

副高与阻高形成的 Rossby 孤立波理论 II: 存在临界层*

范 红 缪锦海

(北京气象学院, 北京, 100081)

摘 要

研究了存在临界层的非均匀纬向流中的 Rossby 孤立波。在求出振幅函数满足的 KdV 方程或修正 KdV 方程(MKdV)后, 选择 Chebyshev 多项式作为展开基函数, 用假谱方法, 求解本征值和本征函数。对理想风场的计算表明, 在临界层存在与否两种情况下, 都能得到在东西风界面处的反气旋式副高型 Rossby 孤立波, 同副高有一致的演变规律: 当东风带相对强于西风时, 向西移动; 当西风相对强于东风时, 则向东移动。在西风带, 则得到阻高型 Rossby 孤立波, 与阻高也有同样的演变规律。另外, 我们还用连续谱方法计算了临界层附近的连续谱及离散谱, 也得到与假谱方法较一致的结论。

关键词: 临界层, Rossby 孤立波, 假谱, 连续谱。

1 引 言

在研究流体运动时, 当基流速度与扰动相速度相等时, 线性化的流体切变流方程出现奇异性。通常把出现奇异性的点叫临界点, 而以临界点为中心的一薄层称为临界层。对大气中 Rossby 孤立波的研究, 可以用来讨论副高和阻高的活动。在讨论副高时, 通常认为副高脊线是东西风的分界线, 是零风线的位置, 也是准定常波($c=0$)的临界层的位置, 而在临界层附近的解不易讨论。以往对 Rossby 波临界层的研究很多, 逐渐由线性、准线性向非线性发展。Redekopp^[1](1977)的工作研究了水平切变流上确定振幅的 Rossby 波的发展, 推导出在均质大气时的 KdV 方程及层结大气的修正 KdV 方程, 对 Rossby 孤立波及临界层进行了较详细的理论分析。以后, K. Stewartson^[2](1978), T. Warn 和 H. Warn^[3](1978)也都从不同角度研究了临界层的问题。但实际大气中, 临界层的影响究竟怎样, 尚无更深入的研究。

本文在得到 Rossby 孤立波的解析解后, 计算了其在临界层附近及远离临界层的流场, 来解释实际大气中副高、阻高的移动, 得到比较一致的规律性。

2 基本理论及模拟

从正压无辐散、准地转涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

* 初稿时间: 1993 年 8 月 14 日; 修改稿时间: 1994 年 6 月 14 日。

可推导出如下方程(详见文献[8])

$$\begin{cases} \frac{d^2G}{dy^2} + P(y)G = 0 & \text{其中 } P(y) = \frac{\beta - \bar{u}}{u - c} \\ G(y_1) = G(y_2) = 0 & y \in [y_1, y_2] \end{cases} \quad (2)$$

c 为所要求的特征值, G 为特征向量。文献[8]中采用格点法求解,但在临界点变量变化剧烈,解无意义。故采用 Chebyshev 多项式展开的假谱方法和连续谱方法来求解这个问题。

2.1 用 Chebyshev 假谱方法解方程

Chebyshev 多项式定义在区间 $[-1, 1]$ 上是一完备函数,若以 $\cos\theta$ 为自变量,可表示为:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad (\theta = \cos^{-1}x), n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

若以 x 为自变量 可表示为 $T_n(x) = \cos(n(\cos^{-1}x)), n = 1, 2, \dots$

若任一函数可以用 Chebyshev 多项式展开,且在展开区间函数解析,就能保持不定阶收敛的性质。如果区间可变或使用变量伸缩,Chebyshev 多项式展开将比其它展开更方便。对于本征值问题,Chebyshev 计算可以不考虑区间以外的奇异性。假谱方法(pseudospectral method)也叫配点法(Collocation method),在 $[y_1, y_2]$ 之间取 N 个点,使展开的函数在这 N 个点上精确满足方程,从而构造了一个本征值问题。对于 Chebyshev 多项式来说,假谱方法和谱方法在所要求的精度内很相近,都比差分计算精度高。但谱方法对微分方程系数的解析性要求较高,而假谱方法相对要方便些。因此,把 Chebyshev 多项式和假谱方法结合起来,由于两者独特的性质,对于解方程将是一个理想的选择。

Chebyshev 多项式为 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \theta \in [0, \pi]$, 即 $|T_n(x)| \leq 1, x \in [-1, 1]$, 以下参考 Boyd^[4](1978)的作法。

为了使本征函数在区间端点满足齐次边界条件,需要对 Chebyshev 多项式进行重新排列,使新序列的每个基函数都要满足边界条件。对于非对称区间 $[a, b]$, 在 a, b 端点 $u=0$, 可使用如下变换:

$$\theta_n(x) = \begin{cases} T_n(x) - T_0(x) & \text{其中, } n \text{ 取偶数} \\ T_n(x) - T_1(x) & \text{其中, } n \text{ 取奇数} \end{cases} \quad (4)$$

对于对称区间,使用:

$$\begin{aligned} \theta_0(x) &= -\frac{1}{3}T_2(x) + \frac{4}{3}T_1(x) + \frac{5}{3}T_0(x) \\ \theta_n(x) &= -[n^2/(n+2)^2]T_{n+2}(x) + T_n(x) + \{[n^2/(n+2)^2] - 1\}T_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots, N$

为了简化计算,以下所有运算将通过一个简单线性变换,使区间从 $[a, b]$ 转换到 $[-1, 1]$ 。

方程(2): $(\bar{u} - c) \frac{d^2G}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')G = 0$ 可改写为:

$$\bar{u} \frac{d^2G}{dy^2} + (\beta - \bar{u}')G = c \frac{d^2G}{dy^2} \quad (6)$$

假设 $G = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cdot \theta_n(y), \theta_n(y)$ 即为重新排列的 Chebyshev 多项式,代入式(6)得:

$$\bar{u} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \theta_n''(y) + (\beta - \bar{u}') \sum_{n=0}^{N-1} g_n \theta_n(y) = c \sum_{n=0}^{N-1} g_n \theta_n''(y) \quad (7)$$

对 $y \in [a, b]$ 做区间变换, 使新变量 $Z \in [-1, 1]$, 且 $y=a$ 时 $Z=-1$, $y=b$ 时 $Z=1$,

$$\text{则} \quad Z = 2[y - (a + b)/2]/(b - a) \quad (8)$$

在 $Z \in [-1, 1]$ 内取 N 个点, 如下:

$$\begin{aligned} Z_i &= -\cos[(2i - 1)\pi/2N], & i &= 1, 2, \dots, N \\ y_i &= 0.5(a + b) + 0.5(b - a)Z_i, & d &= 0.5(b - a) \end{aligned}$$

$$\text{则:} \quad \theta_n(y)_y = \theta_n(y)_z \frac{dz}{dy} = \theta'(z)/d \quad (9)$$

$$\theta_n''(y)_y = (\theta_n''(y)_z \frac{dz}{dy})_z \frac{dz}{dy} = \theta''(z)/d^2 \quad (10)$$

把以上两式代入(7)得:

$$\bar{u} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cdot \theta_n'(Z)/d^2 + (\beta - \bar{u}') \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cdot \theta_n(Z) = c \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cdot \theta_n(Z)/d^2$$

对任一点 Z_i 把以上方程展开:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\bar{u}(Z_i)}{d^2} \cdot \theta_0'(Z_i) + (\beta - \bar{u}'(Z_i))\theta_0(Z_i) \right] g_0 + \dots \\ & + \left[\frac{\bar{u}_i}{d^2} \theta_{N-1}'(Z_i) + (\beta - \bar{u}'_i)\theta_{N-1}(Z_i) \right] g_{N-1} \\ & = \frac{c}{d^2} (\theta_0'(Z_i)g_0 + \theta_1'(Z_i)g_1 + \dots + \theta_{N-1}'(Z_i)g_{N-1}) \end{aligned}$$

对 N 个点可写成特征值问题: $AA \cdot G = \frac{c}{d^2} \cdot BB \cdot G$, 其中 AA, BB 为 $N \times N$ 矩阵, G 为列矢量。其中元素为:

$$a_{ij} = \frac{\bar{u}_i}{d^2} \cdot \theta_{j-1}'(Z_i) + (\beta - \bar{u}'_i)\theta_{j-1}(Z_i) \quad (AA \text{ 的元素})$$

$$b_{ij} = \theta_{j-1}(Z_i) \quad (BB \text{ 的元素})$$

$$G = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})' \quad j = 1, 2, \dots, N$$

其中 $(')$ 表示转置, BB^{-1} 为 BB 的逆矩阵, c 为特征值, G 为特征向量。

对 MKdV 方程的求解类似, C, H 可按上述方法求出, 对 E 的求解与上述相似, 过程省略, 只给出最后结果: $E = DD^{-1}F_1$, 其中: $E = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})'$

$$F_1 = [P'(Z_1) \cdot H^2(Z_1), P'(Z_2) \cdot H^2(Z_2), \dots, P'(Z_n) \cdot H^2(Z_n)]$$

$$dd_{ij} = (\bar{u}_i - c) \cdot \theta_j'(Z_i)/d^2 + (\beta - \bar{u}'_i) \cdot \theta_j(Z_i)$$

其中 E 求出后, MKdV 的解就可求出了。用以上方法对文献[8]中的解进行了重新计算。图 1 为不存在临界层时模拟的副高型 Rossby 孤立波, 由图 1a 可看到当北侧的西风比南侧东风弱小时, 本征函数为负, 其极值处有反气旋中心出现, 向西移动。图 1b 西风增大强于东风, 零风线南移, 本征函数为正, 环流向东移动。图 1c 东西风强度相等, 本征函数为负, 环流向西移动。因此, 在没有临界层的情况下, 用此假谱方法得出的结论和文献[8]相同。

在存在临界层的情况下, 模拟结果如图 2。图 2a 中本征函数为正, 环流向西移动, 临界层位于反气旋南侧, 临界层附近有小扰动, 零风线穿过反气旋中心。图 2b 中本征函数也为正, 环流稳定少动, 偏于区域北面, 东风较强, 零风线通过环流中心, 临界层位于其南侧。

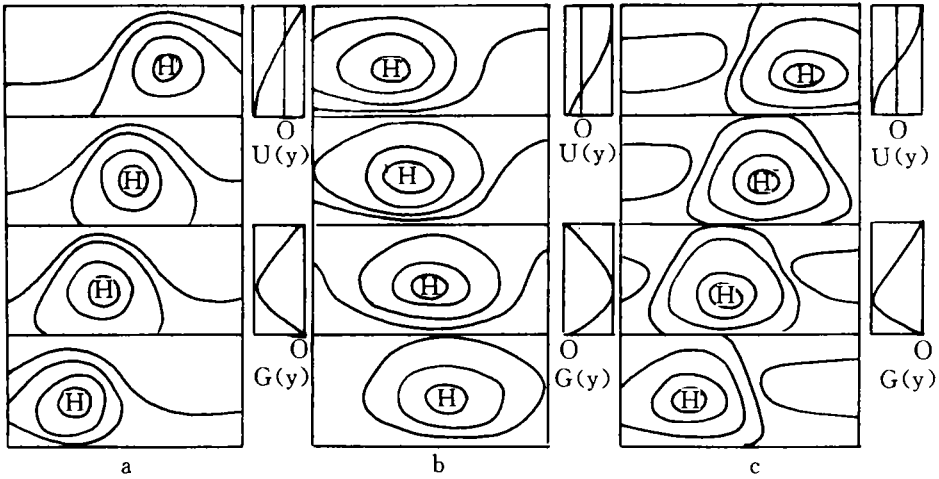


图 1 无临界层情况下用 Chebyshev 假谱方法模拟的副高型 Rossby 孤立波 (a,b,c 分别为对应不同基本气流 $U(y)$ 及本征函数场 $G(y)$ (右侧小图) 的流场随时间(从上到下)发展及移动情况)

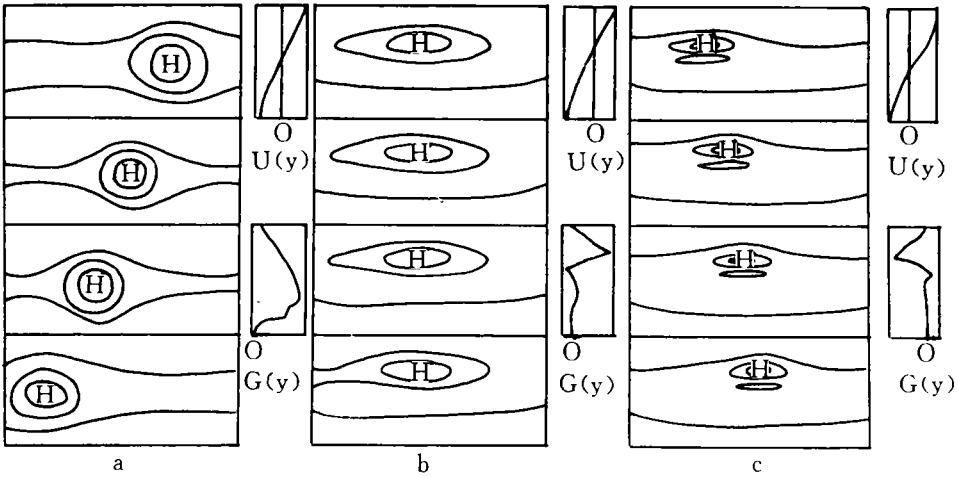


图 2 存在边界层时用 Chebyshev 假谱方法模拟的副高型 Rossby 孤立波 (分图意义同图 1)

图 2c 中本征函数为负,环流偏于西风带,向东移动,临界层位于其南侧。从以上三幅图看到反气旋均位于临界层以北,其移动方向与本征函数的分布和风带相对强弱有关,其中心均处于本征函数极值处,临界层附近本征函数出现拐点,环流处于东西风界面,有时偏于西风区。

由以上分析看出,用 Chebyshev 假谱方法模拟出的东西风界面处的反气旋,位于临界层附近偏北,临界层附近的小扰动,可能是其反射的影响。因此我们认为副高在东西风基本气流条件下,具有非线性 Rossby 孤立波特征。

在进行上述工作的同时,我们对西风区的阻高型 Rossby 孤立波也进行了模拟。由于

模拟位于西风区,可以不考虑临界层的出现,问题相对简单得多。结果和文献[8]中一致,也同样得到反气旋式孤立波流场或北高南低偶极子型流场,取决于本征函数的分布类型(图略)。我们所取的西风中心区为零与实际大气的阻高南北风场相似,故称为阻高型 Rossby 孤立波。

用修正的 KdV 方程所进行的计算也可取得同样结论。此处不详细讨论。

2.2 用连续谱方法解方程

卢佩生等^[6](1986)在讨论正压准地转模式的谱和扰动的演变时,介绍了计算谱、谱函数的有限差分法,与文献[8]中的格点法是同样的。即在方程(2)中, $\bar{u}(y_c) - c = 0$, $y_c \in [y_1, y_2]$ 则 y_c 为方程的奇点。因 c 可在区间 $[\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max}]$ 上连续变化,故称为连续谱,若 c 在区间外,则称离散谱。相应的特征向量 G 称为谱函数。

用差分法计算近似的谱和谱函数的方法与文献[8]相同,同样可得结果为: $D1 \cdot DD \cdot G = CG$ 其中 $D1, DD$ 为 $N \times N$ 矩阵, G 为列矢量, c 为连续谱

$$D1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad DD = \begin{pmatrix} M_1 & \bar{U}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{U}_2 & M_2 & \bar{U}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{U}_N & M_N \end{pmatrix}$$

$$G = (G_1, G_2, \dots, G_N)' \quad M_i = (\beta_i - \bar{u}_i')(dy)^2 - 2\bar{u}_i$$

由上述方程可求出 N 个特征值 c_n 和相应的特征向量 G_n , 由于 G_n 是有限个, 所以我们的计算只是连续谱中的一部分, 若取 $dy \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$, 离散谱趋于确定的极限, 而连续谱 c_n 将随 dy 的减小而越来越密, 直到连成连续谱, 谱函数随 c 也将连续变化。相应的谱函数为:

$$\Psi_0 = \sum_{i=1}^{N'} A(\xi, T) \cdot G_i$$

其中 $A(\xi, T)$ 为文献[8]中的孤立波解, N' 与 N 可以不相等, 因为 N 中包括 N' 及离散谱。

用连续谱的思想来解决临界层的问题, 主要表现在求谱函数时的求和计算, 当 $N \rightarrow \infty$ 时变为积分来解决奇异点的影响而求出整个临界层的贡献。但在近似求出连续谱和谱函数时, 每个谱与谱函数的贡献不尽相同, 其权重系数取决于初始场及“位涡度”等, 我们的计算简单地认为其权重相同, 都取为1, 即认为每个谱的贡献大小相同, 然后将每个谱的流函数简单叠加。这种简化与真实连续谱计算稍有差别, 留待以后进一步讨论。

图3为使用连续谱方法进行的模拟, 图3a 东西风相当, 模拟出的反气旋发展时分裂为两个中心, 其中一个稳定少动, 另一个缓慢西移。图2b 东风加强, 与图3a 类似, 反气旋分裂出的小中心移动较快, 原来位置的中心较稳定。图3c 西风加强, 此时的环流较弱东移。

以上的结果同样得到, 环流的形式与基本风场结构有关, 与 Chebyshev 假谱方法的结果类似。所不同的是, 连续谱的思想是在临界层的附近用多个特征值来克服临界层的困难, 即用多个谱函数的叠加来近似, 因而环流有时表现为多个(两个)孤立波行为的叠加, 即两个孤立波相遇之后, 各自的移速形状并不改变, 各自仍按自己的方式移动。实际大气中副高是否也是多个孤立波的叠加呢? 这个现象很有必要留待以后研究。

以上讨论用的是理想风场, 现使用实际风场进行模拟。使用的是1981年5—10月平均

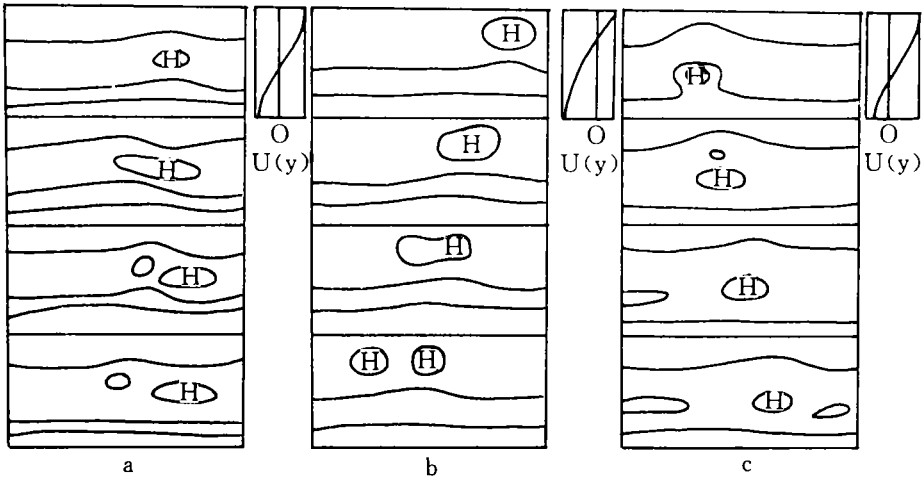


图3 连续谱方法模拟的副高型 Rossby 波
(a, b, c 右侧小图分别为相应的基本气流场)

风场,取 $10^{\circ}-40^{\circ}$ 的纬向风场,用 $u=u_0/10$ 无量纲化,用连续谱方法进行了数值计算。连续谱可达 $18/20$,但离散谱的情况我们也进行了计算。附表列出的是1981年实况西太平洋副高脊线位置及模拟情况的对比。

附表 1981年西太平洋副高脊线位置实况及模拟的对比

月 份	5	6	7	8	9	10
实况脊线($^{\circ}$ N)	15	20	28	26	24	20
离散谱脊线	15	20	34	25	25	20
移动方向	西	西	西	西	西	西
连续谱脊线($^{\circ}$ N)	23	/	34	/	/	21
移动方向	东	/	西	/	/	东

实况中,5、6月副高最南,7月最北,所计算的离散谱对应环流与实况相比,除7月份脊线偏北外,其它月份都极其接近。连续谱环流的情况与实际有些偏离,可能是临界层反射的影响,但其移动方向与实际是一致的。平均的临界层位置都在环流以南。

因此,不论使用理想风场还是实际风场,对离散谱和连续谱的计算得到的结果与实况都很接近。

3 结 语

统计结论认为:东南季风、副高、西风急流等系统的南北移动基本上同步,而副高脊线通常被认为是准定常波临界层位置。由以上的分析和数值计算的结果,可以得到以下初步的结论:

(1) 无论临界层存在与否,都可以形成副高型 Rossby 孤立波。虽然临界层的反射、吸收和超反射的特征可以引起副高型 Rossby 孤立波的变形等变化,但移动的基本特征相

似。

(2) 以上分析得到的非线性 Rossby 孤立波是在 β 平面或 β 随 y 变化的条件下,非线性大尺度大气运动的基本特征扰动之一。这种基本特征扰动可分两类。一类是在东西风基本气流下,非线性大尺度大气运动的副高型 Rossby 孤立波,其移动特征与东西风带相对强度有关,东风强于西风时,向西移动,而西风强于东风时,则向东移动。当基本气流发生突变时,副高型 Rossby 波也随之发生突变。另一类是在西风基本气流下,出现阻高型 Rossby 孤立波,有时也表现为偶极子形式。

以上的工作,都是在正压大气中进行讨论的,即在不考虑斜压大气中下沉或上升运动等时也可以形成副高或阻高。但这并不表示斜压大气对副高、阻高等系统的形成和维持没有显著的影响。因此,此问题还需在斜压大气中进一步研究。同时,临界层在不同基本气流下所引起的反射、吸收和超反射对副高型 Rossby 孤立波的具体影响究竟怎样,亦值得深入研究。

参考文献

- [1] Redekopp L.G. On the theory of solitay Rossby waves. *J Fluid Meth.* 1977. 82: 725—745.
- [2] Stewartson K. The evolution of critical layer of a Rossby wave. *Geophys Astrophys Fluid Dynamics.* 1978. 9: 185—200.
- [3] Warn T and Warn H. The evolution of a nonlinear critical level. *Stud Appl Math.* 1978. 59: 37—71.
- [4] Boyd J P. A Chebyshev polynomial method for computing analytic solutions to eigenvalue problems with application to the anharmonic oscillator. *J Math Phys.* 1978a. 19: 1445—1456.
- [5] Boyd. J P. Spectral and pseudospectral method foreign value and nonseparable boundary value problems. *Mon Wea Rev.* 1978b. 106: 1192—1203.
- [6] 卢佩生, 卢理, 曾庆存. 正压准地转模式的谱和扰动的演变. *中国科学 B 辑.* 1986. (11): 1225—1233.
- [7] 刘式达, 刘式适. 特殊函数. 北京: 气象出版社. 1988.
- [8] 范红, 缪锦海, 杨玉峰. 副高与阻高形成的 Rossby 孤立波理论 I. 不存在临界层. *气象学报.* 1996. 54 (2): 185—194.

THE THEORY OF SOLITARY ROSSBY WAVES OF THE FORMATION OF SUBTROPICAL HIGH AND BLOCKING HIGH PART II : WITH A CRITICAL LAYER

Fan Hong Miao Jinhai

(*Beijing Institute of Meteorology, Beijing 100081*)

Abstract

The solitary Rossby waves with a critical layer in the nonuniformed zonal flows in the barotropic atmosphere are studied. After the KdV or the modified KdV equation which were satisfied by the streamfunctions had been gotten, the chebyshev polynomials and the pseudo-spectral method were applied in solving the eigenvalue problems. The computation of ideal wind field showed that whether there was a critical layer or not, the Subtropical high solitary Rossby waves which had the same evolution patterns as the actual subtropical high's can be obtained. And the blocking high solitary Rossby waves which also resemble actual blocking high's could be gotten too. Through a second method by calculating continuous and discrete spectrum on or near the critical layer, results similar to those chebyshev pseudospectral method are obtained, which conform our theory.

Key words: Critical layer, Solitary Rossby wave, Pseudo-spectral method, Continuous spectral method.