

# 对流边界层中的一个双高斯型 PDF 扩散模式\*

朱忠湛\*\*      李宗恺

(南京大学大气科学系, 南京, 210008)

## 摘 要

对流边界层(CBL)中的污染扩散是非高斯型的。本文在下列三个假设下建立了双高斯型几率分布函数(PDF)模式: 1. 对流边界层任一确定高度铅直速度  $w$  的几率分布函数  $p_w$  由两个高斯分布迭加而成; 2. 从污染源释放的粒子具有源高的铅直速度几率分布, 且其轨迹是线性的; 3. 粒子在地面的反射为全反射, 在混合层高度  $Z_i$  为全反射或有部分吸收。然后分析了三个高度上铅直速度  $w$  的一些统计特征量, 比较了由 PDF 模式计算的横风向积分浓度和 Lamb 的数值模拟<sup>[1-3]</sup>, Deardorff 的水槽模拟<sup>[4-6]</sup> 结果, 并用美国 CONDORS 计划的外场试验资料<sup>[7]</sup> 对 PDF 模式进行了验证, 结果均相当一致。

**关键词:** 对流边界层, 扩散, 几率分布, 模式。

## 1 引 言

晴朗白天的边界层多为对流边界层, 湍流的产生主要由热力原因造成, 气流辐合成上升气流或热力气流, 一直上升到边界层顶  $z_i$ 。在 CBL 中, 对流湍流分布不对称, 铅直速度  $w$  的几率分布  $p_w$  是非高斯型的, 上升气流平均速度  $\bar{w}_+$  大于下沉气流平均速度  $\bar{w}_-$ , 而下沉气流覆盖的面积  $A_-$  大于上升气流的  $A_+$ ,  $w$  的众数  $\hat{w}$  小于 0<sup>[8]</sup>。

对 CBL 中扩散的研究, 人们愈来愈重视 CBL 的湍流铅直结构。李宗恺与 Briggs<sup>[9]</sup> 分别提出了 BG 和 GR 模式。BG 模式假设  $\hat{w}$  两边的几率分布均为高斯分布, 但具有不同的标准差; GR 模式的  $p_w$  包含一个以  $\hat{w}$  为中心、 $\sigma$  为标准差的高斯分布, 再在  $w > \hat{w}$  处加上一个基本形式为  $(1-w'/a\sigma)$  ( $a$  为系数) 的斜坡。Misra<sup>[10]</sup>, Weil<sup>[11]</sup> 在模式中均提出了二元大气的概念。即在 CBL 中, 气流可分为两种状态, 状态 1 含有更多的热力湍流, 状态 2 代表下沉的背景气流, 包含的湍能较少; 两种状态的几率分布均是正态的, 而实际的  $p_w$  即为两个高斯分布的总和。Quintarelli<sup>[12]</sup> 用实测资料验证了这个观点, 他根据湍流脉动频率的不同设计了状态因子  $I(t)$ , 它在两种状态的值分别为 1 和 0。

本文即在 Quintarelli 假设的基础上, 建立了双高斯型 PDF 模式, 从而导出横风向积分浓度的解析式, 成功地模拟了 CBL 中铅直方向的扩散。

\* 1992 年 7 月 7 日收到原稿, 1993 年 4 月 29 日收到修改稿, 该文得到自然科学基金资助。

\*\* 现在南京市环境保护科学研究所工作。

## 2 模 式

由于  $w$  的不对称几率分布, 将导致源的非对称铅直扩散。一些人, 如 Venkatram<sup>[13]</sup> 从源高处  $p_w$  的非对称出发, 提出了高架源的不同模式。在 CBL 中, 拉氏时间尺度很大(约为 300s), 以致释放到 CBL 中的被动粒子在很长一段距离仍保持原来的轨迹, 甚至到达混合层高度  $Z_i$  或地面为止。于是可作如下假设: 在高架源附近, 被动粒子的轨迹是线性的, 有同样的斜度  $w/u$ ,  $u$  为释放时气流通释源的水平速度, 当  $u$  为常数时, 平均时间横风向积分浓度为<sup>[9]</sup>:

$$\int \chi dy = \frac{Q}{x} p_w(w_z | z_i)$$

$Q$  为源释放率,  $\chi$  为粒子浓度,  $x$  为距源点下风向水平距离,  $p_w(w_z | z_i)$  表示源高为  $z_i$  时粒子到达  $(x, z)$  点的铅直速度  $w_z$  的几率密度。上式为无界情况下的横风向积分浓度的计算式。在实际大气中存在着上下边界, 假定地面与混合层顶均为全反射, 则到达计算点  $(x, z)$  粒子的铅直速度  $w_z$  有许多可能:

$$w_z = \bar{u}(-z_i \pm z + 2Nz_i)/x \quad (1)$$

其中,  $\bar{u}$  为整个混合层的平均水平速度,  $z_i$  为源高,  $N$  为一切自然数,  $|N|$  代表粒子在混合层顶反射的次数。

于是, 平均时间横风向积分浓度可写为:

$$\int \chi dy = \frac{Q}{x} \Sigma p_w(w_z | z_i) \quad (2)$$

$\Sigma$  表示所有可能的铅直速度几率密度之和。

无量纲横风向积分浓度为:

$$C_y = \bar{u}z_i \int \chi dy / Q = X^{-1} \Sigma w^* p_w \quad (3)$$

$X = (x/\bar{u})w^*/z_i$ , 为无量纲水平距离;  $w^* = (H^* z_i)^{1/3}$ , 为对流速度尺度,  $H^* = (g/T) \bar{w}'T'$ 。

由 Quintarelli 假设, 本文引入  $\alpha, \sigma_{w-}, \sigma_{w+}, W_-, W_+$  5 个参数, 将铅直速度的无因次几率密度分布用解析式表达为:

$$P_w = w^* p_w = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w-}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{w-}^2} (W - W_-)^2 \right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w+}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{w+}^2} (W - W_+)^2 \right] \quad (4)$$

式中, 大写字母表示无因次化的物理量, 如  $P_w = w^* p_w$ ,  $W = w/w_*$ ,  $W_- = w_-/w_*$ 。另外,  $\sigma_w$  为  $\sigma$  的无量纲量, 如  $\sigma_{w-} = \sigma_-/w_*$ 。 $\alpha$  代表  $P_w-W$  图(几率分布图)中状态 2 的  $P_w$  覆盖的面积, 显然  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $(1-\alpha)$  则代表状态 1 覆盖的面积,  $W_-$  与  $W_+$  分别为状态 2 和状态 1 的无量纲铅直速度的平均值,  $\sigma_{w-}, \sigma_{w+}$  分别为两种状态  $W$  的标准差, 一般的,  $\sigma_{w-} < \sigma_{w+}$ 。

从式(4), 我们可以求得  $W$  的  $n$  阶矩, 如  $\bar{W}^2, \bar{W}^3$ , 地面最大浓度值及其出现的水平距离  $C_{y,max}, X_{max}$ , 见附录。

假定粒子在地面和混合层顶全反射, 将式(2)、(4)代入式(3), 得到:

$$C_y = \frac{1}{X} \sum_N \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_-}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_- X)^2}{2(\sigma_{w_-} X)^2} \right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_+}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_+ X)^2}{2(\sigma_{w_+} X)^2} \right] \right\} \quad (5)$$

式中,  $Z_s, Z$  均为无量纲高度,  $Z_s = z_s/z_i, Z = z/z_i$ . 我们可以看出,  $|W_- X|$  这一项代表了高架源浓度轴线下沉项,  $|W_+ X|$  则是浓度轴线上升项, 由于  $\sigma_{w_-}$  一般为  $\sigma_{w_+}$  的  $1/2$ , 对高架源, 浓度轴线下沉现象极其明显。

### 3 结果

Lamb<sup>[3]</sup> 从 Deardorff<sup>[4]</sup> 的水槽实验资料中, 用大涡数值模拟计算出  $Z_s = 0.25, 0.5, 0.75$  三种不同高度  $W$  的几率密度分布. 本文用双高斯模式也分别计算了这三个高度的  $P_w$  分布, 如图1所示。

图1a, b, c 左边图中的两个高斯分布曲线代表了两种状态的  $P_w$ , 可以看出, 下沉气流  $P_w$  分布较窄, 上升气流  $P_w$  分布较宽, 说明  $\sigma_{w_-} < \sigma_{w_+}$ , 其  $\alpha, W_+, W_-, \sigma_{w_+}, \sigma_{w_-}$  等参数见附表, 图1a, b, c 右图所示的三幅图中, 实线为本模式的计算分布, 即为左图两个正态分布曲线的迭加, 其中的小黑点为 Lamb<sup>[3]</sup> 的大涡模式计算的结果, 很明显, 两种模式的  $P_w$  相当一致, 这实际上支持了双高斯模式的假设。

对于横风向积分浓度的研究, 可以 Willis、Deardorff<sup>[5,6]</sup> 的水槽实验和 Lamb<sup>[1,2]</sup> 的大涡数值模拟为代表, 为了和他们的结果进行比较, 我们分别计算了地面源、源高  $Z_s = 0.25, 0.5, 0.75$  的  $C_y$ 。

式(5)假定粒子在地面的混合层顶全反射, 这一假定对 CBL 中部及下部的浓度分布不会引起太大误差, 在上部就不能保证, 因为上边界不是刚性的, 其物理机制很复杂, 为改进上部的结果, 本文采用了上边界有部分吸收的边界条件, 即:

$$C_y = \frac{1}{X} (1 - K)^{|N|} \sum_N \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_-}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_- X)^2}{2(\sigma_{w_-} X)^2} \right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_+}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_+ X)^2}{2(\sigma_{w_+} X)^2} \right] \right\} \quad (6)$$

$K$  为吸收系数,  $0 \leq K \leq 1$ 。

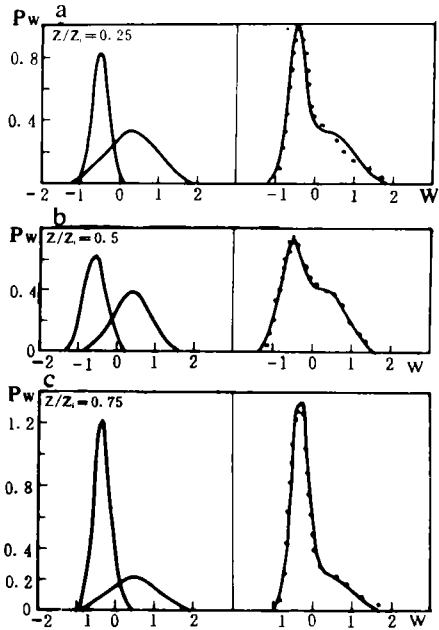


图1 双高斯型模式计算的  $P_w$  曲线与 Lamb 结果的比较  
(左侧图分为两种状态下的  $P_w$  曲线, 右侧图分为迭加后的结果, 图中点为 Lamb 的结果)

附表 三个高度上的双高斯模式参数

Z	W <sub>-</sub>	W <sub>+</sub>	σ <sub>w-</sub>	σ <sub>w+</sub>	α
0.25	-0.42	0.34	0.21	0.64	0.45
0.5	-0.49	0.43	0.30	0.51	0.48
0.75	-0.26	0.47	0.21	0.56	0.66

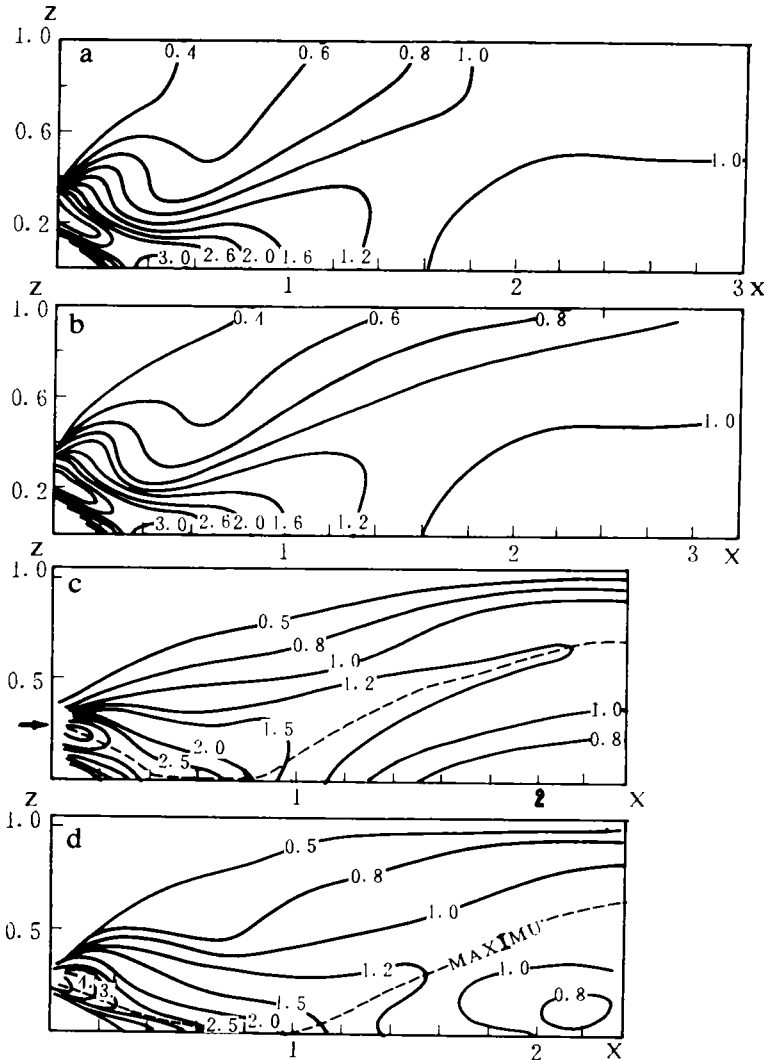


图2 本模式计算结果与水槽模拟、大涡数值模拟结果对比图  
 (Z<sub>0</sub>=0.25.图中等值线为无因次横向风积分浓度。a. 本模式(在 Z<sub>0</sub> 处全反射);  
 b. 本模式(改进后); c. 水槽模拟(文献[4]); d. 大涡数值模拟(文献[3])

图2是源高 Z<sub>0</sub>=0.25 的计算结果, 图中给出了 x-z 平面无因次横向风积分浓度 C<sub>y</sub> 的等值线。其中, a 是混合层顶为全反射的双高斯模式的计算结果, b 为改进后的双高斯模式

的计算结果, c 为 Willis 和 Deardorff 水槽实验所得, d 为 Lamb 数值模拟的结果。从图2可见, 三种不同方法模拟的结果大体相符, 尤其在 CBL 中下部相互之间基本一致。C<sub>y</sub> 最大浓度轴线首先下沉, 在 X=0.4 处到达地面, 然后在一段距离内保持最大, 直到 X=0.8, 随后, 最大轴线浓度上升, 在下风向远处, 浓度在 0.85z<sub>i</sub> 高度下混合得很好, 且出现了一个最小值。本模式成功在模拟了高架源浓度轴线下沉的特征, 其地面最大浓度的数值和位置与另两种方法的结果非常接近, 本模式的结果更接近于 Lamb 的大涡数值模拟的结果, 浓度轴线上升得没有水槽实验的结果那么快。Willis 和 Deardorff<sup>[6]</sup>认为这种差异是由于他们释放的示踪剂的浮力造成的。

图2a 与 c、d 图形的主要差别在 CBL 的上部, 特别在 X>1.0 的范围内, 双高斯模式给出的浓度值偏大。图2b 由于采用了部分吸收的上边界条件, 结果显然比 a 要好, 这也说明在处理上边界时, 不能将其作为刚边界, 而应是软边界。这在 Sun 和 Chang<sup>[14]</sup>的高阶扩散模拟、李宗恺与杜曙明<sup>[15]</sup>的随机扩散模拟中亦有类似现象。

我们还计算了 Z<sub>i</sub>=0.5, 0.75, 0 三种情况下的无因次横风向积分浓度。比较分析的结论与 Z<sub>i</sub>=0.25 的情形基本相同, 在此不再赘述。

此外, 本文用 CONDORS 外场实验资料<sup>[7]</sup>计算了8个个例, 结果很成功。图3为本模式用 CONDORS 11-83 计划实测资料计算的结果与 CONDORS 实测浓度资料的比较。图中均显示出一对高、低浓度中心, 出现的水平很一致, 只是本模式计算的高浓度中心的铅直位置偏高, 这亦是由于采用刚性上边界所致。

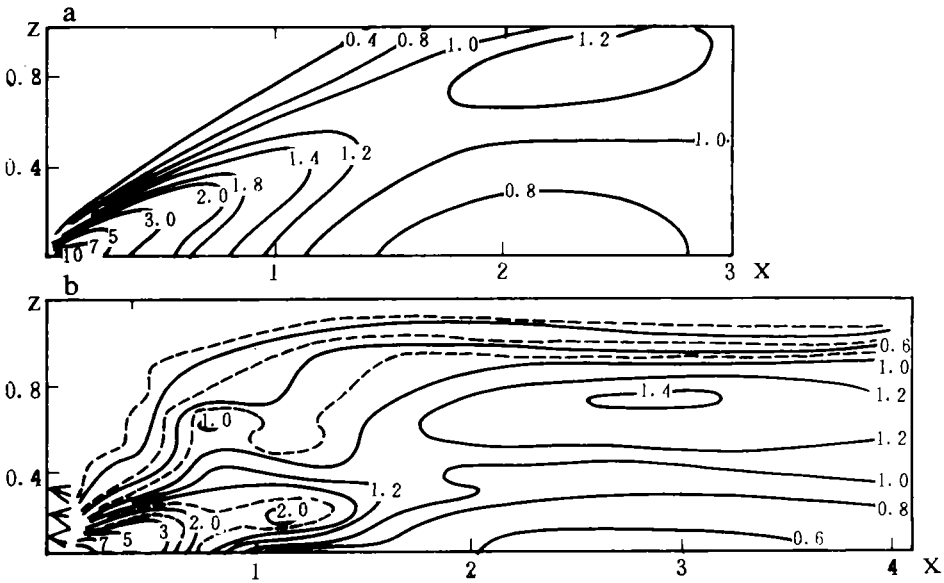


图3 无因次横风向积分浓度

(a. 本模式用 CONDORS 实测资料计算的结果; b. CONDORS 11-83 计划的实测资料)

## 4 讨 论

本文采用二元大气的概念,发展了一个解析的 CBL 铅直扩散模式。用 Lamb 的大涡模拟和 Willis 与 Deardorff 水槽模拟的结果,以及 CONDORS 外场试验资料对模式的检验表明,本文所发展的模式是成功的,进一步支持了 Quintarelli 假设。

在均匀平坦下垫面上,CBL 中的铅直湍流是非正态的,横风向积分浓度的空间分布,以及地面最大浓度的数值与位置同高斯模式的计算结果均有明显差异。而传统的 K 模式也不适用于 CBL 中的铅直扩散,大涡团数值模拟效果虽好,但计算量极大,本文所发展的双高斯模式以最直接的形式给出了  $C_y$  的解析式,其物理意义清楚,仅从解析式中就可看到  $C_y$  轴线浓度的下沉趋势,且计算量小。本模式反映了 CBL 中铅直湍流的主要特征,成功地模拟出 CBL 的铅直扩散,并得到 CONDORS 计划外场实验资料的验证。不足之处是还不能很好地处理上边界的复杂过程。

## 附 录

$X_{\max}$  和  $C_{y\max}$  计算公式的推导过程。

$$C_y = X^{-1} \Sigma P_w \quad (\text{A1})$$

$$P_w = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_-}}} \exp \left[ -\frac{(W - W_-)^2}{2\sigma_{w_-}^2} \right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_+}}} \exp \left[ -\frac{(W - W_+)^2}{2\sigma_{w_+}^2} \right] \quad (\text{A2})$$

$$W = \frac{\bar{u}}{x} (-z_s \pm z + 2Nz_s) \quad (\text{A3})$$

将(A2)、(A3)代入(A1),得到:

$$C_y = \frac{1}{X} \sum \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_-}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_- X)^2}{2(\sigma_{w_-} X)^2} \right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_{w_+}}} \exp \left[ -\frac{(-Z_s \pm Z + 2N - W_+ X)^2}{2(\sigma_{w_+} X)^2} \right] \right\} \quad (\text{A4})$$

假定  $\bar{W}=0$ , 有:

$$\bar{W} = \alpha W_- + (1-\alpha)W_+ = 0 \quad (\text{A5})$$

$$\bar{W}^2 = \alpha(\sigma_{w_-}^2 + W_-^2) + (1-\alpha)(\sigma_{w_+}^2 + W_+^2) \quad (\text{A6})$$

$$\bar{W}^3 = \alpha(3\sigma_{w_-}^2 W_- + W_-^3) + (1-\alpha)(3\sigma_{w_+}^2 W_+ + W_+^3) \quad (\text{A7})$$

为求得  $\hat{W}$ , 令:

$$\frac{dP_w}{dW} = 0 \quad (\text{A8})$$

得到:

$$\hat{W} = \frac{1}{1+A} W_- \quad (\text{A9})$$

$$A = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_+}^3} \exp\left[-\frac{(\hat{W} - W_+)^2}{2\sigma_{w_+}^2}\right]}{\alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_-}^3} \exp\left[-\frac{(\hat{W} - W_-)^2}{2\sigma_{w_-}^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_+}^3} \exp\left[-\frac{(\hat{W} - W_+)^2}{2\sigma_{w_+}^2}\right] \right\}} \quad (\text{A10})$$

由于  $\hat{W} < 0$ ,  $\exp\left[-\frac{(\hat{W} - W_+)^2}{2\sigma_{w_+}^2}\right]$  接近于 0, 即  $A \simeq 0$ ,  $\hat{W} \simeq W_-$ 。在用 (A9)、(A10) 求  $\hat{W}$  时, 采用迭代法。

在源高  $Z_s < 0.5$ , 从  $z_s$  反射的粒子对地面浓度的贡献很小, 特别在  $X \leq 1$  时, 因此到达地面的粒子速度可以认为  $w = -\bar{u}z_s/x$ , 而地面浓度  $\int \chi dy = \frac{2Q}{x} p_w$ , 当地面出现最大浓度时, 有  $\frac{d p_w}{d w} = -p_w/w$ , 这种性质出现在  $W < \hat{W}$ 。此时, 上升气流对这一部分的  $W$  分布没有

多大影响, 可以认为  $P_w = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_{w_-}} \exp\left[-\frac{(W - W_-)^2}{2\sigma_{w_-}^2}\right]$ 。因为  $\hat{W} \simeq W_-$ , 于是有

$$W' = W - \hat{W} = -\frac{1}{2} [W + (W_-^2 + 4\sigma_{w_+}^2)^{1/2}] \quad (\text{A11})$$

将 (A11) 代入  $w = -z_s \bar{u}/x$ , 得到:

$$X_{smax} = 2Z_s / [(4\sigma_{w_-}^2 + W_-^2)^{1/2} - W_-] \quad (\text{A12})$$

$$C_{ysmax} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}Z_s\sigma_{w_+}} [(4\sigma_{w_-}^2 + W_-^2)^{1/2} - W_-] \exp\left\{-\frac{[(4\sigma_{w_+}^2 + W_-^2)^{1/2} + W_-]}{8\sigma_{w_-}^2}\right\} \quad (\text{A13})$$

## 参考文献

- [1] Lamb R G. A numerical simulation of dispersion from an elevated point source in the convective boundary layer. *Atmos Environ*, 1978, 12: 1297-1304.
- [2] Lamb R G. The effect of release height on material dispersion in the convective planetary boundary layer. Preprints Fourth Symp on Turbulence, Diffusion and Air Pollution. Reno, Amer Met Soc, 1979, 27-33.
- [3] Lamb R G. Diffusion in the convective boundary layer. In *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modeling* (edited by Nieuwstadt F T M and van Dop H), D. Reidel, Boston, 1982, 159-229.
- [4] Willis G E and Deardorff J W. A laboratory model of the unstable boundary layer. *J Atmos Sci*, 1982, 31: 1297-1307.
- [5] Willis G E and Deardorff J W. A laboratory study of dispersion from an elevated source in a convective mixed layer. *Atmos Environ*, 1978 12: 1305-1313.
- [6] Willis G E and Deardorff J W. A laboratory study of dispersion from a source in the middle of the convectively mixed layer. *Atmos Environ*, 1981, 15: 109-117.
- [7] Kaimal J C, Eberhard W L, Moninger W R, Gaynor J E, Troxel S W, Uttal T, Briggs G A and Start G E. Project CONDORS: convective diffusion observed by remote sensors. NOAA/ERL/Boulder Atmospheric Observatory, report No 7 (available from NOAA/ERL, Boulder, CO), 1986.
- [8] Caughey S J, Kitchen M and Leighton J R. Turbulence structure in convective boundary layers and implications for diffusion. *Boundary-layer Met*, 1983, 25: 345-352.
- [9] Li Z and Briggs G A. Simple PDF models for convective driven vertical diffusion. *Atmos Environ*, 1988, 22: 55-74.

- [10] Misra P K. Dispersion of non-buoyant particles inside convective boundary layer. *Atmos Environ*, 1982, 16: 239—243.
- [11] Weil J C, Corio L A and Brower R P. Dispersion of buoyant plumes in the convective boundary layer. Extended Abstract for the Fifth Joint Conference on Application of Air Pollution Meteorology with APCA, Nov 18—21. Published by the American Meteorological society, Boston. Mass, 1986.
- [12] Quintarelli F. A study of velocity distribut in the planetary boundary layer. *Boundary-Layer Met*, 1990, 52: 209—219.
- [13] Venkatram A. On dispersion in the convective boundary layer. *Atmos Environ*, 1983, 17: 529—533.
- [14] Sun W Y and Chang C Z. Diffusion model for convective layer. Part 2: plume released from a continuous point source. *J Appl Meteor* 1986, 25: 1454—1464.
- [15] 李宗恺, 杜曙明. 一个对流边界层中的随机扩散模式, 1992(待发表).

## A DOUBLE GAUSSIANS PDF MODEL ON DISPERSION IN CONVECTIVE BOUNDARY LAYERS

Zhu Zhongzhan Li Zongkai

(*Department of atmospheric science, Nanjing University, Nanjing, 210008*)

### Abstract

The dispersion in the convective boundary layers (CBL) is non Gaussians. A double Gaussians PDF model is presented on the basis of three assumptions: 1. the probability distribution function of vertical velocity,  $p_w$  at any given height is the sum of two Gaussian distributions; 2. the tracers are responding to  $p_w$ , the probability distribution function, at the source height with straight line trajectories; 3. the reflection of tracers at surface and  $Z_i$ , the mixing depth, is simple reflection, or some of the tracers are absorbed at  $Z_i$ . Some statistical characteristics of vertical velocity  $w$  at three heights are analysed. The contrast of crosswind integral concentration between this model and Lamb's numerical modeling, Deardorff's tank experiment shows considerable agreement. The double gaussians model is also supported by the fields observed data of project CONDORS in the U. S. A.

**Key words:** Convective boundary layer. Diffusion. Probability distribution. Model.