第55卷 第2期　　气　象　学　报　　Vol. 55, No. 2
1997年4月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Apr., 1997

正压大气中的波流相互作用及 Sine-Gordon 方程

陶建军

(湘潭师院地理系, 湘潭, 411201)

摘　　要

从正压涡度方程出发, 利用截谱方法, 讨论波动与基本流之间的相互作用, 得到了波流之间能量转换的条件。在引入时空缓变量后, 导出 Sine-Gordon 方程, 并求得了孤立子解。

关键词: 波流作用, Sine-Gordon 方程, 偶极孤立子。

1　引　言

大气中的许多现象, 都和波动与基本流之间的相互作用有关。因此, 对于它的研究, 已经成为天气动力学的一个重要课题。Andrews[1] 和 Edmon[2] 利用 EP 通量概念, 讨论了涡动的热量通量和动量通量对纬向平均流的作用。曾庆存[3] 利用波包理论研究大气中的波流相互作用, 得到了有意义的结果。李麦村等[4] 利用截谱方法, 讨论了特定涡源下, 扰动和基本流场相互作用所产生的平衡态及其突变问题, 能较好地解释6月和10月东亚环流的迅速演变现象。

文中利用截谱方法, 得到了一个反映波流相互作用的简单的非线性系统。通过对它的讨论, 导出了波流间能量传输的条件, 并且得到了多个守恒量。特别是在引入时空缓变坐标后, 求得 Sine-Gordon 方程及其孤立子解, 这从理论上进一步证明瞬变波的强迫对阻塞形势的维持和加强[5, 6] 具有重要的作用。

2　基本模式

准地转无量纲正压涡度方程为:

$$\frac{}{t}\quad{}^2 + J(\quad,\quad{}^2) + \quad{}^* \frac{}{x} = 0 \tag{1}$$

式中　为无量纲流函数, $^* = \frac{L_0}{a}\mathrm{ctg}\ _0$, $_0 = 45°$。

为了反映瞬变波与基本气流之间的相互作用, 取截谱展开式为:

$$= -\bar{u}y - \ _A\sin 2ly + \ _B e^{ikx} + \ _C e^{ikx}\cos 2ly + (*\ *) \tag{2}$$

其中(* *)表示前4项的共轭, $l = \frac{}{L_y}L_0$, $k = \frac{2}{L_x}L_0$, L_y 为南北方向的范围, 与之对应, y 的

初稿时间: 1995年8月28日; 修改稿时间: 1996年5月7日。

范围从0到$\frac{L_y}{L_0}$。L_x 为x 方向的波长。

式(2)右边第1项表示基本流。第2项是对第1项的补充,这两项的合成效果是: $_A < 0$ 表示中纬有急流; $_A > 0$ 表示急流分成为南北两支。如果这种基本场在局部区域发生,就表示急流在某地区出现分支。这时的气压场中高纬是高压,中低纬是低压,与大气中的偶极子阻塞相似。式(2)右边第3项表示移动性波,假定具有波源(如下游移入等)。式(2)右边第4项是由第2项和第3项由于非线性相互作用而产生的分量,它与第3项合成后能反映扰动的分布情况及槽线的形状(请参看第3节)。

在这一节,假定 $_i(i = A, B, C)$ 仅仅是时间t的函数,将式(2)代入式(1)后得截谱方程:

$$\frac{\ _A}{t} = -2lki(\ _B\ ^*_C - \ _C\ ^*_B) \tag{3}$$

$$\frac{\ _B}{t} = -lki\ _A\ _C + \ _1ki\ _B \tag{4}$$

$$\frac{\ _C}{t} = -2lkbi\ _A\ _B + \ _2ki\ _C \tag{5}$$

其中 $_1 = \ ^*/k^2 - \pi$; $_2 = \ ^*/(k^2 + 4l^2) - \pi$; $b = \frac{k^2 - 4l^2}{k^2 + 4l^2}$

再令 $$\equiv i(\ _B\ ^*_C - \ _C\ ^*_B) = -2\ _B\ _C\sin \tag{6}$$

$$\equiv \ _B\ ^*_C + \ _C\ ^*_B = 2\ _B\ _C\cos \tag{7}$$

$$E \equiv 2\ _B{}^2 - \frac{1}{b}\ _C{}^2 \tag{8}$$

其中 $= \ _B - \ _C$。则由式(3)—(5)可得:

$$\frac{\ _A}{t} = -2lk \tag{9}$$

$$\frac{E}{t} = 4lk\ _A \tag{10}$$

$$\frac{}{t} = -\tilde{\ }k - 2lkb\ _AE \tag{11}$$

$$\frac{}{t} = \tilde{\ }k \tag{12}$$

以及 $$\frac{\ _B{}^2}{t} = -\frac{1}{4}\frac{}{t}\ ^2_A = -\frac{1}{2b}\frac{}{t}\ _C{}^2 \tag{13}$$

其中 $\tilde{\ } = \ _1 - \ _2$。

以上是要讨论的方程组,是一非线性系统。由它可得如下几个守恒量:

$$m_0 \equiv \ _B{}^2 + \frac{1}{4}\ ^2_A = \text{常量} \tag{14}$$

$$m_1 \equiv + \frac{\tilde{\ }}{2l}\ _A = \text{常量} \tag{15}$$

$$m_2 \equiv \ ^2 + \ ^2 + \frac{1}{2}bE^2 = \text{常量} \tag{16}$$

$$m_3 \equiv \ _B{}^2 + \ _C{}^2/2b = \text{常量} \tag{17}$$

m_0, m_1, m_2, m_3 可由初值决定,其中 m_0 对应于波流间的能量守恒。

3 波流间的能量转换

3.1 基本流向波动的能量转换

设初始时刻 $_A = \ _{A0} \neq 0$, 但 $_B$ 和 $_C$ 很小, 则将式(9)—(12)线性化后得:

$$\frac{d^3E}{dt^3} + (8l^2b \ ^2_{A0} + \ \tilde{}^2)k^2\frac{dE}{dt} = 0 \tag{18}$$

设 $E = Ee^{\tilde{}t}$, 代入上式, 得:

$$\tilde{}^3 + (8l^2b \ ^2_{A0} + \ \tilde{}^2)k^2\tilde{} = 0$$

解得:

$$\tilde{}_1 = 0; \tilde{}_{1,2} = \pm \sqrt{-(8l^2b \ ^2_{A0} + \ \tilde{}^2)k^2} \tag{19}$$

显然, 若 $b > 0$, 即 $k^2 > 4l^2$ 时, ~恒为虚数, 系统总是稳定的, 即对于波长较短的波, 不会从平均流吸取能量增长。从此模式看, 正压不稳定同样具有短波截止现象。

当 $b < 0$, 即 $k^2 < 4l^2$, 且 $8l^2 \ b \ ^2_{A0} > \ \tilde{}^2$ 时, 才会出现不稳定, 这时 $_{A0}$ 存在临界值:

$$^2_{A0} \equiv \frac{2l^2 \ ^{*2}}{(4l^2 - k^2)(4l^2 + k^2)k^2} \tag{20}$$

当 $^2_{A0} > \ ^2_{AC}$ 时, 扰动从平均流吸取能量增长, 这是本模式得到的正压不稳定的判据。这里, * 起稳定作用。分析式(20)可知, $^2_{AC}$ 存在极小值。将式(20)对 k 求导, 并令 $\frac{^2_{AC}}{k} = 0$, 得:

$$4l^2 - \sqrt{3}k^2 = 0 \tag{20$'$}$$

当 $k^2 = \frac{4}{3}l^2$ 时, $_{AC}$ 取极小值。

下面, 给出平均流场向扰动场提供能量时, 槽线的分布形状。

将展开式(2)中最后两分量写成:

$$_B \cos \ _B + \ _C \cos \ _C\cos 2ly = \ _B \cos \ _B + \ _C \cos(\ _B - \ ) \cos 2ly$$

其中 $_B = kx + \ $, 为位相角, $= \ _B - \ _C$, 利用三角函数公式, 可得: $_B \cos \ _B + \ _C \cos(\ _B - \ )\cos 2ly = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\ _B - \tilde{})$, 这里 $A = \ _B + \ _C \cos \ \cos 2ly$; $B = \ _C \sin \ \cos 2ly$; $\tilde{} = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}$, 再利用式(6)(7)两式, ~可写成:

$$\tilde{} = \mathrm{arctg}\frac{- \ \cos 2ly}{2 \ _B{}^2 + \ \cos 2ly} \tag{21}$$

在槽线上, $kx - \tilde{} = \ $, 由此可以确定槽线的形状。

若取 $k = \frac{2}{L_x}L_0 = 1$, 相当于 x 方向的波长为 6.28×10^6m。取 $l = \frac{}{L_y}L_0 = 0.63$, 对应于南北方向的范围 L_y 为 5×10^6m。在 $_0 = 45°$ 处, * 取 0.1; 由此计算得 $\tilde{} = 0.048$, $b = -0.22$; 再由式(20), 可求得临界值 $_{AC} = 0.05$, 作为一个实例, 假设 $t = 0$ 时刻, $\bar{u} = 0.17$, $_{A0} = -0.15$, 这相当于中纬有较强西风气流。因为由式(2)对 y 求导, 再进行纬向平均, 可得:

$$- \frac{\bar{}}{y} = \bar{u} + 2l \ _{A0}\cos 2ly$$

若 $\bar{u}$, l, $_{A0}$ 均为以上取值时, 上式对应着中纬有量纲最大速度是40m/s左右。如图1a。

对于上面所取的 $_{A0}$, 因为有 $_{A0}>$ $_{AC}$, 所以基本流不稳定, 将有能量向扰动传输。由上面所取参数和初值, 再设 $t=0$ 时, $_{B}=0.02$, $_{C}=0$(即大气中有很弱的扰动), 由式(6)—(8) 知, 这时, $=$ $=0$, $E=8\times10^{-4}$。在这初始条件下, 采用 Runge-Kutta 法, 对式(9)—(12) 进行数值计算, 步长 h 取0.18(即30min), 计算结果如图1。

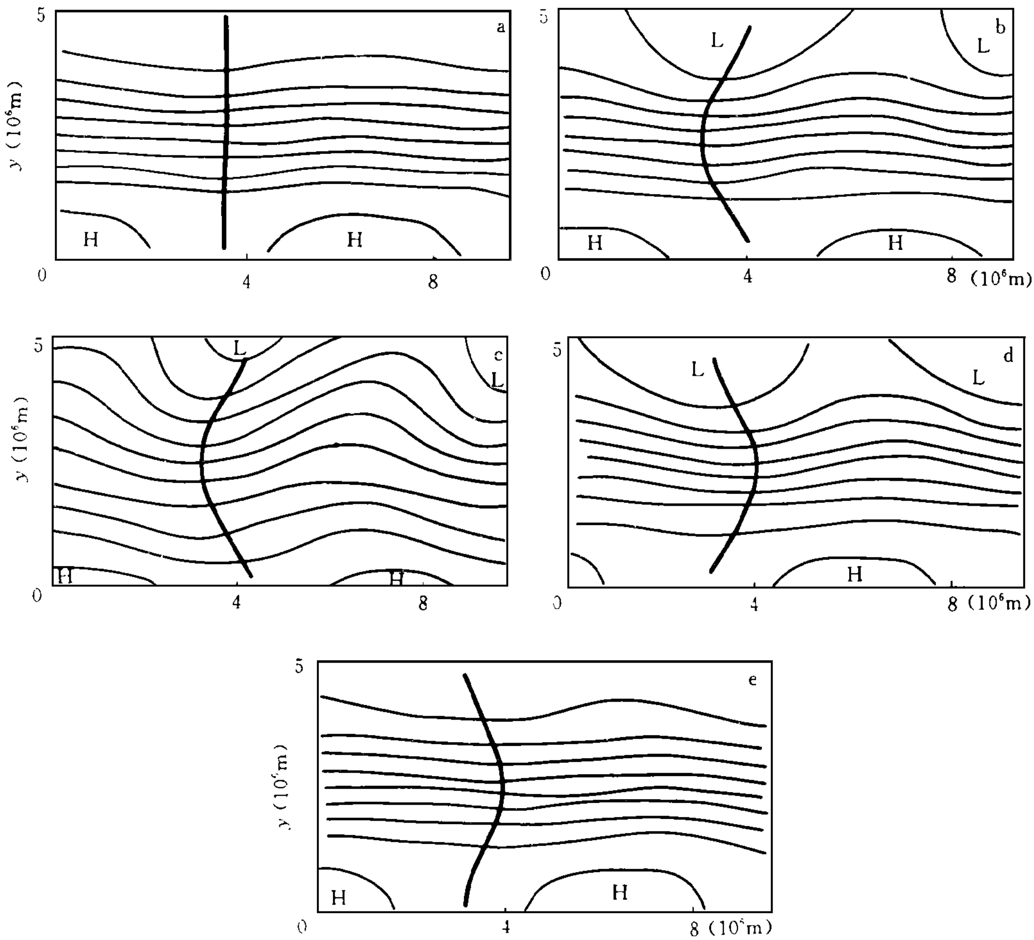

图1　基流不稳定时的流场演变

(a. 初始场; b. 第3天; c. 第5天; d. 第10天; e. 第12天)

图中细实线为流线, 粗实线为由式(21) 计算得到的槽线的形状。由图1a 可见, 初始时刻槽线为南北向的直线, 到了第3天, 图1b 槽线发生了形变, 急流北面, 槽线转为东北–西南向, 急流南面, 槽线转为西北–东南向, 众所周知, 这种槽线的分布形式对应着发展型扰动, 结果到了第5天, 扰动加强(图1c) 。

图1d 是第10天的流场分布, 这时, 槽线发生了变化, 急流北面转为西北–东南向, 南面为东北–西南向, 这种分布就意味着扰动将要减弱, 结果到了第12天, 气流变得较为平直, 如图1e。

3.2 扰动向基本纬向流输送能量

当初始时刻 $_B = \ _{B0} \neq 0$ 时, 即大气中有波动存在, 但 $_A << \ _B$, $_C << \ _B$。(这时由式(6)—(8) 知, $= \ = 0$) 将式(9)—(13)线性化后得:

$$\frac{d^3 \ _A}{dt^3} - (4l^2bE_0 - \tilde{}^2)k^2\frac{d \ _A}{dt} = 0 \qquad 这里\ E_0 = 2 \ _{B0}^2$$

令 $_A = \ _A e^{\tilde{} t}$, 代入上式有

$$\tilde{} = \pm \overline{(4l^2bE_0 - \tilde{}^2)}$$

显然, 要使 $\tilde{}$ 出现正实根, b 必须大于零, 即必须满足 $k^2 > 4l^2$ 的条件, 可见只有波长较短的波才可能向平均流场传送能量, 这时 $_{B0}^2$ 也存在临界值:

$$_{BC}^2 \equiv \frac{2l^2 \ ^{*2}}{(k^4 - 16l^4)k^2} \tag{22}$$

当 $_{B0} > \ _{BC}$ 时, 出现不稳定, 扰动向平均流场提供能量。

另外, 由式(22)可以看出, 波长越短的波, 越容易被基本流所吸收。

根据以上分析, 现讨论西风带分支气流加强时, 流场的演变及槽线的变化情况。取参数 $k = \frac{2}{L_x}L_0 = 1.56$(对应 x 方向波长为 4×10^6m); $l = \frac{2}{L_0}L_0 = 0.63$(南北范围为 5×10^6m); $^* = 0.1$, 计算得 $\tilde{} = 0.016$; $b = 0.212$。由式(22) 计算出 $_B$ 的临界值 $_{BC} = 0.022$。取初值 $_{B0} = 0.1$, $_{A0} = 0.02$, 分别对应大气中有较强的天气尺度波动和弱的分支基本气流。如图 2a, 这里 $\bar{u}$ 取0.1。

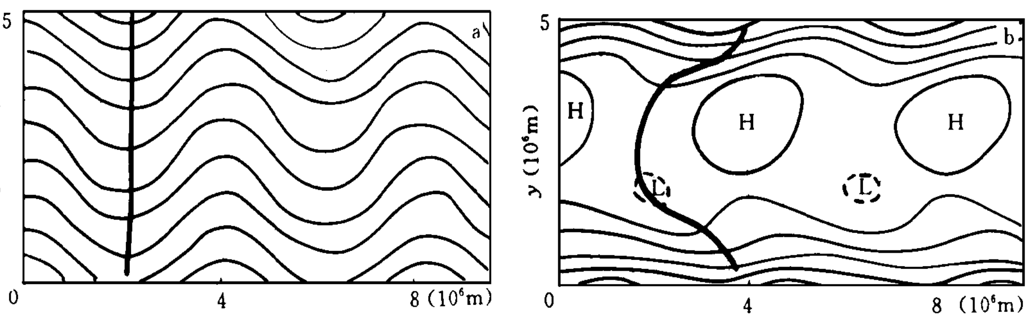

图2 分支流加强时的流场演变
(a. 初始场; b. 第3天流场)

在上述参数和初值条件下, 对式(9)—(12) 进行数值计算(方法同前)。结果如图2, 图中粗实线为槽线, 由式(21)确定。图2a 是初始状况, 流场上波状结构明显, 槽线呈南北向。图2b 是第3天的结果, 这时中高纬为曳式扰动, 中低纬为导式扰动, 这种结构, 有利于扰动向高纬和向低纬输送能量, 结果如图2b 中所见, 出现了南北两支西风气流。而且还可以看出: 中高纬反气旋涡度增强, 中低纬气旋性涡度增强, 这一特性, 非常有利于偶极子阻塞形势的维持和加强[5]。下一节将看到: 当考虑 x 方向的空间缓变量和时间缓变量后, 这种波流间的相互作用, 可以产生偶极孤立子。

4 Sine-Gordon 方程与孤立子解

对于方程(1), 取展开式:

$$= -\bar{u}y - {}_A(t,x)\sin 2ly + {}_B(t,x)e^{ik(x-ct)} + {}_C(t,x)e^{ik(x-ct)}\cos 2ly + (*\ *) \tag{24}$$

上式与式(2)不同的是 $_i(i = A, B, C)$ 是 t, x 的缓变量; C 为波速。将式(24)代入式(1), 考虑到扰动振幅 $_i$ 为小量及振幅为空间的缓变量, 因而忽略 $\frac{^2{}_i}{x^2}, \frac{_i}{x}\ {}_i$; 等小项[7]可得:

$$\frac{_A}{t} + C_{g0}\frac{_A}{x} = -2lki({}_B\,{}^*_C - {}^*_B\,{}_C) \tag{25}$$

$$\frac{_B}{t} + C_{g1}\frac{_B}{x} = {}'_1 ki\,{}_B - lki\,{}_A\,{}_C \tag{26}$$

$$\frac{_C}{t} + C_{g2}\frac{_C}{x} = {}'_2 ki\,{}_C - 2lbki\,{}_A\,{}_B \tag{27}$$

其中 $C_{g0} = \bar{u} - \frac{^*}{4l^2}$; $C_{g1} = \bar{u} + \frac{^*}{k^2}$; $C_{g2} = \bar{u} + \frac{^*(k^2 - 4l^2)}{(k^2 + 4l^2)^2}$; $'_1 = \frac{^*}{k^2} - (\bar{u} - C)$; $'_2 = \frac{^*}{k^2 + 4l^2} - (\bar{u} - C)$。显然有: $C_{g1} > C_{g2} > C_{g0}$。

为了求出以常速度 传播的解(对于准静止阻塞形势, ≈ 0), 假定 $_i(i = A, B, C)$ 仅为 $= x - t$ 的函数[7]。再令 $\equiv i({}_B\,{}^*_C - {}^*_B\,{}_C)$; $\equiv {}_B\,{}^*_C + {}^*_B\,{}_C$; $E \equiv 2\,{}_B{}^2 - \frac{C_{g2} -}{(C_{g1} -)b}\,{}_C{}^2$, 由式(25)—(27)式, 得:

$$\frac{\mathrm{d}\,{}_A}{\mathrm{d}} = - \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = - \quad - b\,{}_A E \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}} = \quad {}_A \tag{32}$$

其中 $= \frac{2lk}{C_{g0} -}$; $= \frac{'_1}{C_{g1} -} - \frac{'_2}{C_{g2} -}$; $b = \frac{2lkb}{C_{g2} -}$; $= \frac{4lk}{C_{g1} -}$; $b = \frac{k^2 - 4l^2}{k^2 + 4l^2}$。

假定 $C_{g0} >$, 则有:

$$C_{g1} > C_{g2} > C_{g0} > \ [7] \tag{33}$$

当 $b > 0$ 时, > 0; $b > 0$; > 0。

边界条件取: $\to \infty$ 时, $_B = {}_{B0}$, $_A = {}_C = 0$, 其意义是无穷远处有波动东移。但无穷远处西风未出现分支。相应有 $= 0$(由 的定义可知)。

由式(29)、(30)及上述边界条件, 可得:

$$= - \frac{}{}\ {}_A \tag{34}$$

将式(34)代入式(31), 再令 $\tilde{E} = E - \frac{^2}{b}$ 得:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}} = \quad {}_A \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = - b \quad {}_A \tilde{E} \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d} \quad {}_A}{\mathrm{d}} = - \tag{37}$$

作函数
$$(\ ) = \int_{-\infty} \overline{b} \quad {}_A \mathrm{d} \ ' \tag{38}$$

根据式(35),(36)得:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}} = \overline{\frac{}{b}} \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = - \overline{\frac{b}{}} \tilde{E} \tag{40}$$

由 $\to \infty$ 时, $\tilde{E}_0 = 2 \quad {}_{B0}{}^2 - \frac{{}^2}{b}$ 的边界条件,从式(39)、(40)可解得: $\tilde{E} = \tilde{E}_0 \cos$, $= - \overline{\frac{bK}{EK}} \tilde{E}_0 \sin \mathrm{H}$, 再将 U 代入式(25)($\mathrm{U} = i(7_{B} 7_{C}^{*} - 7_{C} 7_{B}^{*})$),利用变换 $\mathrm{F} = x - \mathrm{K}t$,得:

$$\frac{5^2 \mathrm{H}}{5x^2} - \frac{1}{C_{g0\mathrm{K}}} \frac{5^2 \mathrm{H}}{5t^2} = \tilde{r}^2 \sin \mathrm{H} \tag{41}$$

其中 $\tilde{r}^2 = \frac{2lk}{C_{g0}} bK\tilde{E}_0$。式(41)即为著名的 Sine-Grodon 方程[7],许多物理现象都可以用这一方程来描述。它在一定的条件下,存在孤立子解。比如利用变换 $\mathrm{F} = x - \mathrm{K}t$, 式(41)可写成:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{H}}{\mathrm{d}\mathrm{F}^2} = r^2 \sin \mathrm{H} \tag{42}$$

这里 $r^2 = \mathrm{AK} bK \tilde{E}_0$。式(42)的解为[7]:

$$\mathrm{H}(\mathrm{F}) = 4 \mathrm{arctg}[\exp(r\mathrm{F})] \tag{43}$$

式(43)这种形式的解叫做纽结[7]。利用式(38)式,得 7_A 的表达形式:

$$7_A = \frac{2r}{\overline{EKbK}} \mathrm{sech}[r(x - \mathrm{K}t)] \tag{44}$$

若将 y 方向分量考虑进去,再结合考虑基本流 $\bar{u}$,即可得到描述纬向平均流的流函数为:

$$7_{纬} = - \bar{u}y - 7_A^{\mathrm{d}} \mathrm{sech}[r(x - \mathrm{K}t)] \sin 2ly \tag{45}$$

其中 $7_A^{\mathrm{d}} = \frac{2r}{\overline{EKbK}}$ 为孤子波振幅。由上式可知:

(1) 孤立波的宽度系数 r 与振幅 7_A^{d} 成正比,振幅越大时,东西方向的波宽度就越小;

(2) 因为 $r = \sqrt{\mathrm{AK} bK \tilde{E}_0}$, 而 $\tilde{E}_0 = 2 \ 7_{B0}{}^2 - \frac{\mathrm{B}^2}{bK\mathrm{AK}}$, 由前面假定条件知, $\mathrm{AK} > 0$, $bK > 0$, 所以必须有 $2 \ 7_{B0}{}^2 > \frac{\mathrm{B}_{\mathrm{K}}^2}{bK\mathrm{AK}}$。即必须有足够强的扰动东移,才能使孤立波解存在;

(3) 由于 $7_A^{\mathrm{d}} = \frac{2r}{\overline{EKbK}} = 2 \ 7_{B0} \sqrt{\frac{C_{g1} - \mathrm{K}}{C_{g0} - \mathrm{K}}}$。对于移速很小的孤立波来说($\mathrm{K} \approx 0$), C_{g0} 越小,振幅越大。又因为 $C_{g0} = \bar{u} - \frac{\mathrm{B}^*}{4l^2}$, 所以这时要求 $\bar{u} > \frac{\mathrm{B}^*}{4l^2}$, 解才存在。

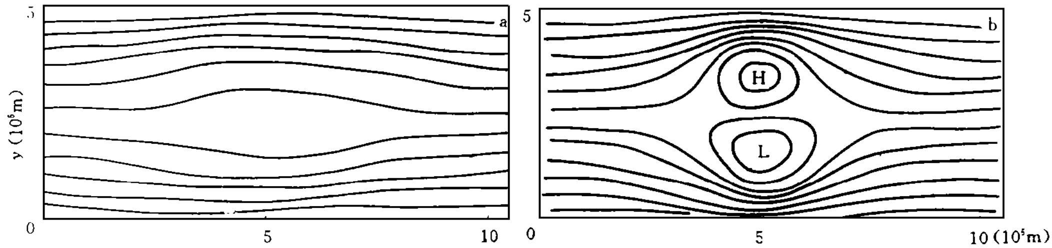

图3 孤立波流函数图

(a. 7 $_{B0}$ = 0. 02 ; b. 7 $_{B0}$ = 0. 05 (其他参数见正文))

同图2, 取参数 $k=1.57$, $l=0.63$, 相速度 C 近似地取谱分量 7 $_B$ 的线性波速(即 $C=\bar{u}-\frac{B^*}{k}$) , 取 $B^*=0.1$, $\bar{u}=0.1$, K= 0(假定孤立波移速很小) 。初值 û7 $_{B0}$ 取0. 02和0. 05, 分别对应着较弱和较强的天气尺度波动。由式(45) , 得基本流场的流线分布如图 3。图 3a 为取 û7 $_{B0}$ = 0. 02 时的情形, 这时孤立波波幅小, 宽度大, 无明显偶极子形式。图 3b 是取 û7 $_{B0}$ = 0. 05 时的情形, 这时波振幅较大, 但宽度小。南低北高的偶极子明显。可以肯定, 这种由扰动向局部基本纬向流提供能量而产生的偶极子, 对大气中的阻塞形势的维持和加强是非常有利的。

5 小 结

文中用截谱方法, 讨论了正压大气中波流间的相互作用问题, 得到了波流间能量传递的条件。并提出: 正压不稳定也具有短波截止现象。同时指出: 波长较短的波容易被基本流所吸收。在引入时空缓变量后, 导出了著名的 Sine-Gordon 方程, 并求得了孤立子解。

参考文献

[1] Andrews D G and Mcintyre M E. Planetary wave in horizontal and vertical shear: The generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. J Atmos Sci, 1976, 33: 2031- 2048.

[2] Edmon H J, Hoskins B J and Mcintyre M E. Eliassen-Palm cross section for the troposphere. J Atmos Sci, 1980, 37: 2600- 2616.

[3] 曾庆存. 中纬度天气系统的演变过程. 气象, 1983, (11) : 33—39.

[4] 李麦村, 罗哲贤. 6月和10月大气环流突变的非线性机制, 中国科学,B 辑, 1983, (2) : 187—192.

[5] 吴国雄等. 时变涡动输送与阻高形成. 气象学报, 1994, 52(3) : 308—320.

[6] 陶祖钰等. 1991年梅雨期阻塞高压的维持和瞬变扰动. 气象学报, 1994, 52(2) : 231—234.

[7] 谷内俊弥(日) . 非线性波动. 原子能出版社, 1981. 167—1987.

ON INTERACTION BETWEEN WAVE AND FLOW IN THE BAROTROPIC ATMOSPHERE AND SINE-GORDON EQUATION

Tao Jianjun

(*Department of Geography, Xiangtan teachers college, Xiangtan*, 411201)

Abstract

Starting from the baratropic moldel and using the method of the truncate spectrum, this paper discusses interaction between wave and basic flow and identifies conditions of energy-transforming between wave and flow. It gets the Sine-Gordon equation and its solitary wave solution.

Key words: Interaction between wave and flow, Sine-Gordon equation, Dipole soliton wave solution.