

# 非静力平衡大气非线性层结对称运动 的稳定性和突变\*

罗德海 彭晓林

(成都气象学院气象研究所, 610041)

## 提 要

在假定了环境地转风具有水平和垂直的线性切变的情况下, 考虑大气层结的线性和非线性切变的作用, 建立了一个非线性常微分方程组, 然后构造了一个Hamilton函数, 通过讨论Hamilton函数的凸凹性, 得到了非线性层结对称运动的不稳定判据, 同时讨论了非线性层结对称运动产生突变的条件。

**关键词:** 对称运动, 稳定性, 突变, 判据。

## 1 引 言

大量的观测事实揭示出锋面雨带具有对称的中尺度带状结构, 通过对锋面环流各种物理量的计算和分析, 人们发现对称不稳定可能是锋面雨带的一种触发机制, 最近还发现中尺度对流复合体 (MCC), 飕线以及暖区雨带的产生与对称不稳定的发生有关, 因此现在越来越重视对称不稳定理论的研究。早在 1979 年 Bennets 和 Hoskins<sup>[1]</sup>为了解释锋面雨带的形成, 提出了饱和大气中的条件对称不稳定理论。后来 Emanuel<sup>[2]</sup>(1983) 提出了对称不稳定的 Lagrange 质点理论, 这种理论主要考查一层流体抬升达到饱和后的不稳定情况。但在实际大气中, 对称不稳定环流主要产生在低层暖湿层中, 这说明位温廓线对对称不稳定的产生也很重要, 在暖湿层中, 除大气层结变成弱稳定或弱不稳定外, 而且大气层结的线性和非线性切变也加大, 从而大气层结的线性和非线性切变对于对称不稳定的影响也变得越来越重要了, 因此在研究对称不稳定性时, 必须考虑这些因子的作用, 本文的目的在于研究这一个问题。

## 2 模式方程

绝热, 无粘性的大气运动方程为

\* 1990 年 9 月 21 日收到原稿, 1992 年 12 月 23 日收到最后修改稿。

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $u, v, w$  分别为  $x, y, z$  方向上的速度分量,  $\theta$  为空气质点的位温,  $\bar{\theta}$  为环境大气的位温, 其他符号为气象上常用, 方程组(1)与方程  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ,  $p = \rho RT$ ,  $\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/C_p}$  组成一个完备的方程组。

假定大气中的气压只存在南北变化, 并且气压梯度力满足地转风关系, 在这种情况下, 方程组(1)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = 0 \\ \frac{dv}{dt} + f(u - u_g) = 0 \\ \frac{dw}{dt} = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $u_g$  为地转风风速。

对于对称运动, 可假定运动与  $x$  无关, 设初始时刻, 空气质点位于  $y = 0, z = 0$  处, 当空气质点受到扰动时, 空气质点同时在经向和垂直方向上移动了  $y$  和  $z$  的距离, 于是由方程组(2)的第一式可得 ( $y, z$ ) 处空气质点的纬向速度为

$$u = u_0 + fy \quad (3)$$

其中  $u_0$  为  $u$  在初始时刻的纬向速度,  $f$  为常数。

设环境地转风具有线性切变分布, 亦即

$$u_g = \bar{u}_g + \frac{\partial u_g}{\partial y} y + \frac{\partial u_g}{\partial z} z \quad (4)$$

其中  $\bar{u}_g, \frac{\partial u_g}{\partial y}, \frac{\partial u_g}{\partial z}$  均为常数。

再设大气中的环境位温为

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} y + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \bar{\theta}}{\partial z^3} z^3 \quad (5)$$

假定初始时刻空气质点的纬向速度、位温与环境地转风、环境位温相同, 于是将式(3)、(4)和(5)代入方程组(2), 我们有

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + f \left[ \bar{\xi}_a y - \frac{\partial u_g}{\partial z} z \right] = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = f \frac{\partial u_g}{\partial z} y - N^2 z - p_1 z^2 - p_2 z^3 \end{cases} \quad (6)$$

其中已使用了  $g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = N^2$ ,  $g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial y} = -f \frac{\partial u_g}{\partial z}$ ,  $\bar{\xi}_a = f - \frac{\partial u_g}{\partial y}$ ,  $p_1 = \frac{1}{2} \frac{g}{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{6} \frac{g}{\theta} \frac{\partial^3 \bar{\theta}}{\partial z^3}$ , 这里的  $p_1, p_2$  均为常数, 大气层结的分布为  $N_a^2 = N^2 + 2 p_1 z + 3 p_2 z^2$ ,  $p_1, p_2$  分别表示大气层结  $N^2$  的线性和非线性切变。对于饱和大气,  $\theta$  变为  $\theta_s$ , 在大气中, 人们一般取  $N^2 = 10^{-4} \text{s}^{-2}$ , 因此, 有  $p_1 < 0.5 \times 10^{-8} \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $p_2 < \frac{1}{3} \times 10^{-12} \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

设  $\frac{dy}{dt} = v$ ,  $\frac{dz}{dt} = w$ , 于是可将方程组(6)改写为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -f \bar{\xi}_a y + f \frac{\partial u_g}{\partial z} z \\ \frac{dz}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = f \frac{\partial u_g}{\partial z} y - N^2 z - p_1 z^2 - p_2 z^3 \end{cases} \quad (7)$$

分析方程组(7)中各式的右端, 可知系统为二自由度的Hamilton系统, 其Hamilton函数为

$$H(y, v, z, w) = \frac{1}{2} (v^2 + w^2) + \frac{1}{2} f \bar{\xi}_a y^2 - f \frac{\partial u_g}{\partial z} y z + \frac{N^2}{2} z^2 + \frac{p_1}{3} z^3 + \frac{p_2}{4} z^4 \quad (8)$$

大家知道, Hamilton系统在平衡点的稳定性问题, 可转化为讨论其Hamilton函数在该平衡点的极大值和极小值(亦即凸凹性)问题, 若Hamilton函数在该平衡点取极小值, 则该平衡点是稳定的, 若Hamilton函数在该平衡点取极大值或不取极值时, 则该平衡点是不稳定的。

### 3 非线性层结对称运动的稳定性——模型(1)

本模型考虑大气层结具有线性切变(即相当于位温具有二次的垂直切变), 亦即  $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 = 0$ , 这时方程组(7)可改写为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -f \bar{\xi}_a y + f \frac{\partial u_g}{\partial z} z \\ \frac{dz}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = f \frac{\partial u_g}{\partial z} y - N^2 z - p_1 z^2 \end{cases} \quad (9)$$

很明显, 方程组(9)的Hamilton函数为

$$H(y, z, v, w) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2) + \frac{1}{2} f \bar{\xi}_a y^2 - f \frac{\partial u_g}{\partial z} y z + \frac{N^2}{2} z^2 + \frac{p_1}{3} z^3 \quad (10)$$

设  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, v, z, w)$ ,  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$  分别  $y, v, z, w$  的平衡点, 令

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})}, \quad \text{这时由 } A_{ij} \text{ 确定的矩阵为}$$

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (11)$$

可以证明, 当  $M$  正定时, Hamilton函数在平衡点  $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$  处取极小值, 这时平衡点是稳定的, 若  $M$  负定或不定号时, 平衡点是不稳定的。

从方程组(9)我们可得两个平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  和  $(y^*, 0, z^*, 0)$ , 其中  $y^* = \frac{\partial u_g}{\partial z} z^*$ ,  $z^* = \frac{f \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 N^2 \bar{\xi}_a}{\bar{\xi}_a p_1}$ , 为了方便起见, 我们把在平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  附近的扰动称为小振幅的对称运动, 而把在平衡点  $(y^*, 0, z^*, 0)$  附近的扰动称为大振幅的对称运动。

由式(10), 我们可得在平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  处的矩阵  $M$  为

$$M = \begin{bmatrix} f \bar{\xi}_a & 0 & -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 & N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

于是我们有

$$|M - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 \left[ \lambda^2 - (N^2 + f \bar{\xi}_a) \lambda + f \bar{\xi}_a N^2 - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (13)$$

其中  $E$  为单位矩阵

从式(13)可以看出  $\lambda$  有一个正根(即  $\lambda = 1$ ), 这时矩阵  $M$  只能存在正定或不定号, 不存在负定。近来许多学者指出, 当  $N^2 < 0$  时, 对称运动将产生对流不稳定; 而当  $\bar{\xi}_a < 0$  时, 对称运动将产生惯性不稳定, 因此本文在讨论对称运动的稳定性时, 仅考虑  $N^2 > 0$ ,  $\bar{\xi}_a > 0$  的情况。从式(13)我们还可以看出, 当且仅当  $N^2 + f \bar{\xi}_a > 0$  且  $f \bar{\xi}_a N^2 - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 > 0$  时,  $M$  才为正定, 从而 Hamilton 函数  $H(y, v, z, w)$  在平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  处取极小值, 这时对称运动是稳定的。而当  $f \bar{\xi}_a N^2 - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 < 0$  时,  $M$  为不定号的矩阵, 因而 Hamilton 函数  $H$  在平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  不取极值, 这时对称运动是不稳定的。令

$$Ri = N^2 / \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2, \quad \text{对称不稳定的判据可改写为 } S < 0 \quad \left( S = \frac{\bar{\xi}_a}{f} - \frac{1}{Ri}, S \text{ 称为对 称稳定} \right)$$

性指数),这与Emanuel(1983)所得到的线性结果是一致的,可见对于小振幅的对称运动,其不稳定判据与线性判据一致。

对于平衡点  $(y^*, 0, z^*, 0)$ , 则有

$$M = \begin{bmatrix} f\bar{\xi}_a & 0 & -f\frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f\frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 & N^2 + 2p_1z^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

于是由式(14)可得

$$|M - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 \left\{ \lambda^2 - \lambda \left[ f\bar{\xi}_a + \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] + f\bar{\xi}_a \left[ \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] - \left( f\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0 \quad (15)$$

从式(15)可以看出它有一个正根( $\lambda=1$ ), 这时矩阵式(14)只存在正定或不定号, 不

存在负定的情况。当  $f\bar{\xi}_a + \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 < 0$  且  $f\bar{\xi}_a \left[ \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] - \left( f\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 > 0$  时或者  $f\bar{\xi}_a \left[ \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] - \left( f\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 < 0$  时, 矩阵  $M$  是不定号的, 这时对称运动不稳定的判据为

$$f\bar{\xi}_a + \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 < 0 \text{ 且 } f\bar{\xi}_a \left[ \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] - \left( f\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 > 0 \quad (16)$$

$$\text{或者 } f\bar{\xi}_a \left[ \frac{2f\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2}{\bar{\xi}_a} - N^2 \right] - \left( f\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 < 0 \quad (17)$$

将式(16)和(17)式改写为

$$S > \frac{1}{Ri} \left[ 1 + \bar{\xi}_a^2 / \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ 且 } S < 0 \quad (18)$$

$$\text{或者 } S > 0 \quad (19)$$

由于  $S > \frac{1}{Ri} \left[ 1 + \bar{\xi}_a^2 / \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right]$  ( $Ri > 0$ ) 与  $S < 0$  不能同时满足, 因而对称不稳定的判据变为

$$S > 0 \quad (20)$$

这说明对于大振幅的对称运动, 即使对称稳定性指数  $S$  满足  $S > 0$  时, 若考虑了层结线性切变的作用, 大振幅的对称运动也可以产生不稳定, 这与线性理论是不相同的。

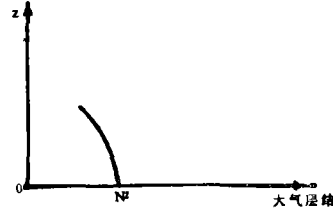
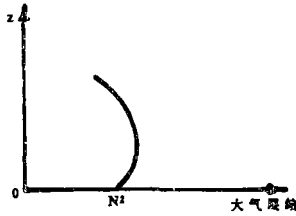


图 1  $p_1 > 0, p_2 < 0$  情况下大气层结的分布      图 2  $p_1 < 0, p_2 < 0$  情况下大气层结的分布

#### 4 非线性层结对称运动的稳定性——模型(1)

本模型主要考虑大气层结具有线性和非线性切变, 这时  $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$ , 对称运动仍由方程组(7)描述, 从方程组(7)可知:

(1) 当  $\Delta = fN^2 \left( \frac{p_1^2}{fN^2} - \frac{4p_2}{\bar{\xi}_a} S \right) < 0$  时, 方程组(7)有唯一平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ ;

(2) 当  $\Delta = 0$  时, 方程组(7)有两个平衡点  $(0, 0, 0, 0), (y_0, 0, z_0, 0)$ , 其中

$$y_0 = -p_1 \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) / (2\bar{\xi}_a p_2), z_0 = -\frac{p_1}{2p_2};$$

(3) 当  $\Delta > 0$  时, 方程组(7)有三个平衡点  $(0, 0, 0, 0), (y_1, 0, z_1, 0), (y_2, 0, z_2, 0)$ ,

$$\text{其中 } z_1 = -\frac{p_1 + \sqrt{\Delta}}{2p_2}, y_1 = \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} / \bar{\xi}_a \right) z_1, z_2 = -\frac{p_1 - \sqrt{\Delta}}{2p_2}, y_2 = \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} / \bar{\xi}_a \right) z_2.$$

从上面的讨论可以看出不管  $\Delta$  的符号如何, 方程组(7)均存在平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 并与  $\Delta$  的符号无关。为了讨论的方便, 我们将按  $\Delta$  的符号来讨论对称运动的稳定性。在以后讨论中, 我们把平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  附近的对称运动称为小振幅对称运动, 而把平衡点  $(y_n, 0, z_n, 0)$  ( $y_n \neq 0, z_n \neq 0, n = 0, 1, 2$ ) 附近的对称运动称为大振幅的对称运动。

##### 4.1 $\Delta < 0$ 的情况

方程组(7)在这种情况下只有一个平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 它附近的对称不稳定判据为  $S < 0$ 。由于  $S < 0$ , 欲使  $\Delta < 0$ , 必须要求  $p_2 < 0$ 。于是得到的对称不稳定判据为  $S < \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4p_2 f N^2}$ 。 $p_2 < 0$  情况下的大气层结分布如图 1 和图 2 所示。

##### 4.2 $\Delta = 0$ 的情况

在  $\Delta = 0$  的情况下, 方程组(7)有两个平衡点  $(0, 0, 0, 0), (y_0, 0, z_0, 0)$ 。对于平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 对称不稳定判据为  $S < 0$ , 要  $\Delta = 0$ , 只有  $p_2 < 0$  才有可能成立, 可见在这种情况下小振幅的对称运动的不稳定判据为  $S = \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4p_2 f N^2} (p_2 < 0)$ 。

对于平衡点  $(y_0, 0, z_0, 0)$ , 我们可得

$$M = \begin{bmatrix} f\bar{\xi}_a & 0 & -f\frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f\frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 & N^2 + 2p_1 z_0 + 3p_2 z_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

因此我们有

$$|M - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 \left[ \lambda^2 - \lambda \left( f \bar{\xi}_a + N^2 - \frac{p_1^2}{4p_2} \right) + f \bar{\xi}_a \left( N^2 - \frac{p_1^2}{4p_2} \right) - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (22)$$

由于  $\Delta = 0$ , 式(22)可变为

$$|M - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 \left[ \lambda - \left( f \bar{\xi}_a + N^2 - \frac{p_1^2}{4p_2} \right) \right] \lambda = 0 \quad (23)$$

可见对于平衡点  $(y_0, 0, z_0, 0)$ , 当对称稳定性指数  $S$  满足  $S = \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4p_2 f N^2}$  ( $p_2 < 0$ ) 时, 大振幅对称运动是稳定的。

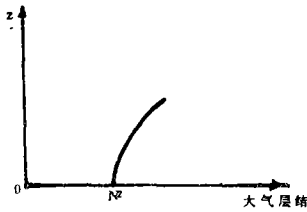


图 3  $p_2 > 0, p_1 > 0$  时, 大气层结的分布

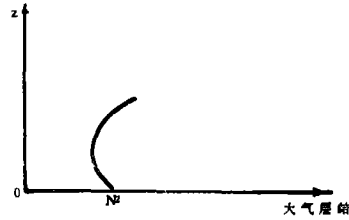


图 4  $p_2 > 0, p_1 < 0$  时, 大气层结的分布

### 4.3 $\Delta > 0$ 的情况

$\Delta > 0$  时, 方程组(7)有三个平衡点  $(0, 0, 0, 0), (y_1, 0, z_1, 0), (y_2, 0, z_2, 0)$ 。

4.3.1 对于平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 易知对称运动的不稳定判据为  $S < 0$ , 因  $\Delta > 0$ , 当  $p_2 > 0$  时, 小振幅的对称运动的不稳定判据为  $S < 0$ ; 当  $p_2 < 0$  时, 由于  $\frac{p_1^2}{f N^2} - \frac{4p_2}{\bar{\xi}_a} > 0$ , 因此小振幅的对称运动产生不稳定的判据为  $-\frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4p_2 f N^2} < S < 0$ 。

4.3.2 对于平衡点  $(y_1, 0, z_1, 0)$ , 有

$$M = \begin{bmatrix} f \bar{\xi}_a & 0 & -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 & N^2 + 2p_1 z_1 + 3p_2 z_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

因此可得

$$|M - \lambda E| = (\lambda - 1)^2 \left\{ \lambda^2 - \lambda \left[ f \bar{\xi}_a + N^2 - \frac{(p_1 - 3\sqrt{\Delta})(p_1 + \sqrt{\Delta})}{4p_2} \right] + f \bar{\xi}_a \left[ N^2 - \frac{(p_1 - 3\sqrt{\Delta})(p_1 + \sqrt{\Delta})}{4p_2} \right] - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0 \quad (25)$$

从式(25)可知, 对称运动在平衡点  $(y_1, 0, z_1, 0)$  附近的不稳定判据为

$$f \bar{\xi}_a + N^2 - \frac{(p_1 - 3\sqrt{\Delta})(p_1 + \sqrt{\Delta})}{4p_2} < 0 \text{ 且 } S > \frac{\bar{\xi}_a}{4f N^2 p_2} (p_1 - 3\sqrt{\Delta})(p_1 + \sqrt{\Delta}) \quad (26)$$

$$\text{或者 } S < \frac{\bar{\xi}_a}{4f N^2 p_2} (p_1 - 3\sqrt{\Delta})(p_1 + \sqrt{\Delta}) \quad (27)$$

将式(26)改写为

$$S > \frac{\bar{\xi}_a^2}{N^2} + \frac{\bar{\xi}_a}{f} \quad (28)$$

由于  $S = \frac{\bar{\xi}_a}{f} - \frac{1}{Ri}$ , 而  $Ri > 0$ , 因此不管  $p_1, p_2$  如何, 式(28)都不能成立, 因而可不考虑式(26), 只讨论式(27)。

#### 4.3.2.1 $p_2 > 0$ 的情况

由于  $\Delta > 0$ , 因此要获得对称不稳定判据, 必须将  $\Delta > 0$  与式(27)结合起来。将式(27)改写为

$$\left( \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{2fN^2 p_2} - 2S \right) < -\frac{\bar{\xi}_a p_1}{2fN^2 p_2} \sqrt{\Delta} \quad (29)$$

因不等号左端大于零, 因此只有当  $p_1 < 0$  时, 式(29)才能成立, 于是式(29)可变为  $S \left( 4S - \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{fN^2 p_2} \right) > 0$ , 由于  $\Delta > 0$ , 因此在  $p_2 > 0, p_1 < 0$  的情况下, 大振幅的对称运动的不稳定判据为

$$0 < S < \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} \quad (30)$$

此情况下, 大气层结分布如图 3 和 4 所示。

令  $S_c = \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 |p_2|}$ , 式(30)可改写为  $0 < S < S_c$ , 这与线性理论不同。

#### 4.3.2.2 $p_2 < 0$ 的情况

式(29)左端小于零, 当  $p_1 < 0$  时, 不稳定判据为  $S > 0$ ; 而当  $p_1 > 0$  时, 不稳定判据为  $\frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} < S < 0$ , 可见在  $p_2 < 0$  的情况下, 大振幅对称运动的不稳定判据为

$$\frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} < S < 0 \quad (p_1 > 0) \quad (31)$$

$$\text{或者} \quad S > 0 \quad (p_1 < 0) \quad (32)$$

4.3.3 对于平衡点  $(y_2, 0, z_2, 0)$ , 可以证明当大气层结和基本场满足

$$S < \frac{\bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} (p_1 + 3\sqrt{\Delta})(p_1 - \sqrt{\Delta}) \quad (33)$$

时, 大气中的对称运动会产生不稳定。

将式(33)改写为

$$\left( \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{2fN^2 p_2} - 2S \right) < \frac{\bar{\xi}_a p_1}{2fN^2 p_2} \sqrt{\Delta} \quad (34)$$

#### 4.3.3.1 $p_2 > 0$ 的情况

此情况下, 只有当  $p_1 > 0$  时, 式(34)才成立, 因此在  $p_2 > 0, p_1 > 0$  的情况下, 大振幅的对称运动的不稳定判据为

$$0 < S < \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} \quad (35)$$

#### 4.3.3.2 $p_2 < 0$ 的情况

式(34)左端小于零, 当  $p_1 > 0$  时, 不稳定判据为  $S > 0$ ; 而当  $p_1 < 0$  时, 不稳定判据为



$\frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} < S < 0$ , 可见在  $p_2 < 0$  的情况下, 大振幅对称运动的不稳定判据为

$$\frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} < S < 0 \quad (p_1 < 0) \quad (36)$$

或者  $S > 0 \quad (p_1 > 0) \quad (37)$

综上所述, 对于小振幅的对称运动(即平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  附近的运动), 由于平衡点  $(0, 0, 0, 0)$  与  $\Delta$  符号无关, 对称运动的不稳定判据为  $S < 0$ 。对于大振幅的对称运动(即平衡点  $(y_n, 0, z_n, 0)$  ( $n=1, 2$ ) 附近的对称运动), (a) 当  $p_2 > 0$  时, 大振幅对称运动的不稳定判据为  $0 < S < \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2}$  ( $p_2 > 0$ ), 取  $\bar{\xi}_a = 0.8f$ ,  $|p_1| = 0.2 \times 10^{-8} \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $p_2 = 0.1 \times 10^{-12} \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $N^2 = 10^{-4} \text{s}^{-2}$ , 这时不稳定判据变为  $0 < S < 0.32$ 。可见考虑了大气层结的线性和非线性切变后, 即使在对称稳定性指数  $S$  的正值区, 大振幅的对称运动也可能产生不稳定, 这拓展了 Emanuel(1983)的工作。(b) 当  $p_2 < 0$  时, 大振幅的对称不稳定判据为  $S > \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2}$  ( $p_2 < 0$ ), 取  $\bar{\xi}_a = 0.8f$ ,  $|p_1| = 0.2 \times 10^{-8} \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $p_2 = -0.1 \times 10^{-12} \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $N^2 = 10^{-4} \text{s}^{-2}$ , 这时在  $p_2 < 0$  情况下, 大振幅对称运动的不稳定判据为  $S > -0.32$ 。可见考虑了大气层结的线性和非线性切变后, 当非线性切变小于零时, 大振幅的对称运动要出现不稳定必须要求稳定性指数  $S$  大于某一个负的临界值。因此, 对于小振幅的对称运动, 其不稳定判据与大气层结的切变无关, 但对于大振幅的对称运动, 当层结存在切变时, 对称运动的不稳定判据还与层结的线性和非线性切变有关。

## 5 非线性层结对称运动的突变

这一节我们考虑的对称运动的突变模型为  $p_1 \neq 0$ ,  $p_2 \neq 0$  的情况, 这时方程组(7)的 Hamilton 函数仍为式(8), 由此得到 Hamilton 函数在  $(0, 0, 0, 0)$  附近的黑斯矩阵为

$$M_H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial v} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial w} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial z} & \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial w} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial v} & \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial w} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial w \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial w \partial v} & \frac{\partial^2 H}{\partial w \partial z} & \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \bar{\xi}_a & 0 & -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f \frac{\partial u_g}{\partial z} & 0 & N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

由式(38)有  $\det M_H = N^2 f \bar{\xi}_a - \left( f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2 = N^2 f S$  (39)

当  $\det M_H \neq 0$ , 即  $S \neq 0$  时, 系统不会产生突变, 只有当  $\det M_H = 0$  即  $S = 0$  时, 系统才会产生突变, 当  $\det M_H = 0$  时, 矩阵  $M_H$  的秩为 3, 这说明与结构不稳定有关的“实质变量”只有一个。在  $\det M_H = 0$  的情况下, 将式(8)改写为

$$H = \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \frac{1}{2} f \bar{\xi}_a \left( y - \frac{\partial u_g}{\partial z} z \right)^2 + \frac{p_1}{3} z^3 + \frac{p_2}{2} z^4 \quad (40)$$

式(40)前两项是退化部分,按照分裂定理<sup>[3]</sup>,引起突变的是非退化部分,即式(40)后面的两项,因此我们只讨论下面的 Hamilton 函数就足够了。

$$H_1(z) = \frac{p_1}{3} z^3 + \frac{p_2}{4} z^4 \quad (41)$$

令  $Q = z + \frac{p_1}{3p_2}$ ,  $H_1^*(Q) = H_1(z) + \frac{p_1^4}{108p_2^3}$ , 这时式(41)可变为

$$H_1^*(Q) = \frac{p_2}{4} Q^4 - \frac{p_1^2}{6p_2} Q^2 + \frac{2p_1^3}{27p_2^2} Q \quad (42)$$

当  $p_2 > 0$  时, 令  $Q = \frac{1}{p_2^{1/4}} Q^*$ , 于是式(42)可改写为

$$H_1^*(Q^*) = \frac{1}{4} Q^{*4} - \frac{p_1^2}{6p_2^{3/2}} Q^{*2} + \frac{2p_1^3}{27p_2^{9/4}} Q^* \quad (43)$$

当  $p_2 < 0$  时, 令  $Q = \frac{1}{(-p_2)^{1/4}} Q^*$ , 于是式(42)可改写为

$$H_1^*(Q^*) = -\frac{1}{4} Q^{*4} + \frac{p_1^2}{6(-p_2)^{3/2}} Q^{*2} + \frac{2p_1^3}{27(-p_2)^{9/4}} Q^* \quad (44)$$

下面讨论  $p_2 > 0$  的情况, 令  $a = -\frac{2p_1^2}{3p_2^{3/2}}$ ,  $b = \frac{8p_1^3}{27p_2^{9/4}}$ , 由式(43)可得平衡曲面  $M$  的方程为

$$4Q^{*3} + 2aQ^* + b = 0 \quad (45)$$

奇点集方程为

$$12Q^{*2} + 2a = 0 \quad (46)$$

于是由式(45)和(46)可得分叉点集方程为

$$8a^3 + 27b^2 = 0 \quad (47)$$

式(47)实际上是尖点方程, 将  $a, b$  代入式(47), 不管  $p_2 > 0$ ,  $p_1$  取何值, 方程式(47)总是满足的。平衡曲面  $M$  和分叉点集如图(5)所示。

图 5 中平衡曲面  $M$  的上(顶)叶和底叶对应两个极小值时, 而中叶对应于不稳定的极大值, 分叉点集是平衡曲面  $M$  的折痕在  $a-b$  平面上的投影。当相点(即式(45)的解)沿着底叶移动到曲面回折时, 它必然会跳到上叶, 而引起突变。式(43)中  $Q^{*4}$  的系数为正, 因此式(43)是尖点突变的正则形式, 这时在  $p_2 > 0$  的情况下, 当  $S$  从  $S > 0$  变到  $S < 0$  时, 对称运动可以产生正则尖点突变。当  $p_2 < 0$  时, 式(44)中  $Q^{*4}$  的系数为负。桑博德<sup>[3]</sup>指出系统式(43)和式(44)产生尖点突变的几何形状完全相同, 只是两者的极大值和极小值互换了。系统式(44)产生的尖点突变称为对偶尖点突变, 因此在  $p_2 < 0$  的情况下, 当  $S$  从  $S > 0$  变到  $S < 0$  时, 对称运动可产生对偶尖点突变。

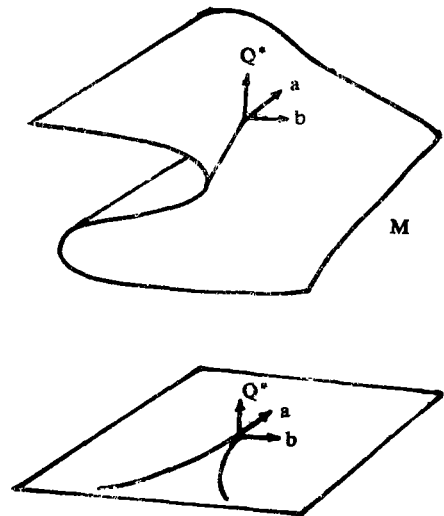


图 5 尖点突变的分叉点集和平衡曲面  $M$   
(引自文献[3])

## 6 结 论

考虑基本气流具有垂直的和水平的线性切变及大气层结具有线性和非线性切变,建立了四阶的非线性常微分方程组,通过引入 Hamilton 函数讨论了非线性层结对称运动的稳定性和突变等特征,指出:

(1) 在大气层结具有线性切变即  $p_1 \neq 0, p_2 = 0$  的情况下,小振幅的非线性层结对称运动产生不稳定的判据为  $S < 0$ ;而对于大振幅的对称运动,产生不稳定的判据为  $S > 0$ ,这与线性理论是不相同的。

(2) 在大气层结具有线性和非线性切变即  $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$  的情况下,当  $p_2 > 0$  时,大振幅对称运动的不稳定判据为  $0 < S < \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} (p_2 > 0)$ ;而当  $p_2 < 0$  时,大振幅对称运动的不稳定判据为  $S > \frac{p_1^2 \bar{\xi}_a}{4fN^2 p_2} (p_2 < 0)$ 。

(3) 在  $p_2 > 0$  的情况下,当  $S$  从  $S > 0$  变到  $S < 0$  时,非线性层结对称运动可产生正则尖点突变;而在  $p_2 < 0$  的情况下,当  $S$  从  $S > 0$  变到  $S < 0$  时,非线性层结对称运动可产生对偶尖点突变。

### 参考文献

- [1] Bennetts D A, Hoskins B J. Conditional symmetric instability—a possible explanation frontal rainbands. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1979, 105:945-962.  
 [2] Emanuel K A. The Lagrangian parcel dynamics of moist symmetric instability. *J Atmos Sci*, 1983, 40:2368-2376.  
 [3] 桑博德著. 突变理论入门. 上海:上海科学技术出版社. 1981, 26-29.

## THE STABILITY AND CATASTROPHE OF NONLINEAR STRATIFICATION SYMMETRIC MOTION IN THE NONHYDROSTATIC BALANCE ATMOSPHERE

Luo Dehai Peng Xiaolin

(Chengdu Institute of Meteorology, 610041)

### Abstract

In this paper, based on the assumption of the geostrophic wind with linear horizontal and vertical shear, a nonlinear ordinary differential equation is constructed considering the atmospheric stratification with linear and nonlinear vertical shear. Furthermore, the instability criteria of nonlinear stratification symmetric motion have been obtained by discussing the convexity of Hamilton's function, and the catastrophe condition of nonlinear stratification symmetric motion is discussed.

**Key words:** Symmetric motion, Stability, Catastrophe, Criteria.