

多圈涡旋等值线动力学的研究*

罗哲贤

(南京气象学院, 南京, 210044)

摘 要

将单圈涡旋等值线动力学推广到多圈涡旋的等值线动力学。在等值线动力学的框架内, 实施了 6 组计算。结果显示涡旋移行过程中逆时针打转的现象, 该现象有清楚的前兆可寻。讨论了涡旋松紧程度对涡旋移向的影响以及涡旋非对称结构与涡旋移速之间的联系。这些结果与以往数值试验或动力学分析的结果较为一致。

关键词: 多圈涡旋, 等值线动力学, 柯氏力, 非线性。

1 引 言

大尺度大气运动遵循非线性偏微分方程的约束。如求解析解, 自变元 x, y 在定义域内所有点的集合(记为集 D)中取值。如用差分法求数值解, 自变元 x, y 在定义域内所有网格点的集合(记为集 E)中取值。相应地, 需要求出因变量在所有这些点或网格点上的取值及其随时间的变化。另一方面, 若只需了解因变量场的主要特征而不是全部细节, 则只需求出因变量在集 D_1 和 E_1 中的取值即可。这里, 集 D_1, E_1 分别为集 D, E 的某个子集。现以 500hPa 位势高度场为例。设该高度场所有网格点构成点集 E , 高度场上 5880, 5840gpm 等特征等值线所经过的点的全体构成子集 D_1 。再在这些特征等值线上选取足够多的结点, 用这些离散的结点的连线代表连续曲线, 设这些结点的全体构成了集 E_1 。如用数值模式求出集 E 内所有点上的位势高度值, 可得细节性的认识, 这是差分法的途径; 如仅求出子集 E_1 内各点的位势高度值, 可得到诸特征等值线的形状和范围, 从而得到主要特征的认识, 这是等值线动力学的途径。两者之间的一个根本差别在于, 前者网格点的坐标一旦给定一般即固定不变, 后者集 E_1 中各点的坐标随时间不断改变。

等值线动力学用于涡旋运动的研究已有若干结果, 如文献[1]、[2]。这些研究中, 没有考虑柯氏力随纬度变化的效应, 同时涡旋以一根闭合等值线代表, 即单圈涡旋的情况。如所周知, 无论是中高纬度的大尺度涡旋, 还是副热带纬度的热带气旋, β 效应均是一个极重要的物理过程。因此, 我们将 β 效应引进了等值线动力学^[3]。但文献[3]中仍沿用了单圈涡旋的假设。本文将进一步分析含有 β 效应的多圈涡旋等值线动力学的问题。

2 多圈涡旋等值线动力学概述

* 1992 年 9 月 10 日收到原稿, 1992 年 12 月 24 日收到修改稿。本课题是国家自然科学基金资助项目。

取准地转正压涡度方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 ψ 为地转流函数, $\beta = df/dy$, f 为柯氏参数, 取 β 平面中线处 $\varphi_0 = 20^\circ\text{N}$. 令 $L = 600\text{km}$, $V = 40\text{ms}^{-1}$, 以 $L, L/V$ 分别为特征水平尺度和特征时间尺度, 将式(1)无量纲化. 再将方程写为以下形式:

$$\frac{d\xi_a}{dt} = 0 \quad (2)$$

式中

$$\xi_a = \nabla^2 \psi + f \quad (3)$$

引进 β 平面假定, 令

$$f = f_0 + \beta y \quad (4)$$

式(4)代入式(3), 得

$$\nabla^2 \psi = F(x, y) \quad (5)$$

$$F(x, y) = F_1(x, y) - \beta y$$

$$F_1(x, y) = \xi_a - f_0$$

对于用等值线动力学来研究大尺度涡旋运动而言, 式(2)是一个基础性条件. 式(2)意味着, 若初始时刻微体元 A 位于绝对涡度 ξ_a 的某条等值线上, 由于 ξ_a 的个别变化为零, 在以后的演变过程中, 微体元 A 必须始终位于该等值线上.

本文中, 不考虑环境流场的作用, 只计及涡旋内力的作用. 由式(5), 可从 $F(x, y)$ 求 $\psi(x, y)$:

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} F(x', y') \ln \frac{1}{r(x', y', x, y)} d\sigma \quad (6)$$

式中 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $d\sigma = dx' dy'$.

设初始时刻涡旋具有 N 条闭合等值线(图1). 在等值线 Γ_i 上, 绝对涡度为 $\xi_a (i=1, 2, \dots, N)$. 并设等值线 Γ_i 与 Γ_{i+1} 之间围成的区域为 D_{i+1} , 等值线 Γ_1 围成的区域为 D_1 , Γ_N 以外的区域为 \bar{D} . 引进常值涡旋的假定^[1], 即令在区域 D_i 中, 绝对涡度处处相同并等于 ξ_a . 在不同的区域, 绝对涡度取值不同.

由式(6), 可得

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} (F_1(x', y') + \beta y') \ln(1/r) d\sigma \quad (7)$$

这里已假定最外一圈等值线 Γ_N 的直径足够大, 不考虑 Γ_N 以外区域 \bar{D} 的影响, 即令 \bar{D} 处 $\xi_{a+1} = F(x', y') = 0$.

注意到 ξ_a 在 D_i 内取常值, 式(7)又可写为

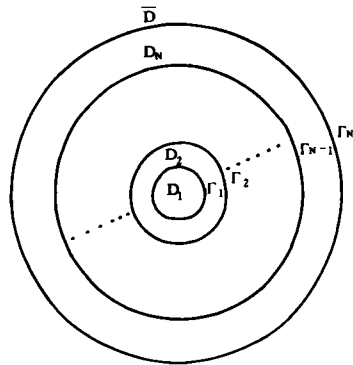


图1 多圈涡旋示意图

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N F_{1i} \iint_{D_i} \ln(1/r) d\sigma + \iint_{D_i} \beta y' \ln(1/r) d\sigma \quad (8)$$

式中 $F_{1i} = \xi_a - f_0$ 。

由 $\psi(x, y)$ 可求出 $u(x, y), v(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N F_{1i} \iint_{D_i} \frac{\partial}{\partial y} (\ln(1/r)) d\sigma + \iint_{D_i} \beta \frac{\partial}{\partial y} (y' \ln(1/r)) d\sigma \quad (9)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N F_{1i} \iint_{D_i} \frac{\partial}{\partial x} (\ln(1/r)) d\sigma + \iint_{D_i} \beta \frac{\partial}{\partial x} (y' \ln(1/r)) d\sigma \quad (10)$$

应用格林公式, 不难证明

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Delta \xi_a \oint_{\Gamma_i} \ln r dx' + \frac{\beta}{2\pi} \oint_{\Gamma_N} H dx' + Q dy' \quad (11)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Delta \xi_a \oint_{\Gamma_i} \ln r dy' + \frac{\beta}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} R dy' \quad (12)$$

式中 $\Delta \xi_a = \xi_a - \xi_{a+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$

$$H = -\frac{1}{2} (y - y') \ln r + \frac{y'}{4} + y \ln r$$

$$R = -\frac{1}{2} (x - x') \ln r - \frac{x'}{4}$$

在式(8)、(9)、(10)、(11)、(12)中, 左端自变元 x, y 均限定在等值线 $\Gamma_i (i=1, 2, \dots, N)$ 上取值。当左端用 Γ_i 上的 x, y 代入时, 右端 r, H, R 中含有的 x, y 亦用 Γ_i 上相应坐标代入, 故对不同等值线而言, $u(x, y), v(x, y)$ 可取不同值。

实际计算时, 对每条等值线 Γ_i 都离散化, 即对每条闭合等值线 Γ_i 均作其内接 M 边多边形, 以等值线上多边形的 M 个顶点为结点, 用 M 个结点的连线来代替等值线 Γ_i 。然后对每一条等值线 Γ_i 而言, 用结点 J 处的坐标 (x_j, y_j) 代入(11)、(12), 即可求出等值线 Γ_i 上结点 J 处的 $u_i(x_j, y_j), v_i(x_j, y_j) (j=1, 2, \dots, M)$ 。本文中, 令 $M=36$, 内(外)圈等值线上结点之间的距离小(大), 诸结点之间的距离在33—200km 之间。

式(11)、(12)右端含有以 x', y' 为变元的曲线积分。该曲线积分的形式不能用于直接计算, 还需进行变量变换等运算。有关推导在文献[3]中已详细列出, 这里从略。

求出 N 条等值线上各个结点处的运动速度 $u_i(x_j, y_j), v_i(x_j, y_j) (i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M)$ 以后, 根据现时刻诸结点的坐标和运动速度, 可以求出各个结点在下一时刻的坐标。如此循环往复, 就可得到 N 条等值线上结点位置随时间的演变。如上所述, 本文未计环境流场的作用, 只考虑涡旋区域内部的物理过程。在此种假定下, 我们的计算表明, 如令 β 为零, 则多圈涡旋中心的位置始终不变。在 β 项作用下, 多圈涡旋会一边变形, 一边移动。这样就可以用等值线动力学的途径初步分析大尺度多圈涡旋的移行问题。本文中时间步长为5min, 起步时用前差, 接着用中央差加滤波方案^[3]。

本文实施了6组计算。在第1—4组计算中, 初始涡旋均呈椭圆形, 记长、短轴半径分别为 a_k, b_k , 为无量纲量。

(1) $N=1$, 即单圈涡旋。 $a_1=2.0, b_1=1.8, \xi_{a1}=1.5$ 。

(2) $N=2$, 2圈涡旋。 $(a_1, a_2) = (1.0, 2.0)$, $(b_1, b_2) = (0.9, 1.8)$, $(\xi_{a1}, \xi_{a2}) = (2.4, 1.2)$ 。

(3) $N=4$, 4圈涡旋。 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0.45, 0.90, 1.35, 1.80)$, $(\xi_{a1}, \xi_{a2}, \xi_{a3}, \xi_{a4}) = (3.83, 1.91, 1.48, 0.99)$ 。

(4) $N=6$, 6圈涡旋。 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (0.33, 0.67, 1.00, 1.33, 1.67, 2.00)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = (0.297, 0.603, 0.900, 1.197, 1.503, 1.800)$, $(\xi_{a1}, \xi_{a2}, \xi_{a3}, \xi_{a4}, \xi_{a5}, \xi_{a6}) = (4.129, 2.755, 1.837, 1.500, 1.207, 1.000)$ 。

在第2—4组计算中,等值线在初始时刻呈同心椭圆形状。最外一圈等值线的长轴、短轴半径均等于2.0和1.8,这与第1组计算中单圈涡旋的情况相同。在第1组试验中,涡旋区域内绝对涡度处处相同, $\xi_{a1}=1.5$ 。在第2—4组计算中,涡旋区域内等值线两侧的绝对涡度不同,但整个涡旋区域绝对涡度的平均值仍然相同,亦等于1.5。对比第1—4组计算的结果,可以初步分析涡旋内部结构不同对涡旋移动的影响。

在第1—4组计算中,初始场椭圆的参数方程为 $x_i = a_i \cos \theta$, $y_i = b_i \sin \theta$ ($i=1, 2, \dots, N$)。对同一根等值线而言, a_i, b_i 为常数,圆形沿 x, y 轴是对称的。为分析非对称涡旋的移行,在第5,6组计算中,初始涡旋沿 x, y 轴均不对称。相应地,对同一根等值线而言, a_i, b_i 不再取为常数。令 a_i, b_i 在第 I、II、III、IV 象限的取值分别为 a_{ik}, b_{ik} ($k=1, 2, 3, 4$)。 a_{ik}, b_{ik} 取不同值,可得不同的非对称结构。

(5) $N=4$, 4圈涡旋。令 $a_{11}=a_{14}=b_{11}=b_{12}=i \times 0.6$, $a_{12}=a_{13}=b_{13}=b_{14}=i \times 0.3$ ($i=1, 2, 3, 4$)。 $(\xi_{a1}, \xi_{a2}, \xi_{a3}, \xi_{a4}) = (4.0, 3.0, 2.0, 1.0)$ 。该初始场系 SW 象限等值线密集, NE 象限等值线疏松的准椭圆形状。

(6) $N=4$, 4圈涡旋。令 $a_{11}=a_{14}=b_{11}=b_{12}=i \times 0.3$, $a_{12}=a_{13}=b_{13}=b_{14}=i \times 0.6$ ($i=1, 2, 3, 4$)。 $(\xi_{a1}, \xi_{a2}, \xi_{a3}, \xi_{a4}) = (4.0, 3.0, 2.0, 1.0)$ 。系 NE 象限等值线密集, SW 象限等值线疏松的准椭圆形状的初始场。

3 计算结果

3.1 涡旋疏密程度对移向的作用

实际大气中,在太平洋上生成的台风向西移动抵达 130°E 附近时,有的转向偏北方向影响中国东部沿海和日本;有的转向偏南方向影响中国华南和海南。台风沿南北方向移动的机理问题至为重要,但研究结果相对较少。近来,Ohnishi^[4]对此做了动力学分析。结果认为,对空间尺度相同的涡旋而言,若等值线分布密集(称为紧涡旋),则涡旋向偏北方向移动;若等值线分布疏松(称为松涡旋),则涡旋向偏南方向移动。我们用 101×101 格点的差分格式实施的几组试验中,也得到相似的结果^[5]。

如上所述,在第1—4组计算中,涡旋的空间尺度和绝对涡度的平均值都相同,只是等值线的疏密程度不同,分别具有1,2,4,6根等值线。需要说明的是,即使这里取6根等值线,与一般台风涡旋相比,仍属疏松的涡旋。这里对第1—4组计算结果进行比较,主要想检验一下,是否涡旋等值线分布愈疏松,移向愈偏南。其它的问题需要进一步的工作。

在4组计算中的涡旋中心移动路径图(图2)上,点O与点A连线代表的移向分别为 $207.0^\circ, 231.7^\circ, 234.5^\circ, 240.0^\circ$;点O与点B连线代表的移向分别为 $200.0^\circ, 211.1^\circ$,

218.7°, 225.0°。涡旋愈疏松, 移向愈偏南。这与文献[4]较为一致。

3.2 涡旋移动过程中逆时针打转的现象

实际大气中, 台风在移动过程中有时会沿逆时针方向打转, 造成移速和移向的突然变化, 给预报带来困难。我们曾用数值模式初步分析过逆时针打转异常路径的可能原因^[6]。本文在等值线动力学的框架内也得到了多圈涡旋逆时针打转的现象(图2b—d)。若为单圈涡旋则路径只有摆动而无打转(图2a)。在单圈涡旋下我们做了另外4组计算, 积分时间为5个模式日。参数: $a=0.5, 1.0, 1.5, b=0.9 \times a, \xi_{a1}=1.5$; $a=1.5, b=1.35, \xi_{a1}=2.5$ 。计算结果均无打转现象。注意到常值涡旋的假定, 单圈涡旋内部绝对涡度处处相同, 不存在涡旋内部不同区域之间的非线性相互作用。在多圈涡旋的情况下, 存在着这种相互作用。据此, 似乎可以认为, 涡旋内部不同区域之间的非线性相互作用是引起逆时针打转的可能原因之一。

3.3 涡旋移动过程中逆时针打转的前兆现象

分析逆时针打转异常路径可能原因的目的, 在于认识逆时针打转的物理过程, 探索打转的前兆现象, 逐步提高预测的把握程度。涡旋内部不同区域之间的非线性相互作用能够直接引起涡旋结构的变化。为了大致描述涡旋的结构, 引进结构参数 K 。 K 的定义是 $K = OQ_{SW}/OQ_{NE}$, 其中 Q_{SW} 和 Q_{NE} 分别为过涡旋中心点 O 作的一条 NE—SW 向的直线与从中心向外数起的第 p 根等值线相交的交点。在第2—4组计算中, 分别令 $p=2, 4, 6$ 。若 K 大(小)于1, 则涡旋为 NE(SW) 象限等值线密集, SW(NE) 象限等值线疏松。根据第2—4组计算输出的涡旋图形, 每隔6个模式小时计算一次 K 值。三组计算中, K 值均随时间呈起伏式变化(图3)。当 K 值达到图3上低谷点 C 时, 涡旋 SW(NE) 象限等值线最密集(疏松)。

值得指出的是, 图3上点 C 相应于图2b—d 路径图上点 C 的位置。在路径图上, 点 C 位于打转点 D 以前6个模式小时。对照图2、图3可见, 结构参数 K 达到低谷点时, 即涡旋等值线在 SW 象限最密集, NE 象限最疏松, 涡旋 SW—NE 向非对称结构最明显时, 涡旋立刻就打转。在用 101×101 格点的差分格式实施数值试验时, 也得到类似的结果^[6]。

3.4 涡旋结构与涡旋移速的联系

近来, 关于台风结构与台风沿东西方向移速 v_x 之间的关系已引起较多的注意。根据第5、6组计算结果, 每隔3个模式小时计算一次涡旋结构参数 K 和相应的沿东西方向的移速 v_x , 然后计算 K 与 v_x 之间的相关系数 R_0 ; 结果: 第5组计算 $R_0 = -0.863$, 第6组计算 R_0

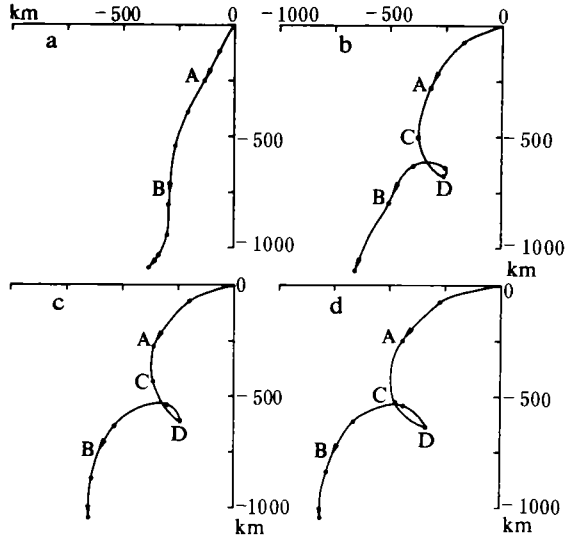


图2 第1—4组计算中的涡旋中心移动路径图
(a)单圈涡旋, (b)2圈涡旋, (c)4圈涡旋, (d)6圈涡旋。每隔6个模式小时注明一次涡旋中心的位置)

$= -0.910$, 相关均显著。这意味着, NE(SW)象限等值线愈密(疏), 涡旋向西移动愈快; NE(SW)象限等值线愈疏(密), 涡旋向东移动愈快。这个结果是合理的。

4 结果与讨论

大气运动所受的物理约束为非线性偏微分方程。由于直接求解的困难, 需要若干简化。一般有两类简化思路。一类是引进种种假设, 简化方程本身, 将原方程转化为易于求解的形式, 如经约化摄动将正压涡度方程约化为 KdV 方程, 又如经低谱途径将正压涡度方程转化为低阶非线性系统等。这类简化思路已得到广泛的应用。

另一类简化思路是保留原方程的形式不变, 对变量的定义域或相空间简化。丑纪范^[7]指出: “在研究自然现象的决定论因果性规律性时, 理想化是不可避免的。实际现象的研究并不总是照着增加问题中所引用的参数的数目这一方向发展; 恰恰相反, 研究者的技巧正在于寻找一个非常简单的相空间 Ω , 使得当我们把实际过程换成点 ω 在这个空间中的因果式变迁过程时, 仍能抓住实际过程的主要方面”。我们认为,

变量场特征等值线上的结点就构成了这样一种非常简单的相空间。只是对这个相空间 Ω 内的点求解, 而不是对原方程定义域内所有点求解, 可以抓住问题的主要特征, 使问题简化。这是等值线动力学的研究思路, 值得深入思考, 继续研究。

在等值线动力学的研究领域内, 一般用单圈等值线代表一个涡旋^[1,2]。本文研究了多圈涡旋等值线动力学的问题, 分别用 2, 4, 6 圈等值线代表涡旋。在数值计算中, 得到了涡旋移动过程中逆时针打转的现象, 指出这种现象是有前兆可寻的。这个前兆就是 SW 象限等值线密集、NE 象限等值线疏松的非对称结构最为显著, 结构参数 K 值达到低谷。结果还表明, 涡旋松紧程度对涡旋移向有影响能力; 涡旋非对称结构与涡旋沿东西向移速之间存在显著相关等。这些结果均在等值线动力学的框架内取得, 与以往数值试验或动力学分析的结果较为一致。

关于台风逆时针打转的机理问题, 在文献[6]中认为与局域热源的作用有关。本文未引进局域热源, 仅含有涡旋不同区域之间的非线性作用, 同样复制出逆时针打转的现象, 表明打转异常路径形成原因的多样性。

本文尽管引进了多圈涡旋, 但仍然是十分简化的理论模型。用等值线动力学分析大气科学的问题, 仍有不少有待完善与研究之处, 这些需要进一步的工作。

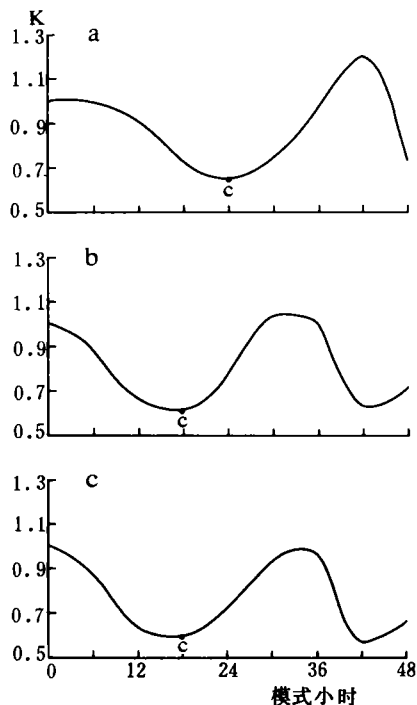


图3 第2—4组计算中, 结构参数 K 随时间的变化
(a)2圈涡旋, (b)4圈涡旋, (c)6圈涡旋。

参考文献

- [1] Zabusky N J et al. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions, *J Computational Physics*, 1979, 30: 96—106.
- [2] Polvani L M. Two-layer geostrophic vortex dynamics. *J Fluid Mech*, 1991, 225: 241—270.
- [3] 罗哲贤. 柯氏力作用下涡旋运动的等值线动力学. *气象学报*, 1993, 51(4): 394—404.
- [4] Ohnishi H. A study on the tropical cyclone motion caused by its asymmetric structure. *Collected papers issued at the Conference of Meteorological Research Institute*, 1990, 38—50.
- [5] 罗哲贤. 能量频散对台风结构和移动的作用. *气象学报*, 1994, 52(2): 149—156.
- [6] 罗哲贤. 热带气旋逆时针打转异常路径的可能原因. *中国科学*, 1991, 7: 769—775.
- [7] 丑纪范. 大气动力学的新进展. 兰州: 兰州大学出版社, 1990, 214.

CONTOUR DYNAMICS FOR THE MOTION OF VORTICES WITH SEVERAL CLOSED CONTOURS

Luo Zhexian

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing, 210044*)

Abstract

We present the contour dynamics for the motion of vortices with several closed contours influenced by the Coriolis force, by which six numerical computations are performed. The phenomenon of the counterclock-wise loop of a moving vortex is clearly shown, and the changing asymmetry with time may serve as a precursor for this phenomenon. Meanwhile, we also discuss the dependence of the vortex shift upon its tight-broad distribution, and the dependence of the westward component of the vortex motion upon its asymmetric structure. The results are in the main consist with those of the previous analytical works and numerical experiments.

Key words: Vortices with several closed contours, Contour dynamics, Nonlinearity, Coriolis force.