ 353
- 3 胡文忠, 蔡志波, 斑士欣. 由期望值和累计概率估算 W-2 参数. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1997, 28: 47 ~ 53

THE NUMERIC SOLUTION FOR THE W-3 PARAMETER EQUATION SYSTEM

Hu Wenzhong

(Department of Physics, Inner Mongolia University, Hohhot, 010021)

Cai Zhibo

(Inner Mongolia Electric Power School, Hohhot, 010010)

Ban Shixin

(Economic and Trade Committee of Inner Mongolia Autonomous Region, Hohhot, 010020)

Abstract

Based on the expectative value of the W-3 modole of wind frequency and their fitting error, two equation groups about Weibull parameters have been derived out. Solving these equations, the coresponding W-3 parameters are obtained. Comparing with the actual data of several meteorological observatories, it have proved that these two methods have much higher fit precision than the W-3 modal does.

Key words: W-3 distribution, Method of estimating parameters, Parameter equation system.